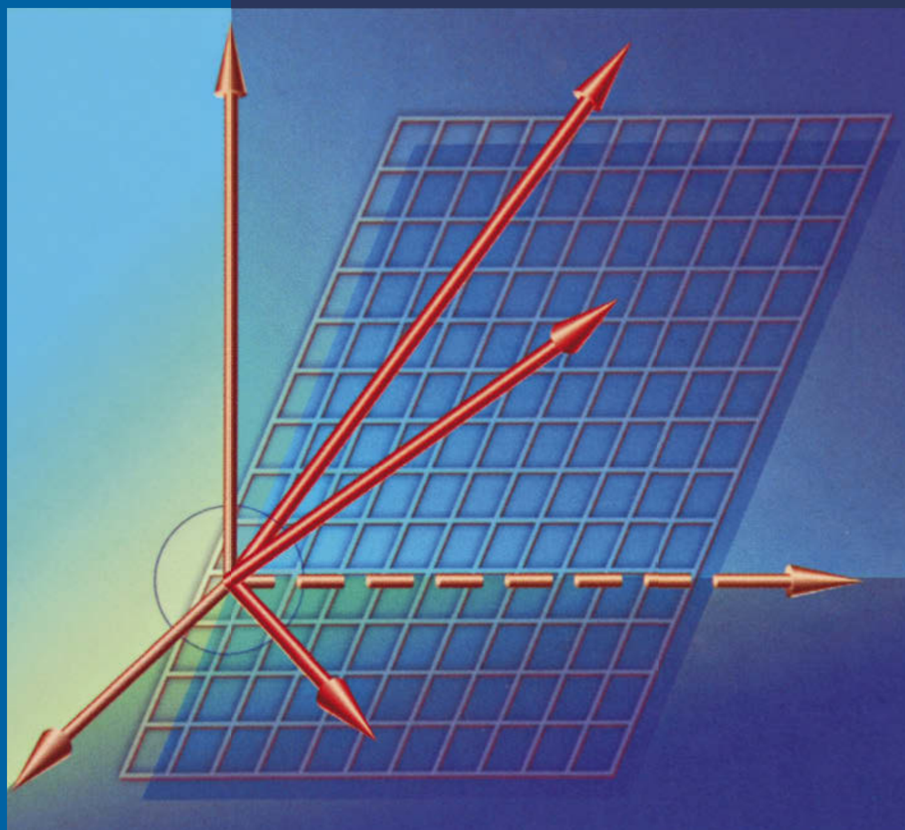
DÉCIMA EDIÇÃO

Álgebra Linear

COM APLICAÇÕES





Howard Anton
Chris Rorres

https://livros-pdf-ciencias-exatas.blogspot.com.br/



A634a Anton, Howard.
Álgebra linear com aplicações [recurso eletrônico] / Howard Anton, Chris Rorres ; tradução técnica: Claus Ivo Doering. – 10. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : Bookman, 2012.

Editado também como livro impresso em 2012.
ISBN 978-85-407-0170-0

1. Matemática. 2. Álgebra linear. I. Rorres, Chris. II. Título.

CDU 512

Catalogação na publicação: Fernanda B. Handke dos Santos – CRB 10/2107

Howard Anton
Professor Emérito da Drexel University

Chris Rorres
University of Pennsylvania

Álgebra Linear

COM APLICAÇÕES

DÉCIMA EDIÇÃO

Tradução técnica:
Claus Ivo Doering
Professor Titular do Instituto de Matemática da UFRGS

Versão impressa
desta obra: 2012



2012

Obra originalmente publicada sob o título *Elementary Linear Algebra: Applications Version*, 10th Edition
ISBN 9780470432051 / 0470432055
John Wiley & Sons, Inc.

Capa: *Rogério Grilho* (arte sobre capa original)

Leitura final: *Renata Ramisch*

Coordenadora editorial: *Denise Weber Nowaczyk*

Projeto e editoração: *Techbooks*

Reservados todos os direitos de publicação, em língua portuguesa, à
BOOKMAN COMPANHIA EDITORA LTDA., uma empresa do GRUPO A EDUCAÇÃO S.A.
Av. Jerônimo de Ornelas, 670 – Santana
90040-340 – Porto Alegre – RS
Fone: (51) 3027-7000   Fax: (51) 3027-7070

Unidade São Paulo
Av. Embaixador Macedo Soares, 10.735 – Pavilhão 5 – Cond. Espace Center
Vila Anastácio – 05095-035 – São Paulo – SP
Fone: (11) 3665-1100   Fax: (11) 3667-1333

SAC 0800 703-3444 – www.grupoa.com.br

IMPRESSO NO BRASIL
PRINTED IN BRAZIL

Para
Minha esposa, Pat
Meus filhos, Brian, David e Lauren
Meus pais, Shirley e Benjamin
Meu benfeitor, Stephen Girard (1750-1831),
cuja filantropia mudou minha vida

Howard Anton

Para Billie

Chris Rorres

Esta página foi deixada em branco intencionalmente.

OS AUTORES

Howard Anton graduou-se pela Lehigh University, fez mestrado na University of Illinois e doutorado na Polytechnic University of Brooklin, sempre em Matemática. No começo dos anos 1960, trabalhou em problemas matemáticos relacionados ao programa espacial tripulado norte-americano na Burroughs Corporation e na Avco Corporation, em Cabo Canaveral, na Flórida. Em 1968, entrou para o Departamento de Matemática da Drexel University, onde lecionou em tempo integral até 1983. Desde então, passa a maior parte de seu tempo escrevendo livros didáticos e elaborando projetos para associações matemáticas. Ele foi presidente da Associação Americana de Matemática (MAA) da seção do leste do estado da Pennsylvania e do estado de Delaware, atuou no Conselho Diretor da MAA e orientou a criação de Associações de Estudantes na MAA. Além de vários artigos pedagógicos, publicou inúmeros trabalhos de pesquisa em Análise Funcional, Teoria de Aproximação e Topologia. Ele é mais conhecido pelos seus livros didáticos de Matemática, que estão entre os mais utilizados no mundo. Atualmente existem mais de 150 versões de seus livros, incluindo traduções para espanhol, árabe, português, italiano, indonésio, francês, japonês, chinês, hebreu e alemão. Para relaxar, o Dr. Anton gosta de viajar e fotografar.

Chris Rorres graduou-se pela Drexel University e fez doutorado em Matemática no Courant Institute of New York University. Por mais de 30 anos, foi um membro do Departamento de Matemática da Drexel University onde, além de lecionar, desenvolveu pesquisa aplicada em engenharia solar, espalhamento acústico, dinâmica populacional, confiabilidade de sistemas computacionais, geometria de sítios arqueológicos, política ótima de criação de animais e teoria de decisão. Tendo se aposentado em 2001 como Professor Emérito da Drexel University, atualmente é consultor matemático e tem um cargo de pesquisador na Escola de Medicina Veterinária da University of Pennsylvania, onde está envolvido com modelagem matemática de epidemias de animais. O Dr. Rorres é um renomado conhecedor da vida e da obra de Arquimedes, tendo aparecido em vários documentários para a televisão sobre esse assunto. Seu site, muito louvado e dedicado a Arquimedes (http://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/contents.html, em inglês), é um livro virtual que se tornou uma ferramenta de ensino importante na história da Matemática para estudantes de todo o mundo.

Esta página foi deixada em branco intencionalmente.

PREFÁCIO

Este livro é uma versão expandida da décima edição da obra *Elementary Linear Algebra*, de Howard Anton. Os nove primeiros capítulos deste livro são idênticos aos nove primeiros capítulos daquele texto; o décimo capítulo deste livro consiste em vinte aplicações da Álgebra Linear, escolhidas entre Administração, Economia, Engenharia, Física, Ciência da Computação, Teoria da Aproximação, Ecologia, Demografia e Genética. As aplicações são completamente independentes uma da outra e cada uma inclui uma lista de pré-requisitos matemáticos. Assim, cada professor tem a flexibilidade de escolher aquelas aplicações que são adequadas para seus estudantes e de incorporar as aplicações em qualquer parte da disciplina, depois de satisfeitos os pré-requisitos. Os Capítulos 1 a 9 incluem tratamentos simplificados de algumas das aplicações estudadas com maior profundidade no Capítulo 10.

Esta edição oferece um tratamento elementar da Álgebra Linear que é conveniente para estudantes universitários de primeiro e segundo anos. Seu objetivo é apresentar os fundamentos da Álgebra Linear da maneira mais clara possível – a maior preocupação é com a pedagogia. Embora a disciplina de Cálculo não seja um pré-requisito, há algum material opcional claramente assinalado para aqueles estudantes que tenham conhecimento dessa disciplina. Se for preciso, esse material pode ser omitido sem perda de continuidade.

Também não são requeridos recursos computacionais para usar este texto, mas para os professores que quiserem utilizar MATLAB, *Mathematica*, Maple ou calculadoras com funcionalidade de Álgebra Linear, publicamos algum material de apoio (em inglês) que pode ser acessado no *site*:

www.bookman.com.br

Resumo das mudanças nesta edição

Esta edição apresenta uma revisão substancial das edições anteriores. Além de incluir algum material novo, todo o texto foi revisado de modo a garantir que todos os tópicos mais importantes possam ser tratados numa disciplina padrão. As mudanças mais significativas são as seguintes.

- **Vetores nos espaços de dimensão 2, 3 e *n*** Os Capítulos 3 e 4 das edições anteriores foram combinados num único capítulo. Isso nos permitiu eliminar certas exposições duplicadas e justapor conceitos no espaço de dimensão *n* com os dos espaços bi e tridimensionais, de forma a transmitir mais claramente como as ideias de espaços de dimensões superiores generalizam as noções já conhecidas pelos estudantes.
- **Novos elementos pedagógicos** Cada seção passou a terminar com uma *Revisão de Conceitos* e uma lista de *Aptidões Desenvolvidas*, que dão ao aluno uma referência conveniente para as principais ideias desenvolvidas naquela seção.
- **Novos exercícios** Foram acrescentados muitos exercícios novos, inclusive um grupo de exercícios do tipo verdadeiro/falso ao final da maioria das seções.
- **Tratamento antecipado de autovalores e autovetores** O capítulo que trata de autovalores e autovetores era o Capítulo 7 nas edições anteriores, mas agora é o Capítulo 5.
- **Espaços vetoriais complexos** Revisamos completamente o capítulo intitulado *Espaços Vetoriais Complexos* da edição precedente. As ideias mais importantes agora são apresentadas nas Seções 5.3 e 7.5, no contexto de diagonalização matricial. Uma breve revisão de números complexos foi incluída num Apêndice.
- **Formas quadráticas** Esse material foi totalmente reescrito e padronizado para enfocar mais precisamente as ideias mais importantes.
- **Novo capítulo sobre métodos numéricos** Na edição anterior, havia uma coleção de tópicos no último capítulo. Aquele capítulo foi substituído por um novo capítulo, que trata *exclusivamente* de métodos numéricos da Álgebra Linear. Os tópicos daquele capítulo que não eram relacionados com métodos numéricos foram deslocados para outras partes deste texto.

- **Decomposição em valores singulares** Em virtude de sua crescente importância, acrescentamos uma seção de *Decomposição em valores singulares* ao capítulo de métodos numéricos.
- **Busca na Internet e o método das potências** Uma nova seção intitulada *O método das potências* e sua aplicação aos mecanismos de busca na Internet foi acrescentada ao capítulo de métodos numéricos.

Características marcantes

- **Relações entre os conceitos** Um dos nossos principais objetivos pedagógicos é transmitir ao estudante que a Álgebra Linear é um assunto coeso e não só uma coleção de definições e técnicas isoladas. Uma maneira pela qual alcançamos isso é utilizando um crescendo de teoremas de *Afirmações Equivalentes*, que continuamente revisam relações entre sistemas de equações, matrizes, determinantes, vetores, transformações lineares e autovalores. Para ter uma ideia de como essa técnica é utilizada, veja, por exemplo, os Teoremas 1.5.3, 1.6.4, 2.3.8, 4.8.10, 4.10.4 e então o Teorema 5.1.6.
- **Transição suave para a abstração** Como a transição do R^n para os espaços vetoriais abstratos é difícil para muitos estudantes, dispensamos um considerável esforço para explicar a motivação subjacente a essa abstração e auxiliar o aluno a "visualizar" ideias abstratas por meio de analogias com ideias geométricas conhecidas.
- **Precisão matemática** Tentamos ser matematicamente precisos dentro do razoável. Para nos manter no nível do público estudantil, as demonstrações são apresentadas num estilo paciente, que convém a iniciantes. Há uma pequena seção nos Apêndices que trata de como ler afirmações em demonstrações, e também há vários exercícios em que o leitor é guiado ao longo dos passos de uma demonstração e em que são pedidas justificativas.
- **Adequação a vários públicos** Este texto foi projetado para garantir as necessidades de estudantes das Engenharias, da Ciência da Computação, da Biologia, da Física, da Administração e da Economia, bem como aqueles da Matemática.
- **Notas históricas** Para oferecer aos alunos uma percepção da história da Matemática e transmitir que os teoremas e as equações que estão estudando foram criados por pessoas reais, incluímos inúmeras *Notas históricas*, que colocam em perspectiva histórica o tópico estudado.

Sobre os exercícios

- **Conjunto de exercícios graduados** Cada grupo de exercícios começa com problemas rotineiros de treinamento e avança até problemas com maior substância.
- **Exercícios de verdadeiro/falso** A maioria dos conjuntos de exercícios termina com problemas do tipo verdadeiro/falso projetados para conferir o entendimento conceitual e o raciocínio lógico. Para evitar simples adivinhação, pede-se que os alunos justifiquem suas respostas de alguma maneira.
- **Conjunto de exercícios suplementares** Ao final da maioria dos capítulos, apresentamos um grupo de exercícios suplementares que tendem a ser mais desafiadores e obrigam o aluno a usar conceitos de todo o capítulo e não de uma só seção específica.

Um guia para o professor

Embora as disciplinas de Álgebra Linear variem muito em termos de conteúdo e filosofia, a maioria das disciplinas oferecidas se encaixa em uma de duas categorias: aquelas com aproximadamente 35–40 aulas e aquelas com aproximadamente 25–30 aulas. Em vista disso, criamos uma sequência longa e uma curta como possíveis pontos de partida para construir um cronograma. É claro que estas sequências são apenas guias, e cada professor certamente irá personalizá-las de acordo com seus interesses e exigências locais. Nenhuma destas sequências inclui aplicações, que podem ser acrescentadas, se desejado, conforme permita o tempo.

	Sequência longa	Sequência curta
Capítulo 1: Sistemas de equações lineares e matrizes	7 aulas	6 aulas
Capítulo 2: Determinantes	3 aulas	3 aulas
Capítulo 3: Espaços vetoriais Euclidanos	4 aulas	3 aulas
Capítulo 4: Espaços vetoriais Arbitrários	10 aulas	10 aulas
Capítulo 5: Autovalores e autovetores	3 aulas	3 aulas
Capítulo 6: Espaços com produto interno	3 aulas	1 aula
Capítulo 7: Diagonalização e formas quadráticas	4 aulas	3 aulas
Capítulo 8: Transformações lineares	3 aulas	2 aulas
Total	**37 aulas**	**30 aulas**

Uma sequência orientada para aplicações

Uma vez que tiver sido coberto o material central, o professor pode escolher aplicações dos nove primeiros capítulos ou do Capítulo 10. A tabela a seguir classifica cada uma das 20 seções do Capítulo 10 de acordo com sua dificuldade.

Fácil: O estudante médio que tenha os pré-requisitos listados deveria ser capaz de ler o material sem ajuda do professor.

Moderado: O estudante médio que tenha os pré-requisitos listados pode precisar de alguma ajuda do professor.

Mais difícil: O estudante médio que tenha os pré-requisitos listados provavelmente vai precisar de ajuda do professor.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
FÁCIL	•		•																	
MODERADO		•			•	•	•	•	•	•	•				•				•	•
MAIS DIFÍCIL				•								•	•	•		•	•	•		

Agradecimentos

Gostaríamos de expressar nosso agradecimento às pessoas a seguir, cuja orientação dedicada melhorou em muito este texto.

Revisores e colaboradores

Don Allen, *Texas A&M University*
John Alongi, *Northwestern University*
John Beachy, *Northern Illinois University*
Przemyslaw Bogacki, *Old Dominion University*
Robert Buchanan, *Millersville University of Pennsylvania*
Ralph Byers, *University of Kansas*
Evangelos A. Coutsias, *University of New Mexico*
Joshua Du, *Kennesaw State University*
Fatemeh Emdad, *Michigan Technological University*
Vincent Ervin, *Clemson University*
Anda Gadidov, *Kennesaw State University*
Guillermo Goldsztein, *Georgia Institute of Technology*
Tracy Hamilton, California State University, Sacramento
Amanda Hattway,*Wentworth Institute of Technology*
Heather Hulett, *University ofWisconsin–La Crosse*
David Hyeon, *Northern Illinois University*
Matt Insall, *Missouri University of Science and Technology*
Mic Jackson, *Earlham College*
Anton Kaul, *California Polytechnic Institute, San Luis Obispo*
Harihar Khanal, *Embry-Riddle University*
Hendrik Kuiper, *Arizona State University*
Kouok Law, *Georgia Perimeter College*
James McKinney, *California State University, Pomona*
Eric Schmutz, *Drexel University*
Qin Sheng, *Baylor University*

Adam Sikora, *State University of NewYork at Buffalo*
Allan Silberger, *Cleveland State University*
DanaWilliams, *Dartmouth College*

Colaboradores matemáticos

Agradecimentos especiais são devidos a muitos professores e matemáticos talentosos que forneceram orientação pedagógica, ajudaram com respostas e exercícios ou fizeram uma conferência ou revisão minuciosa.

John Alongi, *Northwestern University*
Scott Annin, *California State University, Fullerton*
Anton Kaul, *California Polytechnic State University*
Sarah Streett
Cindy Trimble, *C Trimble and Associates*
Brad Davis, *C Trimble and Associates*

A equipe de apoio da Wiley

David Dietz, Editor
Jeff Benson, Editor Assistente
Pamela Lashbrook, Assistente Editorial
Janet Foxman, Editor de Produção
Maddy Lesure, Projetista
Laurie Rosatone, Vice-Presidente
Sarah Davis, Gerente de Vendas
Diana Smith, Assistente de Publicidade
Melissa Edwards, Editor
Lisa Sabatini, Gerente de Projeto
Sheena Goldstein, Editor de Fotografia
Carol Sawyer, Gerente Administrativo
Lilian Brady, Revisão

Colaboradores especiais

A produção de um livro como este requer o talento e a dedicação de muitos indivíduos, e tivemos a sorte de nos beneficiar com a experiência das seguintes pessoas.

David Dietz, nosso editor, por sua percepção, seu julgamento sólido e sua fé em nós.

Jeff Benson, nosso editor assistente, que fez um trabalho incrível na organização e coordenação dos muitos fios necessários para tornar esta edição uma realidade.

Carol Sawyer, do *The Perfect Proof*, que coordenou a miríade de detalhes do processo produtivo.

Dan Kirschenbaum, da *The Art of Arlene and Dan Kirschenbaum*, cujo conhecimento técnico e artístico resolveu certos assuntos difíceis e críticos de ilustração.

Bill Tuohy, que leu partes do manuscrito e cujo olho crítico para o detalhe teve uma influência importante na evolução deste texto.

Pat Anton, que revisou o manuscrito, quando necessário.

Maddy Lesure, nossa projetista do texto e da capa, cuja infalível percepção estética está aparente nas páginas deste livro.

Rena Lam, da *Techsetters, Inc.*, que fez um trabalho maravilhoso para atravessar um atoleiro de pesadelo de decisões editoriais, garranchos em bilhetes e mudanças de última hora, e produziu um livro lindo.

John Rogosich, da *Techsetters, Inc.*, que competentemente programou os elementos do projeto editorial do livro e resolveu inúmeros problemas tipográficos espinhosos

Lilian Brady, nossa revisora de muitos anos, cujo olho para a tipografia e conhecimento da linguagem são maravilhosos.

A Equipe da Wiley Há muitas pessoas na Wiley com as quais temos uma dívida de gratidão: Laurie Rosatone, Ann Berlin, Dorothy Sinclair, Janet Foxman, Sarah Davis, Harry Nolan, Sheena Goldstein, Melissa Edwards e Norm Christiansen. Muito obrigado a vocês todos.

SUMÁRIO

Esta página foi deixada em branco intencionalmente.

CAPÍTULO 1

Sistemas de Equações Lineares e Matrizes

CONTEÚDO DO CAPÍTULO

INTRODUÇÃO

Muitas vezes na Ciência, na Administração e na Matemática, a informação é organizada em linhas e colunas, formando agrupamentos retangulares denominados "matrizes". Com frequência, essas matrizes aparecem como tabelas de dados numéricos que surgem em observações físicas, mas também ocorrem em vários contextos matemáticos. Por exemplo, veremos neste capítulo que toda a informação necessária para resolver um sistema de equações tal como

$$\begin{aligned} 5x + y &= 3 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}$$

está encorpada na matriz

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

e que a solução do sistema pode ser obtida efetuando operações apropriadas nessa matriz. Isso é particularmente importante no desenvolvimento de programas de computador para resolver sistemas de equações lineares, porque os computadores são muito bons para manipular tabelas de informações numéricas. Contudo, as matrizes não são simplesmente uma ferramenta de notação para resolver sistemas de equações; elas também podem ser vistas como objetos matemáticos de vida própria, existindo uma teoria rica e importante associada a elas, que tem uma grande variedade de aplicações práticas. É o estudo de matrizes e tópicos relacionados que constitui a área matemática denominada "Álgebra Linear". Neste capítulo, começamos nosso estudo de matrizes.

1.1 Introdução aos sistemas de equações lineares

Os sistemas de equações lineares e suas soluções constituem um dos principais tópicos estudados neste livro. Nesta primeira seção, introduzimos alguma terminologia básica e discutimos um método para resolver tais sistemas.

Equações lineares

Lembre que uma reta num sistema bidimensional de coordenadas retangulares xy pode ser representada por uma equação da forma

$$ax + by = c \quad (a \text{ e } b \text{ não ambos iguais a } 0)$$

e que um plano num sistema tridimensional de coordenadas retangulares xyz pode ser representado por uma equação da forma

$$ax + by + cz = d \quad (a, b \text{ e } c \text{ não todos iguais a } 0)$$

Esses são exemplos de "equações lineares", a primeira sendo uma equação linear nas variáveis x e y, e a segunda, uma equação linear nas variáveis x, y e z. Mais geralmente, definimos uma ***equação linear*** nas n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ como uma equação que pode ser expressa na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são constantes, sendo que nem todos os a são nulos. Nos casos especiais em que $n = 2$ ou $n = 3$, costumamos usar variáveis sem índices e escrevemos as equações lineares como

$$a_1x + a_2y = b \quad (a_1, a_2 \text{ não ambos iguais a } 0) \tag{2}$$

$$a_1x + a_2y + a_3z = b \quad (a_1, a_2, a_3 \text{ não todos iguais a } 0) \tag{3}$$

No caso especial em que $b = 0$, a Equação (1) tem a forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \tag{4}$$

que é denominada ***equação linear homogênea*** nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

► EXEMPLO 1 Equações lineares

Observe que um sistema linear não envolve produtos ou raízes de variáveis. Todas as variáveis ocorrem somente na primeira potência e não aparecem, por exemplo, como argumentos de funções trigonométricas, logarítmicas ou exponenciais. As equações seguintes são lineares

$$\begin{array}{ll} x + 3y = 7 & x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ \frac{1}{2}x - y + 3z = -1 & x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \end{array}$$

As seguintes não são lineares.

$$\begin{array}{ll} x + 3y^2 = 4 & 3x + 2y - xy = 5 \\ \text{sen}\, x + y = 0 & \sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1 \end{array}$$ ◄

Um conjunto finito de equações lineares é denominado um ***sistema de equações lineares*** ou, simplesmente, um ***sistema linear***. As variáveis são denominadas ***incógnitas***. Por exemplo, o sistema (5) a seguir tem incógnitas x e y, e o sistema (6) tem incógnitas x_1, x_2 e x_3.

$$\begin{array}{ll} 5x + y = 3 & 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x - y = 4 & 3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4 \end{array} \tag{5-6}$$

Um sistema linear arbitrário de m equações nas n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad &\;\;\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{7}$$

O índice duplo dos coeficientes a_{ij} das incógnitas dá sua posição no sistema. O primeiro índice indica a equação em que ocorre o coeficiente, e o segundo indica qual é a incógnita que está sendo multiplicada. Assim, a_{12} está na primeira equação e multiplica x_2.

Uma ***solução*** de um sistema nas n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma sequência de n números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ para os quais a substituição

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \ldots, \quad x_n = s_n$$

faz de cada equação uma afirmação verdadeira. Por exemplo, o sistema em (5) tem a solução

$$x = 1, \quad y = -2$$

e o sistema em (6) tem a solução

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1$$

Essas soluções podem ser escritas mais sucintamente como

$$(1, -2) \quad \text{e} \quad (1, 2, -1)$$

em que omitimos os nomes das variáveis. Essa notação nos permite interpretar essas soluções geometricamente como pontos nos espaços bi e tridimensionais. De modo mais geral, uma solução

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \ldots, \quad x_n = s_n$$

de um sistema linear em n incógnitas pode ser escrita como

$$(s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

que é denominada uma ***ênupla ordenada***. Com essa notação, fica entendido que todas as variáveis aparecem na mesma ordem em cada equação. Se $n = 2$, então a ênupla é denominada ***par ordenado*** e, se $n = 3$, dizemos que a ênupla é um ***terno ordenado***.

Sistemas lineares em duas e três incógnitas

Os sistemas lineares em duas incógnitas aparecem relacionados com interseção de retas. Por exemplo, considere o sistema linear

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

em que os gráficos das equações são retas no plano xy. Cada solução (x, y) desse sistema corresponde a um ponto de interseção das retas, de modo que há três possibilidades (Figura 1.1.1).

1. As retas podem ser paralelas e distintas, caso em que não há interseção e, consequentemente, não existe solução.
2. As retas podem intersectar em um único ponto, caso em que o sistema tem exatamente uma solução.
3. As retas podem coincidir, caso em que existe uma infinidade de pontos de interseção (os pontos da reta comum) e, consequentemente, uma infinidade de soluções.

Em geral, dizemos que um sistema linear é ***consistente*** se possuir pelo menos uma solução e ***inconsistente*** se não tiver solução. Assim, um sistema linear *consistente* de duas equações em duas incógnitas tem uma solução ou uma infinidade de soluções, não

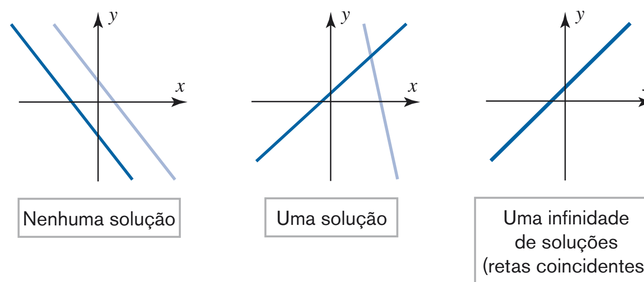


Figura 1.1.1

havendo outra possibilidade. O mesmo vale para um sistema linear de três equações em três incógnitas

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

em que os gráficos das equações são planos. As soluções do sistema, se as houver, correspondem aos pontos em que os três planos se intersectam, de modo que, novamente, vemos que há somente três possibilidades: nenhuma solução, uma solução ou uma infinidade de soluções. (Figura 1.1.2).

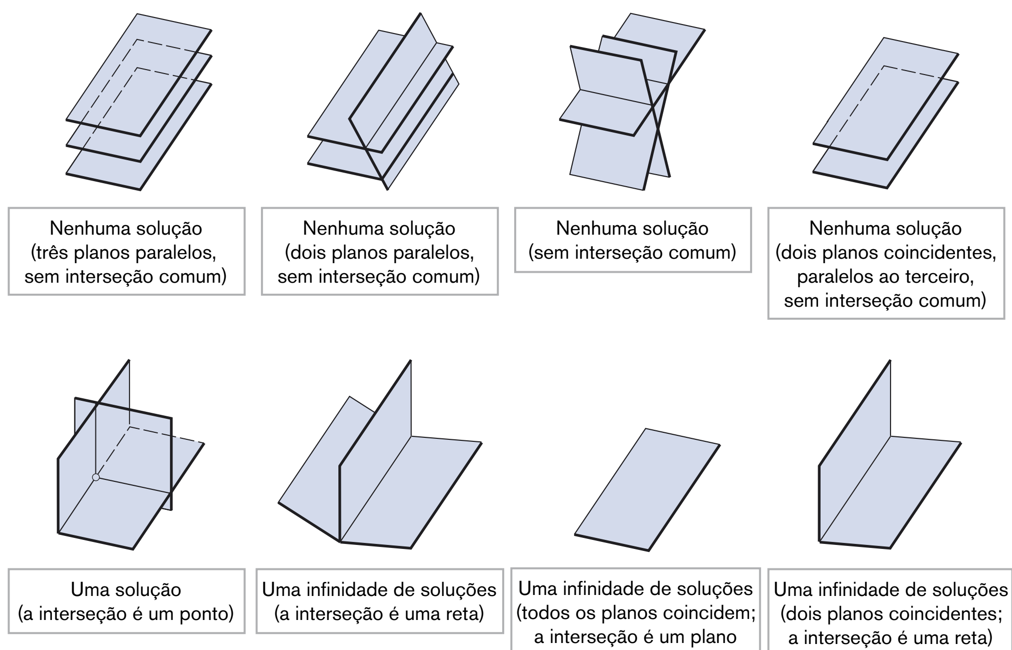


Figura 1.1.2

Mais adiante, provaremos que nossas observações sobre o número de soluções de sistemas de duas equações lineares em duas incógnitas e de sistemas de três equações lineares em três incógnitas são válidas em geral, como segue.

> Todo sistema de equações lineares tem zero, uma ou uma infinidade de soluções. Não existem outras possibilidades.

▶ EXEMPLO 2 Um sistema linear com uma solução

Resolva o sistema linear

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + y &= 6 \end{aligned}$$

Solução Podemos eliminar x da segunda equação somando -2 vezes a primeira equação à segunda. Isso fornece o sistema simplificado

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 3y &= 4 \end{aligned}$$

Da segunda equação, obtemos $y = \frac{4}{3}$ e substituir esse valor na primeira equação fornece $x = 1 + y = \frac{7}{3}$. Assim, o sistema tem a solução única

$$x = \tfrac{7}{3}, \quad y = \tfrac{4}{3}$$

Geometricamente, isso significa que as retas representadas pelas equações do sistema intersectam no único ponto $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Deixamos para o leitor conferir isso traçando os gráficos das retas.

▶ EXEMPLO 3 Um sistema linear sem soluções

Resolva o sistema linear

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

Solução Podemos eliminar x da segunda equação somando -3 vezes a primeira equação à segunda. Isso fornece o sistema simplificado

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 0 &= -6 \end{aligned}$$

A segunda equação é contraditória, de modo que o sistema dado não tem solução. Geometricamente, isso significa que as retas correspondentes às equações do sistema original são paralelas e distintas. Deixamos para o leitor conferir isso traçando os gráficos das retas ou, então, mostrar que as retas têm a mesma inclinação, mas cortam o eixo y em pontos distintos.

▶ EXEMPLO 4 Um sistema linear com uma infinidade de soluções

Resolva o sistema linear

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 16x - 8y &= 4 \end{aligned}$$

Solução Podemos eliminar x da segunda equação somando -4 vezes a primeira equação à segunda. Isso fornece o sistema simplificado

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

A segunda equação não impõe quaisquer restrições a x e y e pode, portanto, ser omitida. Assim, as soluções do sistema são os valores de x e y que satisfazem a única equação

$$4x - 2y = 1 \tag{8}$$

Geometricamente, isso significa que as retas correspondentes às duas equações do sistema original são coincidentes. Uma maneira de descrever o conjunto de soluções é resolver

No Exemplo 4, também poderíamos ter obtido equações paramétricas das soluções resolvendo (8) para y em termos de x e tomando $x = t$ como o parâmetro. As equações paramétricas resultantes teriam parecido diferentes, mas elas definem o mesmo conjunto de soluções.

essa equação para x em termos de y, obtendo $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}y$ e, então, associar a y um valor arbitrário t (denominado ***parâmetro***). Isso nos permite expressar a solução pelo par de equações (denominadas ***equações paramétricas***)

$$x = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}t, \quad y = t$$

Podemos obter soluções numéricas específicas dessas equações substituindo o parâmetro por valores numéricos. Por exemplo, $t = 0$ dá a solução $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $t = 1$ dá a solução $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ e $t = -1$ dá a solução $\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$. O leitor pode confirmar que essas são soluções, substituindo as coordenadas nas equações dadas.

▶ EXEMPLO 5 Um sistema linear com uma infinidade de soluções

Resolva o sistema linear

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ 2x - 2y + 4z &= 10 \\ 3x - 3y + 6z &= 15 \end{aligned}$$

Solução Esse sistema pode ser resolvido mentalmente, pois a segunda e a terceira equações são múltiplos da primeira. Geometricamente, isso significa que os três planos coincidem e que aqueles valores de x, y e z que satisfazem a equação

$$x - y + 2z = 5 \tag{9}$$

automaticamente satisfazem as três equações. Assim, basta encontrar as soluções de (9). Isso pode ser feito resolvendo (9) para x em termos de y e z, depois atribuir valores arbitrários r e s (parâmetros) a essas duas variáveis e, então, expressar a solução por meio das três equações paramétricas

$$x = 5 + r - 2s, \quad y = r, \quad z = s$$

Soluções específicas podem ser obtidas escolhendo valores numéricos para os parâmetros r e s. Por exemplo, tomando $r = 1$ e $s = 0$, dá a solução (6, 1, 0). ◀

Matrizes aumentadas e operações elementares com linhas

À medida que cresce o número de equações e de incógnitas num sistema linear, cresce também a complexidade da álgebra envolvida em sua resolução. As contas que precisamos fazer podem ficar mais tratáveis simplificando a notação e padronizando os procedimentos. Por exemplo, mantendo na memória a localização das somas, das variáveis e das igualdades no sistema linear

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

podemos abreviar a escrita do sistema escrevendo apenas a tabela retangular de números

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Como já observamos na introdução, o termo "matriz" é utilizado na Matemática para denotar uma coleção retangular de números. Em outras seções, estudaremos essas matrizes detalhadamente, mas por enquanto só estaremos interessados em matrizes aumentadas de sistemas lineares.

denominada ***matriz aumentada*** do sistema. Por exemplo, a matriz aumentada do sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{é} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

O método básico de resolver um sistema de equações lineares é efetuar operações algébricas no sistema que não alterem seu conjunto de soluções e que produzam uma sucessão de sistemas cada vez mais simples, até alcançar um ponto em que se possa decidir se o sistema é consistente e, se for, quais são suas soluções. As operações típicas são as seguintes.

1. Multiplicar uma equação inteira por uma constante não nula.
2. Trocar duas equações entre si.
3. Somar uma constante vezes uma equação a uma outra equação.

Como as linhas (horizontais) de uma matriz aumentada correspondem às equações no sistema associado, essas três operações correspondem às seguintes operações nas linhas da matriz aumentada.

1. Multiplicar uma linha inteira por uma constante não nula.
2. Trocar duas linhas entre si.
3. Somar uma constante vezes uma linha a uma outra linha.

Essas operações são denominadas ***operações elementares com linhas*** de uma matriz.

No exemplo seguinte, ilustramos como usar as operações elementares com as linhas de uma matriz aumentada para resolver sistemas de equações lineares em três incógnitas. Como na próxima seção desenvolveremos um procedimento sistemático de resolução de sistemas, não é preciso ficar preocupado sobre o porquê dos passos tomados nesse exemplo. O objetivo aqui deveria ser simplesmente entender as contas.

▶ EXEMPLO 6 Usando operações elementares com linhas

Na coluna da esquerda, resolvemos um sistema de equações lineares operando nas equações do sistema e, na coluna da direita, resolvemos o mesmo sistema operando nas linhas da matriz aumentada.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Somamos -2 vezes a primeira equação à segunda para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Somamos -2 vezes a primeira linha à segunda para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$



Maxime Bôcher (1867–1918)

Nota histórica O primeiro uso conhecido de matrizes aumentadas apareceu entre 200 e 100 a.C. num manuscrito chinês intitulado *Nove Capítulos de Arte Matemática*. Os coeficientes foram arranjados em colunas e não em linhas, como hoje, mas impressionantemente o sistema foi resolvido efetuando uma sucessão de operações com colunas. O uso do termo *matriz aumentada* parece te sido introduzido pelo matemático norte-americano Maxime Bôcher em seu livro *Introdução à Álgebra Superior*, publicado em 1907. Além de ter sido um pesquisador matemático destacado e um conhecedor profundo de latim, Química, Filosofia, Zoologia, Geografia, Meteorologia, arte e música, ele foi um excelente expositor de Matemática, cujos textos elementares eram muito apreciados pelos estudantes e continuam sendo procurados até hoje.

[Imagem: cortesia da American Mathematical Society]

Somamos -3 vezes a primeira equação à terceira para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Somamos -3 vezes a primeira linha à terceira para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos a segunda equação por $\frac{1}{2}$ para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Multiplicamos a segunda linha por $\frac{1}{2}$ para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Somamos -3 vezes a segunda equação à terceira para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Somamos -3 vezes a segunda linha à terceira para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Multiplicamos a terceira equação por -2 para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Multiplicamos a terceira linha por -2 para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Somamos -1 vez a segunda equação à primeira para obter

$$\begin{aligned} x + \tfrac{11}{2}z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Somamos -1 vez a segunda linha à primeira para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Somamos $-\frac{11}{2}$ vezes a terceira equação à primeira e $\frac{7}{2}$ vezes a terceira equação à segunda para obter

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Somamos $-\frac{11}{2}$ vezes a terceira linha à primeira e $\frac{7}{2}$ vezes a terceira equação à segunda para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A solução $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ é, agora, evidente. ◀

Revisão de conceitos

- Equação linear
- Equação linear homogênea
- Sistema de equações lineares
- Solução de um sistema linear
- Ênupla ordenada
- Sistema linear consistente
- Sistema linear inconsistente
- Parâmetro
- Equações paramétricas
- Matriz aumentada
- Operações elementares com linhas

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se uma dada equação é linear.
- Determinar se uma dada ênupla é uma solução de um sistema linear.
- Encontrar a matriz aumentada de um sistema linear.
- Encontrar o sistema linear correspondente a uma dada matriz aumentada.
- Efetuar operações elementares com as linhas de um sistema linear e as correspondentes nas linhas da matriz aumentada.
- Determinar se um sistema linear é consistente ou inconsistente.
- Encontrar o conjunto das soluções de um sistema linear consistente.

Conjunto de exercícios 1.1

1. Em cada parte, determine se a equação é linear em x_1, x_2 e x_3.

(a) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}x_3 = 1$ (b) $x_1 + 3x^2 + x_1x_3 = 2$

(c) $x_1 = -7x_2 + 3x_3$ (d) $x_1^{-2} + x^2 + 8x_3 = 5$

(e) $x_1^{3/5} - 2x_2 + x_3 = 4$

(f) $\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 7^{1/3}$

2. Em cada parte, determine se as equações formam um sistema linear.

(a) $$\begin{aligned} -2x + 4y + z &= 2 \\ 3x - \frac{2}{y} &= 0 \end{aligned}$$ (b) $$\begin{aligned} x &= 4 \\ 2x &= 8 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 4x - y + 2z &= -1 \\ -x + (\ln 2)y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} 3z + x &= -4 \\ y + 5z &= 1 \\ 6x + 2z &= 3 \\ -x - y - z &= 4 \end{aligned}$$

3. Em cada parte, determine se as equações formam um sistema linear.

(a) $$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\qquad - x_4 &= 5 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2x_1 + x_3) &= \sqrt{5} \\ e^{-2x_2 - 2x_4} &= \frac{1}{x_2} \\ 4x_4 &= 4 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 7x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3x_4 &= 3 \\ -x_1 + 5x_2 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$ (d) $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$

4. Para cada sistema do Exercício 2 que for linear, determine se é consistente.

5. Para cada sistema do Exercício 3 que for linear, determine se é consistente.

6. Escreva um sistema de equações lineares constituído de três equações em três incógnitas com

(a) nenhuma solução

(b) exatamente uma solução

(c) uma infinidade de soluções

7. Em cada parte, determine se o terno ordenado dado é uma solução do sistema linear

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(a) $(3, 1, 1)$ (b) $(3, -1, 1)$ (c) $(13, 5, 2)$

(d) $\left(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$ (e) $(17, 7, 5)$

8. Em cada parte, determine se o terno ordenado dado é uma solução do sistema linear

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(a) $\left(\frac{5}{7}, \frac{8}{7}, 1\right)$ (b) $\left(\frac{5}{7}, \frac{8}{7}, 0\right)$ (c) $(5, 8, 1)$

(d) $\left(\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{2}{7}\right)$ (e) $\left(\frac{5}{7}, \frac{22}{7}, 2\right)$

9. Em cada parte, encontre o conjunto de soluções da equação linear usando um parâmetro, se necessário.

(a) $7x - 5y = 3$

(b) $-8x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1$

10. Em cada parte, encontre o conjunto de soluções da equação linear usando um parâmetro, se necessário.

(a) $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$

(b) $3v - 8w + 2x - y + 4z = 0$

11. Em cada parte, encontre um sistema de equações lineares correspondente à matriz aumentada dada.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

12. Em cada parte, encontre um sistema de equações lineares correspondente à matriz aumentada dada.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -6 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & -6 & 1 & 1 \\ -8 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -4 & 3 \\ -4 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

13. Em cada parte, encontre a matriz aumentada do sistema de equações lineares dado.

(a) $\begin{aligned} -2x_1 &= 6 \\ 3x_1 &= 8 \\ 9x_1 &= -3 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 6x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 5x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 2x_2 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 6 \end{aligned}$

(d) $x_1 - x_5 = 7$

14. Em cada parte, encontre a matriz aumentada do sistema de equações lineares dado.

(a) $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 - x_5 &= 2 \\ x_3 + 7x_4 &= 1 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$

15. A curva $y = ax^2 + bx + c$ mostrada na figura passa pelos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3). Mostre que os coeficientes a, b e c são uma solução do sistema de equações lineares cuja matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{bmatrix}$$

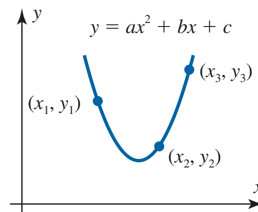


Figura Ex-15

16. Explique por que cada uma das operações elementares com linhas não afeta o conjunto das soluções de um sistema linear.

17. Mostre que se as equações lineares

$$x_1 + kx_2 = c \quad \text{e} \quad x_1 + lx_2 = d$$

têm o mesmo conjunto de soluções, então as duas equações são idênticas (isto é, $k = l$ e $c = d$).

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(h), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Um sistema linear cujas equações são todas homogêneas deve ser consistente.

(b) Multiplicar uma equação inteira por zero é uma operação elementar com as linhas aceitável.

(c) O sistema linear

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 2x - 2y &= k \end{aligned}$$

não pode ter uma única solução, independentemente do valor de k.

(d) Uma equação linear só, com duas ou mais incógnitas, sempre deve ter uma infinidade de soluções.

(e) Se o número de equações de um sistema linear exceder o número de incógnitas, então o sistema deve ser inconsistente.

(f) Se cada equação de um sistema linear consistente for multiplicada por uma constante c, então todas as soluções do novo sistema podem ser obtidas multiplicando as soluções do sistema original por c.

(g) As operações elementares com linhas permitem que uma equação de um sistema linear seja subtraída de uma outra.

(h) O sistema linear de matriz aumentada correspondente

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

é consistente.

1.2 Eliminação gaussiana

Nesta seção, desenvolvemos um procedimento sistemático para resolver sistemas de equações lineares. O procedimento é baseado na ideia de efetuar certas operações nas linhas da matriz aumentada que a simplifiquem até uma forma em que a solução do sistema possa ser visualizada.

Considerações sobre a resolução de sistemas lineares

Quando consideramos métodos para resolver sistemas de equações lineares, é importante distinguir entre sistemas grandes, que precisam ser resolvidos por computador, e sistemas pequenos, que podem ser resolvidos a mão. Por exemplo, há muitas aplicações que levam a sistemas em milhares e até milhões de incógnitas. Esses sistemas grandes requerem técnicas especiais para tratar dos problemas de tamanho de memória, erros de arredondamento, tempo de solução e assim por diante. Tais técnicas são estudadas na área de ***Análise Numérica*** e serão apenas tocadas neste texto Contudo, quase todos os métodos que são utilizados com sistemas grandes têm por base as ideias desenvolvidas nesta seção.

Formas escalonadas

No Exemplo 6 da seção anterior, resolvemos um sistema linear nas incógnitas x, y e z reduzindo a matriz aumentada à forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a partir da qual ficou evidente a solução $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Isso é um exemplo de uma matriz que está em ***forma escalonada reduzida por linhas***. Para ser dessa forma, um matriz deve ter as propriedades seguintes.

1. Se uma linha não consistir inteiramente em zeros, então o primeiro número não nulo da linha é um 1. Dizemos que esse número 1 é um ***pivô***.
2. Se existirem linhas constituídas inteiramente de zeros, então elas estão agrupadas juntas nas linhas inferiores da matriz.
3. Em quaisquer duas linhas sucessivas que não consistem só em zeros, o pivô da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivô da linha superior.
4. Cada coluna que contém um pivô tem zeros nas demais entradas.

Dizemos que uma matriz que tem as três primeiras propriedades está em ***forma escalonada por linhas***, ou simplesmente, em ***forma escalonada***. (Assim, uma matriz em forma escalonada reduzida por linhas necessariamente está em forma escalonada, mas não reciprocamente.)

▶ EXEMPLO 1 Formas escalonada e escalonada reduzida por linhas

As matrizes a seguir estão em forma escalonada reduzida por linhas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As matrizes a seguir estão em forma escalonada, mas não reduzida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▶ EXEMPLO 2 Mais sobre formas escalonada e escalonada reduzida por linhas

Como ilustra o exemplo anterior, uma matriz em forma escalonada tem zeros abaixo de cada pivô, enquanto uma matriz em forma escalonada reduzida por linhas tem zeros abaixo *e acima* de cada pivô. Assim, colocando qualquer número real no lugar dos asteriscos, todas as matrizes dos seguintes tipos estão em forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Todas as matrizes dos seguintes tipos estão em forma escalonada reduzida por linhas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$ ◀

Se a matriz aumentada de um sistema de equações lineares for colocada em forma escalonada *reduzida* por linhas por meio de uma sequência de operações elementares nas linhas, então o conjunto de soluções está visível ou pode ser obtido convertendo certas equações lineares à forma paramétrica. Vejamos alguns exemplos.

▶ EXEMPLO 3 Solução única

Suponha que a matriz aumentada de um sistema linear nas incógnitas x_1, x_2, x_3 e x_4 tenha sido reduzida por operações elementaresa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Essa matriz está em forma escalonada reduzida por linhas e corresponde às equações

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\quad &= 3 \\ x_2 \qquad\quad &= -1 \\ x_3 \quad &= 0 \\ x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Assim, o sistema tem uma única solução, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 5$.

No Exemplo 3, podemos, também, expressar a solução mais sucintamente como a 4-upla (3, −1, 0, 5).

▶ EXEMPLO 4 Sistemas lineares em três incógnitas

Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema linear nas incógnitas x, y e z tenha sido reduzida por operações com linhas à forma escalonada reduzida por linhas dada. Resolva o sistema.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução (a) A equação que corresponde à última linha da matriz aumentada é

$$0x + 0y + 0z = 1$$

O sistema é inconsistente, porque essa equação não é satisfeita por valor algum de x, y e z.

Solução (b) A equação que corresponde à última linha da matriz aumentada é

$$0x + 0y + 0z = 0$$

Essa equação pode ser omitida, porque não impõe restrições sobre x, y e z; logo, o sistema linear correspondente à matriz aumentada é

$$\begin{aligned} x \quad\; + 3z &= -1 \\ y - 4z &= \;\;\, 2 \end{aligned}$$

Como x e y correspondem a pivôs na matriz aumentada, dizemos que essas são as ***variáveis líderes***. As demais variáveis (nesse caso, só z) são ditas ***variáveis livres***. Resolvendo para as variáveis líderes em termos das variáveis livres, obtemos

$$\begin{aligned} x &= -1 - 3z \\ y &= 2 + 4z \end{aligned}$$

Dessas equações podemos ver que a variável livre z pode ser tratada como um parâmetro ao qual podemos atribuir um valor arbitrário t, que, então, determina os valores de x e y. Assim, o conjunto de soluções pode ser representado pelas equações paramétricas

$$x = -1 - 3\mathrm{t}, \quad y = 2 + 4t, \quad z = t$$

Substituindo vários valores de t nessas equações, podemos obter as várias soluções do sistema. Por exemplo, tomando $t = 0$, obtemos a solução

$$x = -1, \quad y = 2, \quad z = 0$$

e tomando $t = 1$, obtemos a solução

$$x = -4, \quad y = 6, \quad z = 1$$

Solução (c) Conforme explicamos na parte (b), podemos omitir as equações correspondentes às linhas nulas, com o que o sistema linear associado à matriz aumentada consiste na única equação

$$x - 5y + z = 4 \tag{1}$$

a partir da qual vemos que o conjunto de soluções é um plano no espaço tridimensional. Embora (1) seja uma forma válida do conjunto de soluções, existem muitas aplicações nas quais é preferível dar as soluções em forma paramétrica. Podemos converter (1) à forma paramétrica resolvendo para a variável líder x em termos das variáveis livres y e z para obter

$$x = 4 + 5y - \mathrm{z}$$

A partir dessa equação, vemos que podemos atribuir quaisquer valores às variáveis livres, digamos, $y = s$, $z = t$, que, então, determinam o valor de x. Assim, o conjunto de soluções pode ser dado parametricamente por

$$x = 4 + 5s - t, \quad y = s, \quad z = t \quad ◀ \tag{2}$$

Fórmulas como (2), que expressam o conjunto das soluções de um sistema linear de forma paramétrica, têm um nome especial.

Os parâmetros de uma solução geral costumam ser denotados pelas letras r, s, t, ..., mas também podemos usar quaisquer letras que não entrem em conflito com os nomes das variáveis. Em sistemas com mais do que três incógnitas, é conveniente usar índices para os parâmetros, como $t_1, t_2, t_3, \ldots$.

DEFINIÇÃO 1 Se um sistema linear tem uma infinidade de soluções, então um conjunto de equações paramétricas é denominado uma ***solução geral*** do sistema se, a partir dessas equações, puderem ser obtidas todas as soluções pela substituição dos parâmetros por valores numéricos.

Métodos de eliminação

Acabamos de ver como é fácil resolver um sistema de equações lineares tão logo sua matriz aumentada estiver em forma escalonada reduzida por linhas. Agora daremos um ***procedimento de eliminação*** passo a passo, que pode ser usado para reduzir qualquer matriz à forma escalonada reduzida. À medida que enunciamos cada passo, ilustramos a ideia reduzindo a matriz seguinte à forma escalonada reduzida por linhas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Passo 1. Localizamos a coluna mais à esquerda que não seja constituída inteiramente de zeros.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Coluna não nula mais à esquerda

Passo 2. Permutamos a primeira linha com uma outra linha, se necessário, para obter uma entrada não nula ao topo da coluna encontrada no Passo 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Foram permutadas a primeira e a segunda linhas da matriz precedente.

Passo 3. Se a entrada que agora está no topo da coluna encontrada no Passo 1 é a, multiplicamos a primeira linha inteira por $1/a$ para introduzir um pivô.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

A primeira linha da matriz precedente foi multiplicada por $\frac{1}{2}$.

Passo 4. Somamos múltiplos convenientes da primeira linha às linhas inferiores para obter zeros em todas as entradas abaixo do pivô.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

-2 vezes a primeira linha da matriz precedente foi somada à terceira linha.

Passo 5. Agora escondemos a primeira linha da matriz e recomeçamos aplicando o Passo 1 à submatriz resultante. Continuamos dessa maneira até que *toda* a matriz esteja em forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Coluna não nula mais à esquerda da submatriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

A primeira linha da submatriz foi multiplicada por $-\frac{1}{2}$ para introduzir um pivô.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

← -5 vezes a primeira linha da submatriz foi somada à segunda linha da submatriz para introduzir um zero debaixo do pivô.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

← A linha superior da submatriz foi tratada e retornamos ao Passo 1.

↑ **Coluna não nula mais à esquerda da nova submatriz**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

← A primeira (e única) linha da nova submatriz foi multiplicada por 2 para introduzir um pivô.

Agora *toda* a matriz está em forma escalonada. Para obter a forma escalonada reduzida por linhas, precisamos de mais um passo.

Passo 6. Começando com a última linha não nula e trabalhando para cima, somamos múltiplos convenientes de cada linha às linhas superiores para introduzir zeros acima dos líderes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

← $\frac{7}{2}$ vezes a terceira linha da matriz precedente foi somada à segunda linha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

← -6 vezes a terceira linha foi somada à primeira linha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

← 5 vezes a segunda linha foi somada à primeira linha.

A última matriz está na forma escalonada reduzida por linhas.

O procedimento (ou algoritmo) que acabamos de descrever, que reduz uma matriz à forma escalonada reduzida por linhas, é denominado ***eliminação de Gauss-Jordan***. Esse algoritmo consiste em duas partes: uma ***fase para a frente***, ou ***direta***, na qual os zeros são introduzidos abaixo dos pivôs; e uma ***fase para trás***, ou ***inversa***, em que os zeros são



Carl Friedrich Gauss (1777–1855)



Wilhelm Jordan (1842–1899)

Nota histórica Embora versões do método da eliminação gaussiana fossem conhecidas muito antes, o poder desse método só foi reconhecido quando o grande matemático alemão Karl Friedrich Gauss o utilizou para calcular a órbita do asteroide Ceres a partir de dados muito limitados. O que aconteceu foi isso: em 1° de janeiro de 1801, o astrônomo siciliano Giuseppe Piazzi (1746–1826) observou um pequeno objeto celeste que ele acreditou que pudesse ser um "planeta que faltava". Ele designou o objeto por Ceres e fez um número limitado de medições sobre sua posição antes de perdê-lo de vista, dada sua proximidade ao Sol. Gauss tomou a si a tarefa de calcular a órbita a partir dos dados muito limitados com o procedimento que agora denominamos eliminação gaussiana. O trabalho de Gauss causou uma sensação quando Ceres reapareceu, um ano depois, na constelação Virgem, praticamente na posição exata predita por Gauss! O método foi subsequentemente popularizado pelo engenheiro alemão Wilhelm Jordan em seu livro de geodesia (a ciência de medir as formas terrestres), intitulado *Handbuch der Vermessungskunde*, publicado em 1888.

[Imagens: Coleção Granger (Gauss) e wikipedia (Jordan)]

introduzidos acima dos pivôs. Se usarmos somente a fase direta, então o procedimento, denominado ***eliminação gaussiana***, produz uma forma escalonada por linhas. Por exemplo, nos cálculos precedentes, obtivemos uma matriz em forma escalonada reduzida por linhas no final do Passo 5.

▶ EXEMPLO 5 Eliminação de Gauss-Jordan

Resolva por eliminação de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\quad + 2x_5 \qquad\quad &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 \qquad\quad + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 \qquad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned}$$

Solução A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Somando -2 vezes a primeira linha à segunda e à quarta linhas, dá

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a segunda linha por -1 e depois somando -5 vezes a nova segunda linha à terceira linha e -4 vezes a nova segunda linha à quarta linha, dá

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Permutando as terceira e quarta linhas e então multiplicando a terceira linha da matriz resultante por $\frac{1}{6}$, dá a forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Isso completa a fase direta, pois não há zeros abaixo dos pivôs.

Somando -3 vezes a terceira linha à segunda linha e depois somando 2 vezes a segunda linha da matriz resultante à primeira linha, obtemos a forma escalonada reduzida por linhas

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Isso completa a fase inversa, pois não há zeros acima dos pivôs.

O sistema de equações correspondente é

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \quad\quad + 4x_4 + 2x_5 \quad\quad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \quad\quad\quad\quad &= 0 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned} \tag{3}$$

Observe que, na construção do sistema linear em (3), ignoramos a linha toda constituída de zeros na matriz aumentada correspondente. Por que podemos fazer isso?

Resolvendo para as variáveis líderes, obtemos

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Finalmente, expressamos a solução geral do sistema parametricamente associando os valores arbitrários r, s e t às variáveis livres x_2, x_4 e x_5, respectivamente. Isso fornece

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \tfrac{1}{3}$$ ◀

Sistemas lineares homogêneos

Um sistema de equações lineares é dito ***homogêneo*** se os termos constantes são todos zero; ou seja, o sistema tem a forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Cada sistema de equações lineares homogêneo é consistente, pois todos esses sistemas têm $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ como uma solução. Essa solução é denominada ***solução trivial*** ou ***solução nula***; quaisquer outras solução, se as houver, são ditas ***não triviais***.

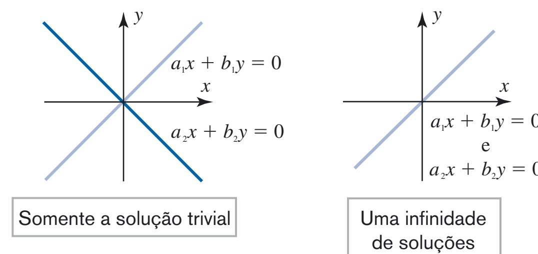
Como um sistema linear homogêneo sempre tem a solução trivial, só há duas possibilidades para suas soluções.

- O sistema tem somente a solução trivial.
- O sistema tem uma infinidade de soluções além da solução trivial.

No caso especial de um sistema linear homogêneo de duas equações em duas incógnitas, digamos

$$a_1x + b_1y = 0 \quad (\boldsymbol{a_1, b_1} \textbf{ não ambas nulas})$$
$$a_2x + b_2y = 0 \quad (\boldsymbol{a_2, b_2} \textbf{ não ambas nulas})$$

os gráficos das equações são retas pela origem, e a solução trivial corresponde ao ponto de corte na origem (Figura 1.2.1).



▶ **Figura 1.2.1**

Há um caso em que pode ser garantido que um sistema homogêneo tenha soluções não triviais, a saber, sempre que o sistema envolva mais incógnitas que equações. Para ver o motivo disso, considere o exemplo seguinte de quatro equações em seis incógnitas.

▶ EXEMPLO 6 Um sistema homogêneo

Resolva o seguinte sistema homogêneo com eliminação de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\quad + 2x_5 \qquad\quad &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= 0 \\ 5x_3 + 10x_4 \qquad\quad + 15x_6 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 \qquad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Solução Inicialmente, observe que os coeficientes das incógnitas desse sistema são iguais àqueles do Exemplo 5, ou seja, os dois sistemas diferem apenas pelas constantes do lado direito. A matriz aumentada do sistema homogêneo dado é

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

que é igual à matriz aumentada do sistema do Exemplo 5, exceto pelos zeros na última coluna. Assim, a forma escalonada reduzida dessa matriz é igual à da matriz aumentada do Exemplo 5, exceto pela última coluna. Contudo, pensando um pouco, podemos concluir que uma coluna de zeros não é alterada por qualquer operação elementar com as linhas, de modo que a forma escalonada reduzida de (5) é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

O sistema de equações correspondente é

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad + 4x_4 + 2x_5 \qquad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \qquad\qquad &= 0 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo para as variáveis líderes, obtemos

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Associando, agora, os valores arbitrários r, s e t às variáveis livres x_2, x_4 e x_5, respectivamente, podemos expressar o conjunto de soluções parametricamente por

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, x_6 = 0$$

Note que a solução trivial é obtida com $r = s = t = 0$. ◀

Variáveis livres em sistemas lineares homogêneos

O Exemplo 6 ilustra dois aspectos importantes sobre a resolução de sistemas lineares homogêneos.

1. Nenhuma operação elementar com as linhas altera uma coluna de zeros de uma matriz, de modo que a forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada de um sistema homogêneo tem uma coluna final de zeros. Isso implica que o sistema linear correspondente à forma escalonada reduzida é homogêneo, exatamente como o sistema original.
2. Quando construímos o sistema linear homogêneo correspondente à matriz aumentada (6), ignoramos a linha de zeros, porque a equação correspondente

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 0$$

não impõe condição alguma sobre as incógnitas. Assim, dependendo da forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada de um sistema linear homogêneo ter ou não

alguma linha de zeros, o número de equações no sistema correspondente à forma escalonada reduzida é menor do que, ou igual a, o número de equações do sistema original.

Agora considere um sistema linear homogêneo em n incógnitas e suponha que a forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema tenha r linhas não nulas. Como cada linha não nula tem um pivô, e como a cada pivô corresponde uma variável líder, o sistema homogêneo correspondente à forma escalonada reduzida da matriz aumentada deve ter r variáveis líderes e $n - r$ variáveis livres. Assim, o sistema é da forma

$$\begin{array}{llll} x_{k_1} & & & + \sum(\ ) = 0 \\ & x_{k_2} & & + \sum(\ ) = 0 \\ & & \ddots & \quad\vdots \\ & & & x_{k_r} + \sum(\ ) = 0 \end{array} \tag{8}$$

em que, em cada equação, $\Sigma(\ )$ denota uma soma que envolve as variáveis livres, se houver [ver, por exemplo, (7)]. Resumindo, temos o resultado a seguir.

TEOREMA 1.2.1 Teorema das variáveis livres de sistemas homogêneos

Se um sistema linear homogêneo tiver n incógnitas e se a forma escalonada reduzida de sua matriz aumentada tiver r linhas não nulas, então o sistema tem $n - r$ variáveis livres.

O Teorema 1.2.1 tem uma consequência importante para sistemas lineares homogêneos com mais incógnitas do que equações. Mais precisamente, se um sistema linear homogêneo tiver m equações em n incógnitas, e se $m < n$, então também é verdade que $r < n$ (por quê?). Nesse caso, o teorema implica que há pelo menos uma variável livre, e isso implica que o sistema tem uma infinidade de soluções. Assim, temos o resultado seguinte.

Note que o Teorema 1.2.2 é aplicável somente a sistemas homogêneos. Um sistema que *não é homogêneo* com mais incógnitas que equações não precisa ser consistente. No entanto, provaremos adiante que se um sistema não homogêneo com mais incógnitas do que equações for consistente, então o sistema terá uma infinidade de soluções.

TEOREMA 1.2.2 *Um sistema linear homogêneo com mais incógnitas que equações tem uma infinidade de soluções.*

Em retrospecto, poderíamos ter antecipado que o sistema homogêneo do Exemplo 6 tem uma infinidade de soluções, por ter quatro equações e seis incógnitas.

Eliminação gaussiana e retrossubstituição

A eliminação de Gauss-Jordan (redução à forma escalonada reduzida por linhas) é um procedimento útil com sistemas lineares pequenos que são resolvidos a mão (como a maioria dos sistemas deste texto). Contudo, com sistemas lineares grandes, que exigem utilização de computadores, em geral é mais eficiente usar a eliminação gaussiana (redução à forma escalonada por linhas), seguida por uma técnica conhecida por substituição inversa, ou ***retrossubstituição***, para completar o processo de resolução do sistema. O próximo exemplo ilustra essa ideia.

▶ EXEMPLO 7 O Exemplo 5 resolvido por retrossubstituição

Pelas contas do Exemplo 5, uma forma escalonada da matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver o sistema de equações correspondente

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \quad\quad + 2x_5 \quad\quad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \quad\quad + 3x_6 &= 1 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

procedemos como segue.

Passo 1. Resolva as equações para as variáveis líderes.

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= 1 - 2x_4 - 3x_6 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Passo 2. Começando com a equação de baixo e trabalhando para cima, substitua sucessivamente cada equação em todas as equações acima dela.

Substituindo $x_6 = \frac{1}{3}$ na segunda equação, dá

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Substituindo $x_3 = -2x_4$ na primeira equação, dá

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Passo 3. Atribua valores arbitrários às variáveis livres, se houver.

Atribuindo os valores arbitrários r, s e t a x_2, x_4 e x_5, respectivamente, a solução geral é dada pelas fórmulas

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \tfrac{1}{3}$$

Isso confere com a solução obtida no Exemplo 5.

▶ EXEMPLO 8

Suponha que as matrizes dadas sejam matrizes aumentadas de sistemas lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3 e x_4. Todas essas matrizes estão em forma escalonada por linhas, mas não reduzida. Discuta a existência e unicidade de soluções dos sistemas lineares correspondentes.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução (*a*) A última linha corresponde à equação

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$$

a partir da qual é evidente que o sistema é inconsistente.

Solução (*b*) A última linha corresponde à equação

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$$

que não afeta o conjunto de soluções. Nas três equações restantes, as variáveis x_1, x_2 e x_3 correspondem a pivôs e, portanto, são variáveis líderes. A variável x_4 é uma variável

livre. Com alguma álgebra, podemos expressar as variáveis líderes em termos da variável livre e, à variável livre, podemos associar qualquer valor. Assim, o sistema deve ter uma infinidade de soluções.

Solução (c) A última linha corresponde à equação

$$x_4 = 0$$

que nos dá um valor numérico para x_4. Substituindo esse valor na terceira equação, a saber,

$$x_3 + 6x_4 = 9$$

obtemos $x_3 = 9$. Agora, é possível ver que podemos continuar esse processo e substituir os valores conhecidos de x_3 e x_4 na equação correspondente à segunda linha, obtendo um valor numérico único para x_2 e, finalmente, substituir os valores conhecidos de x_4 x_3 e x_2 na equação correspondente à primeira linha para obter um valor numérico único para x_1. Assim, o sistema tem uma solução única. ◀

Alguns fatos sobre as formas escalonadas

É importante conhecer três fatos sobre as formas escalonadas e escalonadas reduzidas, como segue, mas que não serão demonstrados.

1. Toda matriz tem uma única forma escalonada reduzida por linhas; ou seja, independentemente de utilizar eliminação de Gauss-Jordan ou uma outra sequência qualquer de operações elementares, no final sempre chegamos à mesma forma escalonada reduzida por linhas.[1]
2. As formas escalonadas por linhas não são únicas, ou seja, diferentes sequências de operações com linhas podem resultar em formas escalonadas diferentes.
3. Embora as formas escalonadas por linhas não sejam únicas, todas as formas escalonadas por linhas de uma matriz A têm o mesmo número de linhas nulas, e os pivôs sempre ocorrem na mesma posição das formas escalonadas por linhas de A. Essas posições são denominadas ***posições de pivô*** de A. Dizemos que uma coluna que contenha uma posição de pivô é uma ***coluna de pivô*** de A.

▶ EXEMPLO 9 Posição e coluna de pivô

Anteriormente, nesta seção (imediatamente depois da Definição 1), obtivemos uma forma escalonada de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

a saber,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Os pivôs ocorrem nas posições (linha 1, coluna 1), (linha 2, coluna 3) e (linha 3, coluna 5). Essas são as posições de pivô. As colunas de pivô são as colunas 1, 3 e 5. ◀

Erro de arredondamento e instabilidade

Muitas vezes, há uma lacuna entre a teoria matemática e sua implementação prática, e as eliminações gaussiana e de Gauss-Jordan são bons exemplos disso. O problema é que os

[1] Uma prova desse resultado pode ser encontrada no artigo "The Reduced Row Echeleon Form of a Matrix Is Unique: A Simple Proof", de Thomas Yuster, em *Mathematics Magazine*, Vol. 57, No. 2, 1984, páginas 93-94.

computadores em geral aproximam os números e, com isso, introduzem erros de ***arredondamento***; esses erros podem se propagar em contas sucessivas e podem acabar corrompendo uma resposta a ponto de torná-la inútil, a menos que sejam tomadas precauções. Os algoritmos (procedimentos) em que isso pode ocorrer são ditos ***instáveis***. Existem várias técnicas para minimizar os erros de arredondamento e a instabilidade. Por exemplo, pode ser mostrado que, para sistemas lineares grandes, a eliminação de Gauss-Jordan envolve aproximadamente 50% a mais de operações do que a eliminação gaussiana; por isso, a maioria dos algoritmos de computador tem por base a eliminação gaussiana. Alguns desses tópicos serão considerados no Capítulo 9.

Revisão de conceitos

- Forma escalonada reduzida por linhas
- Forma escalonada por linhas
- Pivô
- Variável líder
- Variável livre
- Solução geral de um sistema linear
- Eliminação gaussiana
- Eliminação de Gauss-Jordan
- Fase direta, para frente
- Fase inversa, para trás
- Sistema linear homogêneo
- Solução trivial
- Solução não trivial
- Teorema das variáveis livres de sistemas homogêneos
- Retrossubstituição

Aptidões desenvolvidas

- Reconhecer se uma dada matriz está em forma escalonada, forma escalonada reduzida ou nenhuma dessas.
- Construir soluções de sistemas lineares cuja matriz aumentada correspondente está em forma escalonada ou escalonada reduzida.
- Usar a eliminação gaussiana para encontrar a solução geral de um sistema linear.
- Usar a eliminação de Gauss-Jordan para encontrar a solução geral de um sistema linear.
- Analisar sistemas lineares homogêneos usando o teorema das variáveis livres de sistemas homogêneos.

Conjunto de exercícios 1.2

1. Em cada parte, determine se a matriz está em forma escalonada, em forma escalonada reduzida, ambas ou nenhuma.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

2. Em cada parte, determine se a matriz está em forma escalonada, em forma escalonada reduzida, ambas ou nenhuma.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

3. Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares tenha sido reduzida à dada forma escalonada por meio de operações elementares sobre as linhas. Resolva o sistema.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares tenha sido reduzida à dada forma escalonada por meio de operações elementares sobre as linhas. Resolva o sistema.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **5–8**, resolva o sistema linear por eliminação de Gauss-Jordan. ◀

5. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x - 3w &= -3 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} -2b + 3c &= 1 \\ 3a + 6b - 3c &= -2 \\ 6a + 6b + 3c &= 5 \end{aligned}$

▶ Nos Exercícios **9–12**, resolva o sistema linear por eliminação gaussiana. ◀

9. Exercício 5

10. Exercício 6

11. Exercício 7

12. Exercício 8

▶ Nos Exercícios **13–16**, sem utilizar papel e lápis, determine se o sistema homogêneo tem soluções não triviais. ◀

13. $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - 8x_3 + 9x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - 8x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 6x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$

▶ Nos Exercícios **17–24**, resolva o sistema linear dado por qualquer método. ◀

17. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 0 \\ -x + 2y - 3z &= 0 \\ x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} v + 3w - 2x &= 0 \\ 2u + v - 4w + 3x &= 0 \\ 2u + 3v + 2w - x &= 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x &= 0 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 0 \\ w - y - 3z &= 0 \\ 2w + 3x + y + z &= 0 \\ -2w + x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} 2I_1 - I_2 + 3I_3 + 4I_4 &= 9 \\ I_1 - 2I_3 + 7I_4 &= 11 \\ 3I_1 - 3I_2 + I_3 + 5I_4 &= 8 \\ 2I_1 + I_2 + 4I_3 + 4I_4 &= 10 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} Z_3 + Z_4 + Z_5 &= 0 \\ -Z_1 - Z_2 + 2Z_3 - 3Z_4 + Z_5 &= 0 \\ Z_1 + Z_2 - 2Z_3 - Z_5 &= 0 \\ 2Z_1 + 2Z_2 - Z_3 + Z_5 &= 0 \end{aligned}$

▶ Nos Exercícios **25–28**, determine os valores de a com os quais o sistema não tem solução, tem exatamente uma solução ou tem uma infinidade de soluções. ◀

25. $\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x - 2y + 3z &= 1 \\ x + 2y - (a^2 - 3)z &= a \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x + (a^2 - 5)y &= a - 1 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} x + y + 7z &= -7 \\ 2x + 3y + 17z &= -16 \\ x + 2y + (a^2 + 1)z &= 3a \end{aligned}$

▶ Nos Exercícios 29–30, resolva o sistema dado, em que a, b e c são constantes. ◀

29. $$\begin{aligned} 2x + y &= a \\ 3x + 6y &= b \end{aligned}$$

30. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 + 2x_3 &= b \\ 3x_2 + 3x_3 &= c \end{aligned}$$

31. Encontre duas formas escalonadas por linha diferentes de

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Esse exercício mostra que uma matriz pode ter formas escalonadas distintas.

32. Reduza

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -29 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

à forma escalonada reduzida sem introduzir frações em estágios intermediários.

33. Mostre que o sistema não linear a seguir tem 18 soluções se $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ e $0 \leq \gamma < 2\pi$.

$$\begin{aligned} 2\,\text{sen}\,\alpha + 2\cos\beta + 3\tan\gamma &= 0 \\ -\,\text{sen}\,\alpha + 5\cos\beta + 3\tan\gamma &= 0 \\ -\,\text{sen}\,\alpha - 5\cos\beta + 5\tan\gamma &= 0 \end{aligned}$$

[*Sugestão*: comece com as substituições $x = \text{sen}\,\alpha$, $y = \cos\beta$, e $z = \tan\gamma$.]

34. Resolva o seguinte sistema de equações não lineares nos ângulos incógnitos α, β e γ, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ e $0 \leq \gamma < \pi$.

$$\begin{aligned} 2\,\text{sen}\,\alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma &= 3 \\ 4\,\text{sen}\,\alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma &= 2 \\ 6\,\text{sen}\,\alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma &= 9 \end{aligned}$$

35. Resolva o seguinte sistema de equações não lineares para x, y e z.

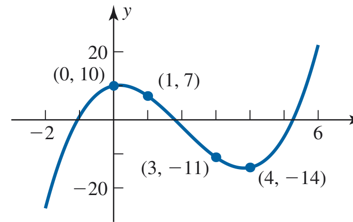
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 6 \\ x^2 - y^2 + 2z^2 &= 2 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 &= 3 \end{aligned}$$

[*Sugestão*: comece com as substituições $X = x^2$, $Y = y^2$, $Z = z^2$.]

36. Resolva o sistema a seguir para x, y e z.

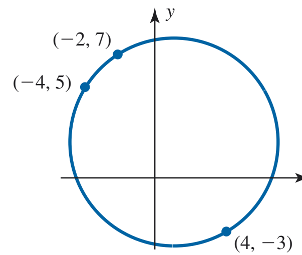
$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} &= 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{8}{z} &= 0 \\ -\frac{1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{10}{z} &= 5 \end{aligned}$$

37. Encontre os coeficientes a, b, c e d tais que a curva mostrada na figura seja o gráfico da equação $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



◀ **Figura Ex-37**

38. Encontre os coeficientes a, b, c e d tais que a curva mostrada na figura seja dada pela equação $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$.



◀ **Figura Ex-38**

39. Se o sistema linear

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x - b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y - c_3z &= 0 \end{aligned}$$

tiver somente a solução trivial, o que pode ser dito sobre as soluções do sistema a seguir?

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 3 \\ a_2x - b_2y + c_2z &= 7 \\ a_3x + b_3y - c_3z &= 11 \end{aligned}$$

40. (a) Se A for uma matriz com três linhas e cinco colunas, qual é o número máximo possível de pivôs em sua forma escalonada reduzida?

(b) Se B for uma matriz com três linhas e seis colunas, cuja última coluna só tem zeros, qual é o número máximo possível de parâmetros da solução geral do sistema linear cuja matriz aumentada é B?

(c) Se C for uma matriz com cinco linhas e três colunas, qual é o número mínimo possível de linhas inteiras de zeros em qualquer forma escalonada de C?

41. (a) Mostre que se $ad - bc \neq 0$, então a forma escalonada reduzida por linhas de

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Use o resultado da parte (a) para mostrar que se $ad - bc \neq 0$, então o sistema linear

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ cx + dy &= l \end{aligned}$$

tem exatamente uma solução.

42. Considere o sistema de equações

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \\ ex + fy &= 0 \end{aligned}$$

Discuta as posições relativas das retas $ax + by = 0$ e $cx + dy = 0$ e $ex + fy = 0$ se (a) o sistema tiver apenas a solução trivial e (b) o sistema tiver soluções não triviais.

43. Descreva todas as formas escalonadas reduzidas possíveis de

(a) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{bmatrix}$

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(i), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se uma matriz estiver em forma escalonada reduzida por linhas, então também estará em forma escalonada por linhas.

(b) Se efetuarmos uma operação elementar com as linhas de uma matriz em forma escalonada, a matriz resultante ainda estará em forma escalonada.

(c) Cada matriz tem uma única forma escalonada por linhas.

(d) Um sistema linear homogêneo em n incógnitas cuja matriz aumentada correspondente tem uma forma escalonada reduzida com r pivôs tem $n - r$ variáveis livres.

(e) Todos os pivôs de uma matriz em forma escalonada por linhas devem ocorrer em colunas distintas.

(f) Se cada coluna de uma matriz em forma escalonada por linhas tiver um pivô, então cada entrada que não for um pivô será nula.

(g) Se um sistema linear homogêneo de n equações em n incógnitas tiver uma matriz aumentada correspondente com uma forma escalonada reduzida com n pivôs, então o sistema linear só tem a solução trivial.

(h) Se a forma escalonada reduzida de uma matriz aumentada de um sistema linear tiver uma linha de zeros, então o sistema deve ter uma infinidade de soluções.

(i) Se um sistema linear tem mais incógnitas do que equações, então o sistema deve ter uma infinidade de soluções.

1.3 Matrizes e operações matriciais

Coleções retangulares de números reais aparecem em muitos contextos, não só como a matriz aumentada de um sistema de equações lineares. Nesta seção, começamos a estudar matrizes como objetos independentes, definindo sobre elas as operações de adição, subtração e multiplicação.

Notação e terminologia matricial

Na Seção 1.2, usamos coleções retangulares de números, denominadas *matrizes aumentadas*, para abreviar a escrita de sistemas de equações lineares. Contudo, essas coleções retangulares de números ocorrem também em outros contextos. Por exemplo, a seguinte coleção retangular de três linhas e sete colunas pode descrever o número de horas que um estudante gastou estudando três matérias numa certa semana.

	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	Sáb.	Dom.
Matemática	2	3	2	4	1	4	2
História	0	3	1	4	3	2	2
Línguas	4	1	3	1	0	0	2

Suprimindo os títulos, ficamos com a seguinte coleção retangular de números com três linhas e sete colunas, denominada "matriz".

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Mais geralmente, fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1 Uma ***matriz*** é um agrupamento retangular de números. Dizemos que os números nesse agrupamento são as ***entradas*** da matriz.

Uma matriz com somente uma coluna é denominada ***matriz coluna***, ou ***vetor coluna***, e uma matriz com somente uma linha é denominada ***matriz linha***, ou ***vetor linha***. No Exemplo 1, a matriz 2×1 é um vetor coluna, a matriz 1×4 é um vetor linha e a matriz 1×1 é um vetor coluna e também um vetor linha.

▶ EXEMPLO 1 Exemplos de matrizes

Alguns exemplos de matrizes são

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad [2 \quad 1 \quad 0 \quad -3], \quad \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [4]$$ ◀

O ***tamanho*** de uma matriz é descrito em termos do número de linhas (fileiras horizontais) e de colunas (fileiras verticais) que ela contém. Por exemplo, a primeira matriz do Exemplo 1 tem três linhas e duas colunas, portanto, seu tamanho é 3 por 2 (e escrevemos 3×2). Numa descrição de tamanho, o primeiro número sempre denota o número de linhas e o segundo, o de colunas. As outras matrizes do Exemplo 1 têm tamanhos 1×4, 3×3, 2×1 e 1×1, respectivamente.

Utilizamos letras maiúsculas para denotar matrizes e letras minúsculas para denotar quantidades numéricas; assim, podemos escrever

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Quando discutimos matrizes, é costume dizer que as quantidades numéricas são ***escalares***. Salvo menção explícita em contrário, *escalares são números reais*; escalares complexos serão considerados mais adiante no texto.

É prática comum omitir os colchetes de matrizes 1×1, tornando impossível saber, por exemplo, se o símbolo 4 denota o número "quatro" ou a matriz [4]. Isso raramente causa problemas, pois geralmente é possível ver a qual dos dois nos estamos referindo a partir do contexto.

A entrada que ocorre na linha i e coluna j de uma matriz A é denotada por 3×4. Assim, uma matriz arbitrária 3×4 pode ser escrita como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

e uma matriz arbitrária $m \times n$ como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Quando for desejada uma notação mais compacta, a matriz precedente pode ser escrita como

$$[a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{ou} \quad [a_{ij}]$$

sendo utilizada a primeira notação quando for importante, na argumentação, saber o tamanho da matriz, e a segunda quando o tamanho não necessitar ênfase. Em geral, combinamos a letra denotando a matriz com a letra denotando suas entradas; assim, para uma matriz B, costumamos usar b_{ij} para a entrada na linha i e na coluna j e para uma matriz C, usamos a notação c_{ij}.

A entrada na linha i e na coluna j de uma matriz A também é comumente denotada pelo símbolo $(A)_{ij}$. Assim, para a matriz (1) acima, temos

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

e, para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

temos $(A)_{11} = 2$, $(A)_{12} = -3$, $(A)_{21} = 7$ e $(A)_{22} = 0$.

Vetores linha e coluna são de importância especial, e é prática comum denotá-los por letras minúsculas em negrito em vez de letras maiúsculas. Para tais matrizes, é desnecessário usar índices duplos para as entradas. Assim, um vetor linha $1 \times n$ arbitrário **a** e um vetor coluna $m \times 1$ arbitrário **b** podem ser escritos como

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Dizemos que uma matriz A com n linhas e n colunas é uma ***matriz quadrada de ordem n*** e que as entradas destacadas $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ em (2) constituem a ***diagonal principal*** de A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Operações com matrizes

Até aqui, usamos matrizes para abreviar o trabalho de resolver sistemas de equações lineares. Para outras aplicações, contudo, é desejável desenvolver uma "aritmética de matrizes" na qual as matrizes podes ser somadas, subtraídas e multiplicadas de alguma maneira útil. O restante desta seção será dedicado a desenvolver essa aritmética.

DEFINIÇÃO 2 Duas matrizes são definidas como sendo ***iguais*** se tiverem o mesmo tamanho e suas entradas correspondentes forem iguais.

A igualdade de duas matrizes

$$A = [a_{ij}] \quad \text{e} \quad B = [b_{ij}]$$

de mesmo tamanho pode ser expressa escrevendo

$$(A)_{ij} = (B)_{ij}$$

ou, então,

$$a_{ij} = b_{ij}$$

entendendo-se que as igualdades são válidas com quaisquer valores de i e j.

▶ EXEMPLO 2 Igualdade de matrizes

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $x = 5$, então $A = B$, mas para todos os outros valores de x, as matrizes A e B não são iguais, pois nem todas as suas entradas coincidem. Não existe valor de x com o qual $A = C$, pois A e C têm tamanhos diferentes. ◀

DEFINIÇÃO 3 Se A e B são matrizes de mesmo tamanho, então a ***soma*** $A + B$ é a matriz obtida somando as entradas de B às entradas correspondentes de A, e a ***diferença*** $A - B$ é a matriz obtida subtraindo as entradas de B das entradas correspondentes de A. Matrizes de tamanhos distintos não podem ser somadas ou subtraídas.

Em notação matricial, se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ têm o mesmo tamanho, então

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{e} \quad (A - B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

▶ EXEMPLO 3 Adição e subtração

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Então

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A - B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

As expressões $A + C$, $B + C$, $A - C$ e $B - C$ não estão definidas. ◀

DEFINIÇÃO 4 Se A for uma matriz e c um escalar, então o ***produto*** cA é a matriz obtida pela multiplicação de cada entrada da matriz A por c. Dizemos que a matriz cA é um ***múltiplo escalar*** de A.

Em notação matricial, se $A = [a_{ij}]$, então

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$$

▶ EXEMPLO 4 Múltiplos escalares

Para as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

temos

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad (-1)B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \tfrac{1}{3}C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

É usual denotar $(-1)B$ por $-B$. ◀

Até aqui, definimos a multiplicação de uma matriz por um escalar, mas não a multiplicação de duas matrizes. Como as matrizes são somadas somando as entradas correspondentes e subtraídas subtraindo as entradas correspondentes, pareceria natural definir a multiplicação de matrizes multiplicando as entradas correspondentes. Contudo, ocorre que tal definição não seria muito útil na maioria dos problemas. A experiência levou os matemáticos à seguinte definição, muito mais útil, de multiplicação de matrizes.

DEFINIÇÃO 5 Se A for uma matriz $m \times r$ e B uma matriz $r \times n$, então o *produto* AB é a matriz $m \times n$ cujas entradas são determinadas como segue. Para obter a entrada na linha i e coluna j de AB, destacamos a linha i de A e a coluna j de B. Multiplicamos as entradas correspondentes da linha e da coluna e então somamos os produtos resultantes.

▶ EXEMPLO 5 Multiplicando matrizes

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Como A é uma matriz 2×3 e B é uma matriz 3×4, o produto AB é uma matriz 2×4. Para determinar, por exemplo, a entrada na linha 2 e coluna 3 de AB, destacamos a linha 2 de A e a coluna 3 de B. Então, como ilustrado, multiplicamos as entradas correspondentes e somamos esses produtos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & 26 & \square \end{bmatrix}$$

$$(2 \cdot 4) + (6 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = 26$$

A entrada na linha 1 e coluna 4 de AB é calculada como segue.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & 13 \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(1 \cdot 3) + (2 \cdot 1) + (4 \cdot 2) = 13$$

As contas para as demais entradas são

$$\begin{aligned} (1 \cdot 4) + (2 \cdot 0) + (4 \cdot 2) &= 12 \\ (1 \cdot 1) - (2 \cdot 1) + (4 \cdot 7) &= 27 \\ (1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (4 \cdot 5) &= 30 \\ (2 \cdot 4) + (6 \cdot 0) + (0 \cdot 2) &= 8 \\ (2 \cdot 1) - (6 \cdot 1) + (0 \cdot 7) &= -4 \\ (2 \cdot 3) + (6 \cdot 1) + (0 \cdot 2) &= 12 \end{aligned} \qquad AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$ ◀

A definição de multiplicação de matrizes exige que o número de colunas do primeiro fator A seja igual ao número de linhas do segundo fator B para que seja possível formar o produto AB. Se essa condição não for satisfeita, o produto não estará definido. Uma maneira conveniente de determinar se o produto de duas matrizes está ou não definido é escrever o tamanho do primeiro fator e, à direita, escrever o tamanho do segundo fator. Se, como em (3), os números internos coincidirem, então o produto estará definido.

$$\underset{m \times r}{A} \quad \underset{r \times n}{B} = \underset{m \times n}{AB} \tag{3}$$

Internos

Externos



Gotthold Eisenstein (1823–1852)

Nota histórica O conceito de multiplicação matricial é devido ao matemático alemão Gotthold Eisenstein, que introduziu a ideia em torno de 1844, para simplificar o processo de efetuar substituições em sistemas lineares. A ideia, então, foi expandida e formalizada por Cayley em sua obra *Memoir on the Theory of Matrices* (*Ensaio sobre a Teoria de Matrizes*), publicada em 1858. Eisenstein foi um aluno de Gauss, que o qualificou como sendo do nível de Isaac Newton e Arquimedes. Contudo, o potencial de Eisenstein nunca foi realizado, porque viveu doente toda sua vida e faleceu aos 30 anos.

[Imagem: Wikipedia]

► EXEMPLO 6 Determinando se um produto está definido

Suponha que A, B e C sejam matrizes de tamanhos

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 3\times 4 & 4\times 7 & 7\times 3 \end{array}$$

Então, por (3), o produto AB está definido e é uma matriz 3×7; BC está definido e é uma matriz 4×3, e CA está definido e é uma matriz 7×4. Os produtos AC, CB e BA não estão definidos. ◄

Em geral, se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $m \times r$ e $B = [b_{ij}]$ é uma matriz $r \times n$, então, conforme destacado em (4),

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix} \tag{4}$$

a entrada $(AB)_{ij}$ na linha i e coluna j de AB é dada por

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} \tag{5}$$

Matrizes em blocos

Uma matriz pode ser **particionada**, ou **subdividida**, em blocos de matrizes menores inserindo cortes horizontais e verticais entre linhas e colunas selecionadas. Por exemplo, as seguintes são três partições possíveis de uma matriz 3×4 arbitrária A: a primeira é uma partição de A em quatro ***submatrizes*** A_{11}, A_{12}, A_{21} e A_{22}; a segunda é uma partição de A em seus vetores linha $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, e $\mathbf{r}_3$; a terceira é uma partição de A em seus vetores coluna $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ e $\mathbf{c}_4$.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 \quad \mathbf{c}_4]$$

Multiplicação matricial por colunas e linhas

A partição de matrizes em blocos tem muitas utilidades, uma das quais sendo encontrar uma linha ou coluna específica de um produto matricial AB sem calcular todo o produto. Mais especificamente, as fórmulas seguintes, cujas provas são deixadas como exercício, mostram como vetores coluna individuais de AB podem ser obtidos particionando B em

vetores colunas e como vetores linha individuais de AB podem ser obtidos particionando A em vetores linha.

$$AB = A[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_n] = [A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{b}_n] \tag{6}$$

(AB calculado coluna a coluna)

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 B \\ \mathbf{a}_2 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m B \end{bmatrix} \tag{7}$$

(AB calculado linha a linha)

Em palavras, essas fórmula afirmam que

$$j\text{-ésimo vetor coluna de } AB = A\,[j\text{-ésimo vetor coluna de } B] \tag{8}$$

$$i\text{-ésimo vetor linha de } AB = [i\text{-ésimo vetor linha de } A]B \tag{9}$$

▶ EXEMPLO 7 De novo o Exemplo 5

Se A e B são as matrizes do Exemplo 5, então, por (8), o segundo vetor coluna de AB pode ser obtido calculando

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Segunda coluna de B — Segunda coluna de AB

e, por (9), o primeiro vetor linha de AB pode ser obtido calculando

$$[1 \quad 2 \quad 4] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = [12 \quad 27 \quad 30 \quad 13]$$

Primeira linha de B — Primeira linha de AB ◀

Produtos matriciais como combinações lineares

Discutimos três métodos para calcular um produto matricial AB, a saber, entrada por entrada, coluna por coluna e linha por linha. A definição seguinte fornece mais uma maneira de ver o produto matricial.

DEFINIÇÃO 6 Se $A_1, A_2, \ldots, A_r$ são matrizes de mesmo tamanho e se $c_1, c_2, \ldots, c_r$ são escalares, então uma expressão da forma

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_rA_r$$

é denominada ***combinação linear*** de $A_1, A_2, \ldots, A_r$ com ***coeficientes*** $c_1, c_2, \ldots, c_r$.

Para ver como o produto de matrizes pode ser visto como uma combinação linear, sejam A uma matriz $m \times n$ e $\mathbf{x}$ um vetor coluna $n \times 1$, digamos,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Então

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{11}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Isso prova o teorema seguinte.

TEOREMA 1.3.1 *Sejam A uma matriz $m \times n$ e $\mathbf{x}$ um vetor coluna $n \times 1$. Então o produto $A\mathbf{x}$ pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores coluna de A em que os coeficientes são as entradas de $\mathbf{x}$.*

► EXEMPLO 8 Produto matricial como combinação linear

A matriz produto

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

pode ser escrita como a combinação linear dos vetores coluna

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

► EXEMPLO 9 Colunas de um produto matricial como combinações lineares

Mostramos no Exemplo 5 que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

Segue da fórmula (6) e do Teorema 1.3.1 que o j-ésimo vetor coluna de AB pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores coluna de A em que os coeficientes da combinação linear são as entradas da j-ésima coluna de B. As contas são as seguintes.

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

Forma matricial de um sistema linear

A multiplicação matricial tem uma importante aplicação a sistemas de equações lineares. Considere um sistema de m equações lineares em n incógnitas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Como duas matrizes são iguais se, e somente se, suas entradas correspondentes são iguais, podemos substituir as m equações desse sistema por uma única equação matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A matriz $m \times 1$ à esquerda dessa equação pode ser escrita como um produto, resultando

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Denotando essas matrizes por A, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$, respectivamente, o sistema original de m equações em n incógnitas pode ser substituído pela única equação matricial

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

A matriz A nesta equação é denominada ***matriz de coeficientes*** do sistema. A ***matriz aumentada*** do sistema é obtida pela adjunção de $\mathbf{b}$ a A como a última coluna; assim, a matriz aumentada é

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

A barra vertical em $[A \mid \mathbf{b}]$ é só uma maneira conveniente de visualmente separar A de $\mathbf{b}$, não tendo significado matemático.

Transposta de uma matriz

Concluímos esta seção definindo duas operações matriciais que não têm análogos na aritmética de números reais.

DEFINIÇÃO 7 Se A for uma matriz $m \times n$ qualquer, então a ***transposta de A***, denotada por A^T, é definida como a matriz $n \times m$ que resulta da troca das linhas com as colunas de A; ou seja, a primeira coluna de A^T é a primeira linha de A, a segunda coluna de A^T é a segunda linha de A, e assim por diante.

▶ EXEMPLO 10 Algumas transpostas

Alguns exemplos de matrizes e suas transpostas são os seguintes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 3 \quad 5], \quad D = [4]$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{31} \\ a_{14} & a_{24} & a_{31} \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad D^T = [4] \quad ◀$$

Observe que não só as colunas de A^T são as linhas de A, mas também as linhas de A^T são as colunas de A. Assim, a entrada na linha i e coluna j de A^T é a entrada na linha j e coluna i de A; ou seja,

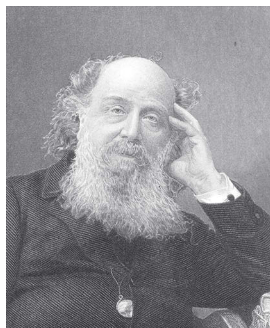
$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji} \tag{11}$$

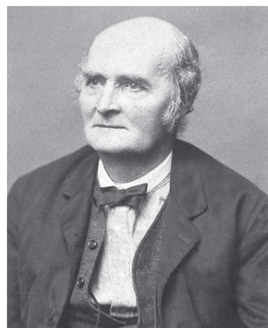
Observe a reversão de índices.

No caso especial em que a matriz A é uma matriz quadrada, a transposta de A pode ser obtida pela troca das entradas posicionadas simetricamente em relação à diagonal principal. Em (12), podemos ver que A^T também pode ser obtida "refletindo" A em torno de sua diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Permutamos entradas posicionadas simetricamente em relação à diagonal principal.


James Sylvester (1814–1897)


Arthur Cayley (1821–1895)

Nota histórica O termo *matriz* foi usado pela primeira vez pelo matemático inglês James Sylvester, que definiu o termo em 1850 como "um arranjo oblongo de números". Sylvester comunicou seu trabalho com matrizes ao colega matemático e advogado inglês chamado Arthur Cayley, que então introduziu algumas das operações matriciais básicas num livro intitulado *Memoir on the Theory of Matrices* (*Ensaio sobre a Teoria de Matrizes*), publicado em 1858. Como curiosidade, Sylvester nunca se formou, porque, sendo judeu, recusou-se a assinar o exigido juramento à igreja Anglicana. Ele foi nomeado para uma cátedra na University of Virginia, nos Estados Unidos, mas renunciou depois de espancar com sua bengala um aluno que estava lendo um jornal em aula. Sylvester, pensando que havia matado o aluno, fugiu de volta para a Inglaterra no primeiro navio disponível. Felizmente, o aluno não morreu, só estava em choque!

[Imagem: Coleção Granger, Nova York]

DEFINIÇÃO 8 Se A for uma matriz quadrada, então o ***traço de A***, denotado por tr(A), é definido pela soma das entradas na diagonal principal de A. O traço de A não é definido se A não for uma matriz quadrada.

▶ EXEMPLO 11 Traço de uma matriz

Alguns exemplos de matrizes e seus traços são os seguintes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} \qquad \text{tr}(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11$$ ◀

Nos exercícios, desenvolvemos alguma prática com as operações de transposição e traço.

Revisão de conceitos

- Matriz
- Entradas
- Vetor coluna (ou matriz coluna)
- Vetor linha (ou matriz linha)
- Matriz quadrada
- Diagonal principal
- Matrizes iguais
- Operações matriciais: soma, diferença, multiplicação por escalar
- Combinação linear de matrizes
- Produto de matrizes (multiplicação matricial)
- Matriz em blocos
- Submatrizes
- Método linha-coluna
- Método das colunas
- Método das linhas
- Matriz de coeficientes de um sistema linear
- Transposta
- Traço

Aptidões desenvolvidas

- Determinar o tamanho de uma dada matriz.
- Identificar os vetores linha e coluna de uma dada matriz.
- Efetuar as operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação por escalar e produto de matrizes.
- Determinar se está definido o produto de duas matrizes.
- Calcular um produto matricial usando os métodos linha-coluna, das colunas e das linhas.
- Expressar o produto de uma matriz com um vetor coluna como uma combinação linear das colunas da matriz.
- Expressar um sistema linear como uma equação matricial e identificar a matriz de coeficientes.
- Calcular a transposta de uma matriz.
- Calcular o traço de uma matriz quadrada.

Conjunto de exercícios 1.3

1. Suponha que A, B, C, D e E sejam matrizes de tamanhos

A	B	C	D	E
(4×5)	(4×5)	(5×2)	(4×2)	(5×4)

Em cada parte, determine se a expressão matricial dada está definida. Para as que estão definidas, dê o tamanho da matriz resultante.

(a) BA (b) $AC + D$ (c) $AE + B$
(d) $AB + B$ (e) $E(A + B)$ (f) $E(AC)$
(g) E^TA (h) $(A^T + E)D$

2. Suponha que A, B, C, D e E sejam matrizes de tamanhos

A	B	C	D	E
(3×1)	(3×6)	(6×2)	(2×6)	(1×3)

Em cada parte, determine se a expressão matricial dada está definida. Para as que estão definidas, dê o tamanho da matriz resultante.

(a) EA (b) AB^T (c) $B^T(A + E^T)$
(d) $2A + C$ (e) $(C^T + D)B^T$ (f) $CD + B^T E^T$
(g) $(BD^T)C^T$ (h) $DC + EA$

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Em cada parte, calcule a expressão dada (se possível).

(a) $D + E$ (b) $D - E$ (c) $5A$
(d) $-7C$ (e) $2B - C$ (f) $4E - 2D$
(g) $-3(D + 2E)$ (h) $A - A$ (i) $\text{tr}(D)$
(j) $\text{tr}(D - 3E)$ (k) $4\,\text{tr}(7B)$ (l) $\text{tr}(A)$

4. Usando as matrizes do Exercício 3, em cada parte, calcule a expressão dada (se possível).

(a) $2A^T + C$ (b) $D^T - E^T$ (c) $(D - E)^T$
(d) $B^T + 5C^T$ (e) $\frac{1}{2}C^T - \frac{1}{4}A$ (f) $B - B^T$
(g) $2E^T - 3D^T$ (h) $(2E^T - 3D^T)^T$ (i) $(CD)E$
(j) $C(BA)$ (k) $\text{tr}(DE^T)$ (l) $\text{tr}(BC)$

5. Usando as matrizes do Exercício 3, em cada parte, calcule a expressão dada (se possível).

(a) AB (b) BA (c) $(3E)D$
(d) $(AB)C$ (e) $A(BC)$ (f) CCT
(g) $(DA)^T$ (h) $(C^TB)A^T$ (i) $\text{tr}(DDT)$
(j) $\text{tr}(4E^T - D)$ (k) $\text{tr}(C^TA^T + 2E^T)$ (l) $\text{tr}((EC^T)^TA)$

6. Usando as matrizes do Exercício 3, em cada parte, calcule a expressão dada (se possível).

(a) $(2D^T - E)A$ (b) $(4B)C + 2B$
(c) $(-AC)^T + 5D^T$ (d) $(BA^T - 2C)T$
(e) $B^T(CC^T - A^TA)$ (f) $D^TE^T - (ED)^T$

7. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Use o método das linhas ou das colunas (como for apropriado) para encontrar

(a) a primeira linha de AB. (b) a terceira linha de AB.
(c) a segunda coluna de AB. (d) a primeira coluna de BA.
(e) a terceira linha de AA. (f) a terceira coluna de AA.

8. Usando as matrizes do Exercício 7, use o método das linhas ou das colunas (como for apropriado) para encontrar

(a) a primeira coluna de AB.
(b) a terceira coluna de BB.
(c) a segunda linha de BB.
(d) a primeira coluna de AA.
(e) a terceira linha de AB.
(f) a primeira linha de BA.

9. Usando as matrizes A e B do Exercício 7,

(a) expresse cada vetor coluna de AA como uma combinação linear dos vetores coluna de A.
(b) expresse cada vetor coluna de BB como uma combinação linear dos vetores coluna de B.

10. Usando as matrizes A e B do Exercício 7,

(a) expresse cada vetor coluna de AB como uma combinação linear dos vetores coluna de A.
(b) expresse cada vetor coluna de BA como uma combinação linear dos vetores coluna de B.

11. Em cada parte, encontre matrizes A, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ que expressem o sistema de equações lineares dado como uma única equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e escreva essa equação matricial.

(a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 9x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 4x_1 \qquad\; - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 \qquad\; - 8x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned}$$

12. Em cada parte, encontre matrizes A, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ que expressem o sistema de equações lineares dado como uma única equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e escreva essa equação matricial.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 \qquad\; &= 0 \\ - 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 \qquad\; + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= -3 \\ -x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= 3 \\ - 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

13. Em cada parte, expresse a equação matricial como um sistema de equações lineares.

(a) $$\begin{bmatrix} 5 & 6 & -7 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(b) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}$$

14. Em cada parte, expresse a equação matricial como um sistema de equações lineares.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **15–16**, encontre todos os valores de k, se houver, que satisfazem a equação. ◀

15. $\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

16. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ k \end{bmatrix} = 0$

▶ Nos Exercícios **17–18**, resolva a equação matricial em termos de a, b, c e d. ◀

17. $\begin{bmatrix} a & 3 \\ -1 & a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & d-2c \\ d+2c & -2 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} a-b & b+a \\ 3d+c & 2d-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

19. Sejam A uma matriz $m \times n$ e 0 a matriz $m \times n$ com todas as entradas nulas. Mostre que se $kA = 0$, então $k = 0$ ou $A = 0$.

20. (a) Mostre que se os produtos AB e BA estiverem ambos definidos, então AB e BA são matrizes quadradas.

(b) Mostre que se A for uma matriz $m \times n$ e $A(BA)$ estiver definida, então B é uma matriz $n \times m$.

21. Prove que se A e B são matrizes $n \times n$, então

$$\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$$

22. (a) Mostre que se A tem uma linha de zeros e B é uma matriz qualquer para a qual o produto AB está definido, então AB também tem uma linha de zeros.

(b) Encontre um resultado análogo para uma coluna de zeros.

23. Em cada parte, encontre uma matriz $[a_{ij}]$ de tamanho 6×6 que satisfaz a condição dada. Dê respostas tão gerais quanto possível, usando letras em vez de números para entradas não nulas específicas.

(a) $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ (b) $a_{ij} = 0$ se $i > j$

(c) $a_{ij} = 0$ se $i < j$

(d) $a_{ij} = 0$ se $|i - j| > 1$

24. Em cada parte, encontre a matriz $A = [a_{ij}]$ de tamanho 4×4 cujas entradas satisfazem a condição dada.

(a) $a_{ij} = i + j$ (b) $a_{ij} = i^{j-1}$

(c) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |i-j| > 1 \\ -1 & \text{se} \quad |i-j| \leq 1 \end{cases}$

25. Considere a função $y = f(x)$ definida com matrizes x de tamanho 2×1 por $y = Ax$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esboce $f(x)$ juntamente com x em cada caso dado. Como você descreveria a ação de f?

(a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (d) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

26. Seja I a matriz $n \times n$ cuja entrada na linha i e coluna j é

$$\begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

Mostre que $AI = IA = A$, com qualquer matriz $n \times n$ A.

27. Quantas matrizes A de tamanho 3×3 você consegue encontrar tais que

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ 0 \end{bmatrix}$$

com quaisquer escolhas de x, y e z?

28. Quantas matrizes A de tamanho 3×3 você consegue encontrar tais que

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com quaisquer escolhas de x, y e z?

29. Dizemos que uma matriz B é uma ***raiz quadrada*** de uma matriz A se $BB = A$.

(a) Encontre duas raízes quadradas de $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Quantas raízes quadradas distintas você consegue encontrar de $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$?

(c) Você acha que qualquer matriz 2×2 tem pelo menos uma raiz quadrada? Explique seu raciocínio.

30. Seja 0 a matriz 2×2 com todas as entradas nulas.

(a) Existe alguma matriz A de tamanho 2×2 tal que $A \neq 0$ e $AA = 0$? Justifique sua resposta.

(b) Existe alguma matriz A de tamanho 2×2 tal que $A \neq 0$ e $AA = A$? Justifique sua resposta.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(o), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ não tem diagonal principal.

(b) Uma matriz $m \times n$ tem m vetores coluna e n vetores linha.

(c) Se A e B forem matrizes 2×2, então $AB = BA$.

(d) O i-ésimo vetor linha de um produto matricial AB pode ser calculado multiplicando A pelo i-ésimo vetor linha de B.

(e) Dada qualquer matriz A, vale $(A^T)^T = A$.

(f) Se A e B forem matrizes quadradas de mesma ordem, então $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$.

(g) Se A e B forem matrizes quadradas de mesma ordem, então $(AB)^T = A^T B^T$.

(h) Dada qualquer matriz quadrada A, vale $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$.

(i) Se A for uma matriz 6×4 e B uma matriz $m \times n$ tal que $B^T A^T$ é uma matriz 2×6, então $m = 4$ e $n = 2$.

(j) Se A for uma matriz $n \times n$ e c um escalar, então $\text{tr}(cA) = c\,\text{tr}(A)$.

(k) Se A, B e C forem matrizes de mesmo tamanho tais que $A - C = B - C$, então $A = B$.

(l) Se A, B e C forem matrizes quadradas de mesma ordem tais que $AC = BC$, então $A = B$.

(m) Se a soma de matrizes $AB + BA$ estiver definida, então A e B devem ser matrizes quadradas de mesmo tamanho.

(n) Se B tiver uma coluna de zeros, então, sempre que o produto estiver definido, AB também tem.

(o) Se B tiver uma coluna de zeros, então, sempre que o produto estiver definido, BA também tem.

1.4 Inversas; propriedades algébricas das matrizes

Nesta seção, discutimos algumas das propriedades algébricas das operações matriciais. Veremos que muitas das regras básicas da aritmética de números reais também valem para matrizes, mas também que algumas não valem.

Propriedades das adição matricial e multiplicação por escalar

O teorema seguinte lista as propriedades algébricas básicas das operações matriciais.

TEOREMA 1.4.1 Propriedades da aritmética matricial

Supondo que os tamanhos das matrizes sejam tais que as operações indicadas possam ser efetuadas, valem as seguintes regras da aritmética matricial.

(a) $A + B = B + A$ **[Lei da comutatividade da adição]**

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ **[Lei da associatividade da adição]**

(c) $A(BC) = (AB)C$ **[Lei da associatividade da multiplicação]**

(d) $A(B + C) = AB + AC$ **[Lei da distributividade à esquerda]**

(e) $(A + B)C = AC + BC$ **[Lei da distributividade à direita]**

(f) $A(B - C) = AB - AC$

(g) $(B - C)A = BA - CA$

(h) $a(B + C) = aB + aC$

(i) $a(B - C) = aB - aC$

(j) $(a + b)C = aC + bC$

(k) $(a - b)C = aC - bC$

(l) $a(bC) = (ab)C$

(m) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Para provar qualquer uma das igualdades nesse teorema, devemos mostrar que a matriz do lado esquerdo tem o mesmo tamanho que a matriz do lado direito e que as entradas correspondentes dos dois lados são iguais. A maioria das provas segue o mesmo padrão geral, portanto, provamos a parte (d) como amostra. A prova da lei da

associatividade da multiplicação é mais complicada do que o resto e será delineada nos exercícios.

Prova (d) Devemos mostrar que $A(B + C)$ e $AB + AC$ têm o mesmo tamanho e que as entradas correspondentes são iguais. Para formar $A(B + C)$, as matrizes B e C devem ter o mesmo tamanho, digamos, $m \times n$, e então a matriz A deve ter m colunas, de modo que seu tamanho é da forma $r \times m$. Isso faz de $A(B + C)$ uma matriz $r \times n$. Segue que $AB + AC$ também é uma matriz $r \times n$ e, consequentemente, $A(B + C)$ e $AB + AC$ têm o mesmo tamanho.

Suponha que $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$. Queremos mostrar que as entradas correspondentes de $A(B + C)$ e de $AB + AC$ são iguais, ou seja, que

$$[A(B + C)]_{ij} = [AB + AC]_{ij}$$

para todos valores de i e j. Pela definição de soma e produto matriciais, temos

$$\begin{aligned}[A(B+C)]_{ij} &= a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j}) + \cdots + a_{im}(b_{mj} + c_{mj}) \\ &= (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}) + (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}c_{mj}) \\ &= [AB]_{ij} + [AC]_{ij} = [AB + AC]_{ij} \quad ◄\end{aligned}$$

Existem três maneiras básicas de provar que duas matrizes do mesmo tamanho são iguais. Ou provamos que as entradas correspondentes são iguais, ou provamos que os vetores coluna são iguais, ou provamos que os vetores linha são iguais.

Observação Embora as operações de adição matricial e de multiplicação matricial tenham sido definidas para pares de matrizes, as leis da associatividade (b) e (c) nos permitem escrever somas e produtos de três matrizes, como $A + B + C$ e ABC sem a inserção de parênteses. Isso se justifica pelo seguinte fato: onde quer que os parênteses sejam inseridos, as leis da associatividade garantem que sempre será alcançado o mesmo resultado final. Em geral, *dados qualquer soma ou qualquer produto de matrizes, podemos omitir ou inserir pares de parênteses em qualquer lugar da expressão sem afetar o resultado final.*

► EXEMPLO 1 Associatividade da multiplicação matricial

Como uma ilustração da lei da associatividade da multiplicação matricial, considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

de modo que $(AB)C = A(BC)$, conforme garante o Teorema 1.4.1(c). ◄

Propriedades da multiplicação matricial

Não deixe o Teorema 1.4.1 iludi-lo a acreditar que *todas* as leis da aritmética real sejam válidas na aritmética matricial. Por exemplo, sabemos que na aritmética real sempre vale que $ab = ba$, que é a *lei da comutatividade da multiplicação*. Na aritmética matricial, contudo, a igualdade de AB e BA pode não ser válida por três razões possíveis.

1. AB pode estar definida e BA não (por exemplo, se A é uma matriz 2×3 e B é 3×4).
2. AB e BA podem ambas estar definidas, mas têm tamanhos diferentes (por exemplo, se A é uma matriz 2×3 e B é 3×2).
3. AB e BA podem ambas estar definidas e ter o mesmo tamanho, mas as matrizes podem ser diferentes (conforme ilustrado no exemplo seguinte).

Não veja mais do que está escrito no Exemplo 2. O exemplo não proíbe a possibilidade de AB e BA serem iguais em *certos* casos, somente que não são iguais em *todos* os casos. Se ocorrer que $AB = BA$, dizemos que as matrizes A e B ***comutam***.

▶ EXEMPLO 2 A ordem é importante na multiplicação matricial

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando, obtemos

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $AB \neq BA$. ◀

Matrizes zero

Uma matriz cujas entradas são todas nulas, é denominada ***matriz zero*** ou ***matriz nula***. Alguns exemplos são

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [0]$$

Denotamos uma matriz nula por 0, a menos que seja importante enfatizar seu tamanho, caso em que a matriz $m \times n$ é denotada por $0_{m \times n}$.

Deveria ser evidente que se A e 0 forem matrizes de mesmo tamanho, então

$$A + 0 = 0 + A = A$$

Assim, nessa equação matricial, a matriz 0 desempenha o mesmo papel que o número 0 na equação numérica $a + 0 = 0 + a = a$.

O teorema seguinte lista as propriedades básicas das matrizes nulas. Como as afirmações devem ser evidentes, omitimos as provas formais.

TEOREMA 1.4.2 Propriedades de matrizes zero

Se c for um escalar e se os tamanhos das matrizes forem tais que as operações possam ser efetuadas, então

(a) $A + 0 = 0 + A = A$

(b) $A - 0 = A$

(c) $A - A = A + (-A) = 0$

(d) $0A = 0$

(e) *Se* $cA = 0$, *então* $c = 0$ *ou* $A = 0$.

Como já sabemos que a lei da comutatividade da aritmética dos números reais não vale na aritmética matricial, não deveria ser surpreendente que há outras regras que também falham. Por exemplo, considere as duas leis da aritmética dos números reais seguintes.

- Se $ab = ac$ e $a \neq 0$, então $b = c$. **[A lei de cancelamento]**
- Se $ab = 0$, então pelo menos um dos fatores à esquerda é 0.

Os dois exemplos a seguir mostram que essas leis não são universalmente verdadeiras na aritmética matricial.

▶ EXEMPLO 3 A lei de cancelamento não vale

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Deixamos para o leitor confirmar que

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Embora $A \neq 0$, o cancelamento de A de ambos lados da equação $AB = AC$ levaria à conclusão incorreta que $B = C$. Assim, a lei de cancelamento não é válida, em geral, na multiplicação matricial.

▶ EXEMPLO 4 Um produto nulo com fatores não nulos

Aqui temos duas matrizes tais que $AB = 0$, mas $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ◀$$

Matrizes identidade

Uma matriz quadrada com entradas 1 na diagonal principal e demais entradas nulas é denominada ***matriz identidade***. Alguns exemplos são

$$[1], \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma matriz identidade é denotada pela letra I. Se for importante enfatizar seu tamanho, escrevemos I_n para a matriz identidade de tamanho $n \times n$.

Para explicar o papel das matrizes identidade na aritmética matricial, consideremos o efeito de multiplicar uma matriz A de tamanho 2×3 nos dois lados por uma matriz identidade. Multiplicando à direita pela matriz identidade 3×3, obtemos

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

e multiplicando pela esquerda pela matriz identidade 2×2, obtemos

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

O mesmo resultado vale em geral, ou seja, se A for uma matriz $m \times n$, então,

$$AI_n = A \quad \text{e} \quad I_mA = A$$

Assim, as matrizes identidade desempenham nas equações matriciais o mesmo papel que o número 1 desempenha na equação numérica $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Como mostra o teorema seguinte, as matrizes identidade surgem naturalmente no estudo da forma escalonada reduzida por linhas de matrizes *quadradas*.

TEOREMA 1.4.3 *Se R é a forma escalonada reduzida por linhas de uma matriz A de tamanho n × n, então ou R tem uma linha de zeros ou R é a matriz identidade* I_n.

Prova Suponha que a forma escalonada reduzida por linhas de A seja

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

De duas uma: ou a última linha dessa matriz é constituída inteiramente de zeros ou não. Se não, a matriz não contém linhas nulas e, consequentemente, cada uma de suas n linhas tem um pivô. Como esses pivôs ocorrem progressivamente para a direita à medida que descemos pelas linhas, cada um deve ocorrer na diagonal principal. Como as demais entradas na mesma coluna são zeros, R deve ser I_n. Assim, ou R tem uma linha de zeros ou $R = I_n$. ◄

Inversa de uma matriz

Na aritmética real, cada número não nulo a tem um recíproco $a^{-1}(= 1/a)$ com a propriedade

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

O número a^{-1} também é denominado *inverso multiplicativo* de a. Nosso próximo objetivo é desenvolver para a aritmética matricial um análogo desse resultado. Com esse objetivo, apresentamos a definição a seguir.

DEFINIÇÃO 1 Se A for uma matriz quadrada e se pudermos encontrar uma matriz B de mesmo tamanho tal que $AB = BA = I$, então diremos que A é ***invertível*** (*ou* ***não singular***) e que B é uma ***inversa*** de A. Se não puder ser encontrada uma tal matriz B, diremos que A é ***não invertível*** ou ***singular***.

Observação A relação $AB = BA = I$ permanece inalterada pela troca de A por B, de modo que se A for invertível e B uma inversa, então também vale que B é invertível e que A é uma inversa de B. Assim, se

$$AB = BA = I$$

dizemos que A e B são *inversas uma da outra*.

► **EXEMPLO 5 Uma matriz invertível**

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Então

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Assim, A e B são invertíveis e uma é inversa da outra. ◄

▶ EXEMPLO 6 Uma classe de matrizes singulares

Em geral, uma matriz quadrada com uma linha ou coluna de zeros é singular. Para ajudar a entender por que isso ocorre, considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Para provar que A é singular, devemos mostrar que não existe matriz B de tamanho 3×3 tal que $AB = BA = I$. Para isso, sejam $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ e $\mathbf{0}$ os vetores coluna de A. Assim, dada qualquer matriz B de tamanho 3×3, podemos escrever o produto BA como

$$BA = B[\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{0}] = [B\mathbf{c}_1 \quad B\mathbf{c}_2 \quad \mathbf{0}] \quad \textbf{[Fórmula (6) da Seção 1.3]}$$

A coluna de zeros mostra que $BA \neq 1$ e, portanto, que A é singular. ◀

Propriedades das inversas

É razoável perguntar se uma matriz invertível pode ter mais de uma inversa. O próximo teorema mostra que a resposta é não – *uma matriz invertível tem exatamente uma inversa.*

TEOREMA 1.4.4 *Se B e C são ambas inversas da matriz A, então $B = C$.*

Prova Como B é uma inversa de A, temos $BA = I$. Multiplicando ambos lados à direita por C, dá $(BA)C = IC = C$. Mas também vale que $(BA)C = B(AC) = BI = B$, de modo que $C = B$. ◀

Como uma consequência desse importante resultado, podemos agora falar "da" inversa de uma matriz invertível. Se A for invertível, então sua inversa será denotada pelo símbolo A^{-1}. Assim,

$$AA^{-1} = I \quad \text{e} \quad A^{-1}A = I \tag{1}$$

A inversa de A desempenha na aritmética matricial praticamente o mesmo papel que o recíproco a^{-1} desempenha nas relações numéricas $aa^{-1} = 1$ e $a^{-1}a = 1$.

Na próxima seção, desenvolveremos um método para encontrar a inversa de matrizes invertíveis de qualquer tamanho. Por enquanto, temos o teorema seguinte, que especifica condições sob as quais uma matriz 2×2 é invertível e fornece uma fórmula simples para a inversa.

TEOREMA 1.4.5 *A matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se, e só se, $ad - bc \neq 0$, caso em que a inversa é dada pela fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{2}$$

A quantidade $ad - bc$ no Teorema 1.4.5 é denominada ***determinante*** da matriz A de tamanho 2×2 e é denotada por

$$\det(A) = ad - bc$$

ou, alternativamente, por

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Omitimos a prova, porque estudaremos uma versão mais geral desse teorema adiante. Por enquanto, o leitor deveria pelo menos confirmar a validade da Fórmula (2), mostrando que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Nota histórica A fórmula para A^{-1} dada no Teorema 1.4.5 apareceu pela primeira vez (numa forma mais geral) em 1858, no *Memoir on the Theory of Matrices* (*Ensaio sobre a Teoria de Matrizes*), de Cayley. O resultado mais geral descoberto por Cayley será estudado adiante.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Figura 1.4.1

Observação A Figura 1.4.1 ilustra que o determinante de uma matriz A de tamanho 2×2 é o produto das entradas da diagonal principal menos o produto das entradas *fora* da diagonal principal. Em palavras, o Teorema 1.4.5 afirma que uma matriz A de tamanho 2×2 é invertível se, e só se, seu determinante é não nulo e, se for invertível, sua inversa pode ser obtida trocando as entradas da diagonal, trocando o sinal das entradas fora da diagonal e multiplicando todas as entradas pelo recíproco do determinante de A.

▶ EXEMPLO 7 Calculando a inversa de uma matriz 2 × 2

Em cada parte, determine se a matriz é invertível. Se for, calcule sua inversa.

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(b) } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Solução (a) O determinante de A é $\det(A) = (6)(2) - (1)(5) = 7$, que é não nulo. Assim, A é invertível e sua inversa é

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

Deixamos para o leitor confirmar que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Solução (b) A matriz não é invertível porque $\det(A) = (-1)(-6) - (2)(3) = 0$.

▶ EXEMPLO 8 Solução de um sistema linear por inversão matricial

Um problema que surge em muitas aplicações envolve resolver um par de equações da forma

$$\begin{aligned} u &= ax + by \\ v &= cx + dy \end{aligned}$$

para x e y em, termos de u e v. Uma abordagem é tratar isso como um sistema linear de duas equações nas incógnitas x e y e usar eliminação de Gauss-Jordan para resolver para x e y. Contudo, como os coeficientes das incógnitas são *literais* em vez de *numéricos*, esse procedimento é um pouco confuso. Como uma abordagem alternativa, substituímos as duas equações pela equação matricial única

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

que podemos reescrever como

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Supondo que a matriz 2×2 seja invertível (isto é, que $ad - bc \neq 0$), então podemos multiplicar à esquerda ambos lados pela inversa e reescrever a equação como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

que simplifica para

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Usando o Teorema 1.4.5, podemos reescrever essa equação como

$$\frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

da qual obtemos

$$x = \frac{du - bv}{ad - bc}, \quad y = \frac{av - cu}{ad - bc} \blacktriangleleft$$

O próximo teorema considera a inversa do produto matricial.

TEOREMA 1.4.6 *Se A e B são matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então AB é invertível e*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Prova Podemos mostrar a invertibilidade e obter a fórmula enunciada ao mesmo tempo mostrando que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$$

No entanto,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

e, analogamente, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$. ◀

Embora não o provemos, esse resultado pode ser estendido três ou mais fatores.

O produto de um número qualquer de matrizes invertíveis é invertível, e a inversa do produto é o produto das inversas em ordem inversa.

▶ EXEMPLO 9 A inversa de um produto

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Deixamos para o leitor mostrar que

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}, \quad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

e, também, que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Assim, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, como garante o Teorema 1.4.6. ◀

Se um produto de matrizes for singular, então pelo menos um dos fatores deve ser singular. Por quê?

Potências de uma matriz

Se A for uma matriz *quadrada*, definimos as potências inteiras não negativas de A por

$$A^0 = I \quad \text{e} \quad A^n = AA \cdots A \quad [\textbf{\textit{n} fatores}]$$

e, se A for invertível, então definimos as potências inteiras negativas de A por

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1} \quad [\textbf{\textit{n} fatores}]$$

Como essas definições acompanham as de números reais, valem as leis usuais de potenciação; por exemplo,

$$A^rA^s = A^{r+s} \quad \text{e} \quad (A^r)^s = A^{rs}$$

Além dessas, temos as propriedades seguintes de potências de expoentes negativos.

TEOREMA 1.4.7 *Se A for uma matriz invertível e n um inteiro não negativo, então*

(*a*) A^{-1} *é invertível e* $(A^{-1})^{-1} = A$.

(*b*) A^n *é invertível e* $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$.

(*c*) kA *é invertível com qualquer escalar não nulo* k *e* $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

Demonstramos a parte (*c*), deixando as provas das partes (*a*) e (*b*) como exercícios.

Prova (c) A propriedade I e (*m*) do Teorema 1.4.1 implicam

$$(kA)(k^{-1}A^{-1}) = k^{-1}(kA)A^{-1} = (k^{-1}k)AA^{-1} = (1)I = I$$

e, analogamente, $(k^{-1}A^{-1})(kA) = I$. Assim, kA é invertível e $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$. ◀

▶ EXEMPLO 10 Propriedades de potências

Sejam A e A^{-1} as matrizes do Exemplo 9, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Então

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix}$$

Também,

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}$$

portanto, confirmando o Teorema 1.4.7(*b*),

$$(A^3)^{-1} = \frac{1}{(11)(41) - (30)(15)}\begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix} = (A^{-1})^3$$

▶ EXEMPLO 11 O quadrado de uma soma matricial

Na aritmética real, em que temos a comutatividade da multiplicação, podemos escrever

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Contudo, na aritmética matricial, em que não temos a comutatividade da multiplicação, o melhor que podemos escrever é

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

Somente no caso especial em que A e B comutam (ou seja, $AB = BA$) é que podemos ir um passo adiante e escrever

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad ◀$$

Polinômios matriciais

Se A for uma matriz quadrada, digamos $n \times n$, e se

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_m x^m$$

é um polinômio qualquer, então definimos a matriz $p(A)$ de tamanho $n \times n$ por

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m \tag{3}$$

em que I é a matriz identidade $n \times n$. Ou seja, $p(A)$ é a matriz obtida substituindo x por A e o termo constante a_0 pela matriz $a_0 I$. Uma expressão como (3) é denominada ***polinômio matricial em A***.

▶ EXEMPLO 12 Um polinômio matricial

Encontre $p(A)$ com

$$p(x) = x^2 - 2x - 3 \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução

$$\begin{aligned} p(A) &= A^2 - 2A - 3I \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - 2\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou, mais sucintamente, $p(A) = 0$. ◀

Observação Segue do fato de que $A^rA^s = A^{r+s} = A^{s+r} = A^sA^r$ que as potências de uma matriz quadrada comutam e, como um polinômio matricial em A é constituído de potências de A, quaisquer dois polinômios matriciais em A também comutam, ou seja, dados polinômios p_1 e p_2, temos

$$p_1(A)p_2(A) = p_2(A)p_1(A) \tag{4}$$

Propriedades da transposta

O próximo teorema lista as principais propriedades da transposta.

TEOREMA 1.4.8 *Se os tamanhos das matrizes são tais que as operações indicadas podem ser efetuadas, então*

(*a*) $(A^T)^T = A$
(*b*) $(A + B)^T = A^T + B^T$
(*c*) $(A - B)^T = A^T - B^T$
(*d*) $(kA)^T = kA^T$
(*e*) $(AB)^T = B^TA^T$

Lembrando que a transposição de uma matriz troca entre si suas linhas e colunas, o leitor não deveria encontrar dificuldade alguma para visualizar os resultados das partes (*a*) até (*d*). Por exemplo, a parte (*a*) afirma o fato óbvio que trocar duas vezes entre si as linhas e as colunas de uma matriz deixa a matriz inalterada; a parte (*b*) assegura que somar duas matrizes e depois trocar entre si as linhas e colunas dá o mesmo resultado que trocar entre si as linhas e colunas antes de somar. Omitimos as provas formais. A parte (*e*) não é tão óbvia, mas tampouco apresentamos sua prova. O resultado dessa parte pode ser estendido para incluir três ou mais fatores, o que pode ser enunciado como segue.

A transposta de um produto de um número qualquer de matrizes é igual ao produto de suas transpostas em ordem inversa.

O teorema a seguir estabelece uma relação entre a inversa de uma matriz invertível e a inversa de sua transposta.

TEOREMA 1.4.9 *Se A for uma matriz invertível, então A^T também é invertível e*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})T$$

Prova Podemos estabelecer a invertibilidade e obter a fórmula ao mesmo tempo mostrando que

$$A^T(A^{-1})T = (A^{-1})^T A^T = I$$

No entanto, pela parte (*e*) do Teorema 1.4.8 e o fato de que $I^T = I$, temos

$$A^T(A^{-1})T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$$
$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})T = I^T = I$$

o que completa a prova. ◀

▶ EXEMPLO 13 A inversa de uma transposta

Considere uma matriz 2 × 2 invertível qualquer e sua transposta

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Como A é invertível, seu determinante $ad - bc$ é não nulo. Mas o determinante de A^T também é $ad - bc$ (verifique), de modo que A^T é invertível. Segue do Teorema 1.4.5 que

$$(A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & -\dfrac{c}{ad - bc} \\ -\dfrac{b}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

que é a mesma matriz que resulta se A^{-1} for transposta (verifique). Assim,

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})T$$

conforme garante o Teorema 1.4.9. ◀

Revisão de conceitos

- Lei da comutatividade da adição matricial
- Lei da associatividade da adição matricial
- Lei da associatividade da multiplicação matricial
- Leis da distributividade à direita e à esquerda
- Matriz zero
- Matriz identidade
- Inversa de uma matriz
- Matriz invertível
- Matriz não singular
- Matriz singular
- Determinante
- Potência de uma matriz
- Polinômio matricial

Aptidões desenvolvidas

- Conhecer as propriedades aritméticas das operações matriciais.
- Ser capaz de provar propriedades aritméticas de matrizes.
- Conhecer as propriedades das matrizes nulas.
- Conhecer as propriedades das matrizes identidade.
- Ser capaz de reconhecer quando duas matrizes quadradas são uma a inversa da outra.
- Ser capaz de determinar se uma matriz 2 × 2 é invertível.
- Ser capaz de resolver um sistema linear de duas equações em duas incógnitas cuja matriz de coeficientes é invertível.
- Ser capaz de provar as propriedades básicas envolvendo matrizes invertíveis.
- Conhecer as propriedades da matriz transposta e sua relação com matrizes invertíveis.

Conjunto de exercícios 1. 4

1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad a = 4, \quad b = -7$$

Mostre que

(a) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(b) $(AB)C = A(BC)$ (c) $(a + b)C = aC + bC$

(d) $a(B - C) = aB - aC$

2. Usando as matrizes e escalares do Exercício 1, verifique que

(a) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

(b) $A(B - C) = AB - AC$ (c) $(B + C)A = BA + CA$

(d) $a(bC) = (ab)C$

3. Usando as matrizes e escalares do Exercício 1, verifique que

(a) $(A^T)^T = A$ (b) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(c) $(aC)^T = aC^T$ (d) $(AB)^T = B^T A^T$

▶ Nos Exercícios **4–7**, use o Teorema 1.4.5 para calcular a inversa da matriz dada. ◀

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **5.** $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

6. $C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ **7.** $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

8. Encontre a inversa de

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

9. Encontre a inversa de

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}$$

10. Use a matriz A do Exercício 4 para verificar que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

11. Use a matriz B do Exercício 5 para verificar que $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$.

12. Use as matrizes A e B dos Exercícios 4 e 5 para verificar que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

13. Use as matrizes A, B e C dos Exercícios 4 a 6 para verificar que $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

▶ Nos Exercícios **14–17**, use a informação dada para encontrar A. ◀

14. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ **15.** $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

16. $(5A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **17.** $(I + 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

18. Seja A a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Em cada parte, calcule a quantidade dada.

(a) A^3 (b) A^{-3} (c) $A^2 - 2A + I$

(d) $p(A)$, onde $p(x) = x - 2$

(e) $p(A)$, onde $p(x) = 2x^2 + x + 1$

(f) $p(A)$, onde $p(x) = x^3 - 2x + 4$

19. Repita o Exercício 18 com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

20. Repita as partes (*a*), (*c*), (*d*), (*e*) e (*f*) do Exercício 18 com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

21. Repita as partes (*a*), (*c*), (*d*), (*e*) e (*f*) do Exercício 18 com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

▶ Nos Exercícios **22–24**, sejam $p_1(x) = x^2 - 9$, $p_2(x) = x + 3$ e $p_3(x) = x - 3$. Mostre que $p_1(A) = p_2(A)p_3(A)$, com a matriz dada. ◀

22. A matriz A do Exercício 18.

23. A matriz A do Exercício 21.

24. Uma matriz quadrada A arbitrária.

25. Mostre que se $p(x) = x^2 - (a + d)x + (ad - bc)$ e

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

então $p(A) = 0$.

26. Mostre que se
$p(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ae + be - cd)x - a(be - cd)$ e

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{bmatrix}$$

então $p(A) = 0$.

27. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

em que $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$. Mostre que A é invertível e encontre sua inversa.

28. Mostre que se uma matriz quadrada A satisfizer $A^2 - 3A + I = 0$, então $A^{-1} = 3I - A$.

29. (a) Mostre que uma matriz com uma linha de zeros não pode ter uma inversa.

(b) Mostre que uma matriz com uma coluna de zeros não pode ter uma inversa.

30. Supondo que todas as matrizes sejam $n \times n$ e invertíveis, resolva para D.

$$ABC^TDBA^TC = AB^T$$

31. Supondo que todas as matrizes sejam $n \times n$ e invertíveis, resolva para D.

$$C^TB^{-1}A^2BAC^{-1}DA^{-2}B^TC^{-2} = C^T$$

32. Se A for uma matriz quadrada e n um inteiro positivo, será verdade que $(A^n)^T = (A^T)^n$? Justifique sua resposta.

33. Simplifique

$$(AB)^{-1}(AC^{-1})(D^{-1}C^{-1})^{-1}D^{-1}$$

34. Simplifique

$$(AC^{-1})^{-1}(AC^{-1})(AC^{-1})^{-1}AD^{-1}$$

▶ Nos Exercícios **35–37**, determine se A é invertível e, se for, encontre sua inversa. [*Sugestão*: resolva $AX = I$ para X igualando entradas correspondentes de ambos lados.] ◀

35. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

36. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

37. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

38. Prove o Teorema 1.4.2.

▶ Nos Exercícios **39–42**, use o método do Exemplo 8 para encontrar a única solução do sistema linear dado. ◀

39. $3x_1 - 2x_2 = -1$
$4x_1 + 5x_2 = 3$

40. $-x_1 + 5x_2 = 4$
$-x_1 - 3x_2 = 1$

41. $6x_1 + x_2 = 0$
$4x_1 - 3x_2 = -2$

42. $2x_1 - 2x_2 = 4$
$x_1 + 4x_2 = 4$

43. Prove a parte (*a*) do Teorema 1.4.1.

44. Prove a parte (*c*) do Teorema 1.4.1.

45. Prove a parte (*f*) do Teorema 1.4.1.

46. Prove a parte (*b*) do Teorema 1.4.2.

47. Prove a parte (*c*) do Teorema 1.4.2.

48. Verifique a Fórmula (4) do texto calculando diretamente.

49. Prove a parte (*d*) do Teorema 1.4.8.

50. Prove a parte (*e*) do Teorema 1.4.8.

51. (a) Mostre que se A for invertível e $AB = AC$, então $B = C$.

(b) Explique por que a parte (a) e o Exemplo 3 não são contraditórios.

52. Mostre que se A for invertível e k um escalar não nulo qualquer, então $(kA)^n = k^nA^n$, com qualquer valor inteiro de n.

53. (a) Mostre que se A, B e $A + B$ forem matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então

$$A(A^{-1} + B^{-1})B(A + B)^{-1} = I$$

(b) O que o resultado da parte (a) nos diz sobre a matriz $A^{-1} + B^{-1}$?

54. Dizemos que uma matriz A é ***idempotente*** se $A^2 = A$.

(a) Mostre que se A for idempotente, então $I - A$ também é.

(b) Mostre que se A for idempotente, então $2A - I$ é invertível e sua própria inversa.

55. Mostre que se A for uma matriz quadrada tal que $A^k = 0$, com algum inteiro positivo k, então a matriz $I - A$ é invertível e

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(k), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Duas matrizes A e B de tamanho $n \times n$ são inversas uma da outra se, e só se, $AB = BA = 0$.

(b) Para quaisquer matrizes quadradas A e B de mesmo tamanho, vale $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(c) Para quaisquer matrizes quadradas A e B de mesmo tamanho, vale $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

(d) Se A e B forem matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então AB é invertível e vale $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

(e) Se A e B forem matrizes tais que o produto AB está definido, então vale $(AB)^T = A^TB^T$.

(f) A matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se, e só se, $ad - bc \neq 0$

(g) Se A e B forem matrizes de mesmo tamanho e k uma constante, então $(kA + B)^T = kA^T + B^T$.

(h) Se A for uma matriz invertível, então A^T também é invertível.

(i) Se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$ e I for uma matriz identidade, então $p(I) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m$.

(j) Uma matriz quadrada com uma linha ou coluna de zeros não pode se invertível.

(k) A soma de duas matrizes invertíveis de mesmo tamanho sempre é invertível.

1.5 Matrizes elementares e um método para encontrar A^{-1}

Nesta seção, desenvolvemos um algoritmo para encontrar a inversa de uma matriz e discutiremos algumas das propriedades básicas de matrizes invertíveis.

Na Seção 1.1, definimos três operações elementares com as linhas de uma matriz A.

1. Multiplicar uma linha por uma constante não nula c.
2. Trocar duas linhas entre si.
3. Somar uma constante c vezes uma linha a uma outra linha.

Deveria ser evidente que, se denotarmos por B a matriz que resulta de A efetuando uma das operações dessa lista, então a matriz A poder ser recuperada de B efetuando a operação correspondente da lista seguinte.

1. Multiplicar uma linha por $1/c$.
2. Trocar as mesmas duas linhas entre si.
3. Se B resultou da soma de c vezes a linha r_1 de A com a linha r_2, então somamos $-c$ vezes r_1 à linha r_2.

Segue que, se B for obtida de A efetuando uma sequência de operações elementares com linhas, então existe uma segunda sequência de operações elementares com linhas que, sendo aplicada a B, recupera A (Exercício 43). Em virtude disso, colocamos a definição a seguir.

DEFINIÇÃO 1 Dizemos que as matrizes A e B são ***equivalentes por linhas*** se uma delas (portanto, ambas) pode ser obtida a partir da outra por uma sequência de operações elementares com linhas.

Nosso próximo objetivo é mostrar como a multiplicação matricial pode se usada para efetuar uma operação elementar com as linhas.

DEFINIÇÃO 2 Uma matriz $n \times n$ que pode ser obtida da matriz identidade I_n de tamanho $n \times n$ efetuando uma *única* operação elementar sobre linhas é denominada ***matriz elementar***.

▶ EXEMPLO 1 Matrizes elementares e operações com linhas

Abaixo listamos quatro matrizes elementares e as operações com linhas que as produzem.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos a segunda linha de I_2 por -3.

Permutamos a segunda linha de I_4 com a quarta.

Somamos 3 vezes a terceira linha de I_3 à primeira.

Multiplicamos a primeira linha de I_3 por 1. ◀

O teorema seguinte, cuja prova é deixada como exercício, mostra que quando uma matriz A é multiplicada *à esquerda* por uma matriz elementar E, o efeito é o de efetuar uma operação elementar com as linhas de A.

TEOREMA 1.5.1 Operações com linhas por multiplicação matricial

Se a matriz elementar E é o resultado de efetuar uma certa operação com as linhas de I_m e se A é uma matriz $m \times n$, então o produto EA é a matriz que resulta quando essa mesma operação com linhas é efetuada em A.

▶ EXEMPLO 2 Usando matrizes elementares

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

e considere a matriz elementar

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O Teorema 1.5.1 é uma ferramenta útil para desenvolver novos resultados sobre matrizes, mas em termos de contas, em geral é preferível efetuar operações com linhas diretamente.

que resulta de somar 3 vezes a primeira linha de I_3 à terceira linha. O produto EA é

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

que é, precisamente, a mesma matriz que resulta somando 3 vezes a primeira linha de A à terceira linha. ◀

Sabemos, da discussão no início desta seção, que se E é uma matriz elementar que resulta de efetuar uma operação elementar com linhas aplicada a uma matriz identidade I, então existe uma segunda operação elementar com linhas que, aplicada a E, produz de volta a matriz I. A Tabela 1 lista essas operações. As operações do lado direito da tabela são denominadas ***operações inversas*** das correspondentes operações do lado esquerdo.

Tabela 1

Operações com as linhas de I que produzem E	Operações com as linhas de E que produzem I
Multiplicar a linha i por $c \neq 0$	Multiplicar a linha i por $1/c$
Trocar entre si as linhas i e j	Trocar entre si as linhas i e j
Somar c vezes a linha i à linha j	Somar $-c$ vezes a linha i à linha j

▶ EXEMPLO 3 Operações e operações inversas com linhas

Em cada um dos exemplos a seguir, foi efetuada uma operação elementar na matriz identidade 2×2 para obter uma matriz elementar E e, em seguida, E foi restaurada à matriz identidade aplicando a operação com linhas inversa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos a segunda linha por 7. Multiplicamos a segunda linha por $\frac{1}{7}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Permutamos a primeira linha com a segunda. Permutamos a primeira linha com a segunda.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Somamos 5 vezes a segunda linha à primeira. Somamos -5 vezes a segunda linha à primeira.



O próximo teorema é um resultado crucial sobre a invertibilidade de matrizes elementares. Ele será a pedra fundamental de muitos dos resultados que seguem.

TEOREMA 1.5.2 *Qualquer matriz elementar é invertível, e a inversa também é uma matriz elementar.*

Prova Se E é uma matriz elementar, então E é o resultado de alguma operação elementar com as linhas de I. Seja E_0 a matriz que resulta quando é efetuada a operação inversa em I. Aplicando o Teorema 1.5.1 e lembrando que operações e suas inversas se cancelam mutuamente, segue que

$$E_0E = I \quad \text{e} \quad EE_0 = I$$

Assim, a matriz elementar E_0 é a inversa de E. ◀

Teorema da equivalência

À medida que progredimos neste texto, um dos nossos objetivos é mostrar como se relacionam várias ideias da Álgebra Linear que não parecem estar relacionadas. O próximo teorema, que relaciona resultados que obtivemos sobre invertibilidade de matrizes, sistemas lineares homogêneos, formas escalonadas reduzidas por linhas e matrizes elementares, é o nosso primeiro passo naquela direção. Mais afirmações serão acrescentadas a essa lista ao longo do nosso estudo.

TEOREMA 1.5.3 Afirmações equivalentes

Se A for uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes, ou seja, são todas verdadeiras ou todas falsas.

(*a*) *A é invertível.*

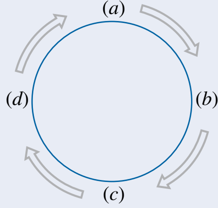
(*b*) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *tem somente a solução trivial.*

(*c*) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.*

(*d*) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*

A lógica da nossa prova do Teorema 1.5.3 pode ficar mais aparente se escrevermos as implicações

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$$



Isso torna visualmente aparente que a validade de qualquer uma das afirmações implica a validade de todas as demais e que, portanto, a falsidade de qualquer uma implica a falsidade das demais.

Prova Provamos a equivalência dessas afirmações estabelecendo a cadeia de implicações $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.

(*a*) ⇒ (*b*) Suponha que A seja invertível e que $\mathbf{x}_0$ seja uma solução qualquer de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Multiplicando ambos lados dessa equação pela matriz A^{-1}, dá $A^{-1}(A\mathbf{x}_0) = A^{-1}\mathbf{0}$, ou $(A^{-1}A)\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, ou $I\mathbf{x}_0 = 0$, ou seja, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Assim, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.

(*b*) ⇒ (*c*) Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a forma matricial do sistema

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \cdots + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array} \tag{1}$$

e suponha que o sistema só admita a solução trivial. Resolvendo por eliminação de Gauss-Jordan, o sistema de equações correspondente à forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada será

$$\begin{array}{llll} x_1 & & & = 0 \\ & x_2 & & = 0 \\ & & \ddots & \\ & & & x_n = 0 \end{array} \tag{2}$$

Assim, a matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$$

de (1) pode ser reduzida à matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de (2) por uma sequência de operações elementares com linhas. Desconsiderando a última coluna (de zeros) em cada uma dessas matrizes, poderemos concluir que a forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.

(*c*) ⇒ (*d*) Suponha que a forma escalonada reduzida por linhas de A seja I_n, de modo que A pode ser reduzida a I_n por uma sequência finita de operações elementares com linhas. Pelo Teorema 1.5.1, cada uma dessas operações pode ser efetuada por uma matriz elementar apropriada. Assim, podemos encontrar matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tais que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I_n \tag{3}$$

Pelo Teorema 1.5.2, as matrizes $E_1, E_2, \ldots, E_k$ são invertíveis. Multiplicando ambos lados da Equação (3) pela esquerda sucessivamente por $E_k^{-1}, \ldots E_2^{-1}, E_1^{-1}$, obtemos

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}I_n = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \tag{4}$$

Pelo Teorema 1.5.2, essa equação expressa A como um produto de matrizes elementares.

(d) ⇒ ***(a)*** Se A for um produto de matrizes elementares, então, pelos Teoremas 1.4.7 e 1.5.2, segue que a matriz A é um produto de matrizes invertíveis e, portanto, é invertível. ◀

Um método para inverter matrizes

Como uma primeira aplicação do Teorema 1.5.3, desenvolvemos um procedimento (algoritmo) que pode ser usado para determinar se uma dada matriz é invertível e, se for, calcular sua inversa. Para deduzir esse algoritmo, suponha, provisoriamente, que A seja uma matriz $n \times n$ invertível. Na Equação (3), as matrizes elementares efetuam uma sequência de operações sobre linhas que reduzem A a I. Multiplicando ambos lados dessa equação à direita por A^{-1} e simplificando, obtemos

$$A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 I_n$$

Essa equação nos informa que *a mesma sequência de operações elementares com linhas que reduz A a* I_n *também reduz* I_n *a* A^{-1}. Assim, estabelecemos o seguinte resultado.

Algoritmo da inversão Para encontrar a inversa de uma matriz invertível A, encontre uma sequência de operações elementares com linhas que reduza A à identidade e depois efetue essa mesma sequência de operações em I_n para obter A^{-1}.

Um método simples para executar esse procedimento é dado no próximo exemplo.

▶ EXEMPLO 4 Usando operações com colunas para encontrar A^{-1}

Encontre a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Solução Queremos reduzir A à matriz identidade por operações com linhas e, simultaneamente, aplicar essas operações a I para produzir A^{-1}. Para conseguir isso, juntamos a matriz identidade à direita de A, com o que produzimos uma matriz da forma

$$[A \mid I]$$

Em seguida, efetuamos operações com as linhas dessa matriz até que o lado esquerdo esteja reduzido a I; essas operações converterão o lado direito a A^{-1}, de modo que a matriz final terá a forma

$$[I \mid A^{-1}]$$

As contas são as seguintes.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

← Somamos -2 vezes a primeira linha à segunda e -1 vez a primeira linha à terceira.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

← Somamos 2 vezes a segunda linha à terceira.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

← Multiplicamos a terceira linha por -1.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

← Somamos 3 vezes a terceira linha à segunda e -3 vezes a terceira linha à primeira.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

← Somamos -2 vezes a segunda linha à primeira.

Assim,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$ ◀

Muitas vezes, não se sabe de antemão se uma dada matriz A é ou não invertível. No entanto, se A não for invertível, então, pelas partes (*a*) e (*c*) do Teorema 1.5.3, será impossível reduzir A a I_n por operações elementares com linhas. Isso se tornará visível em algum ponto do algoritmo de inversão com o aparecimento de uma linha de zeros *no lado esquerdo* das matrizes juntadas. Se isso ocorrer, podemos interromper as contas e concluir que A não é invertível.

▶ EXEMPLO 5 Mostrando que uma matriz não é invertível

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Aplicando o procedimento do Exemplo 4, obtemos

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

← Somamos −2 vezes a primeira linha à segunda e somamos a primeira linha à terceira.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

← Somamos a segunda linha à terceira.

Como obtivemos uma linha de zeros no lado esquerdo, A não é invertível.

▶ EXEMPLO 6 Analisando sistemas homogêneos

Use o Teorema 1.5.3 para determinar se o sistema homogêneo dado tem soluções não triviais.

$$\text{(a)}\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(b)}\quad \begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solução Pelas partes (*a*) e (*b*) do Teorema 1.5.3, um sistema linear homogêneo tem somente a solução trivial se, e só se, sua matriz de coeficientes for invertível. Pelos Exemplos 4 e 5, a matriz de coeficientes do sistema (a) é invertível e a do sistema (b) não é. Assim, o sistema (a) tem apenas a solução trivial, ao passo que o sistema (b) tem soluções não triviais. ◀

Revisão de conceitos

- Matrizes equivalentes por linhas
- Matriz elementar
- Operações inversas
- Algoritmo de inversão

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se uma dada matriz quadrada é elementar.
- Determinar se duas matrizes quadradas são equivalentes por linhas.
- Efetuar a inversa de uma dada operação elementar com as linhas.
- Aplicar operações elementares para reduzir uma dada matriz quadrada à matriz identidade.
- Entender as relações entre afirmações equivalentes à invertibilidade de uma matriz quadrada (Teorema 1.5.3).
- Usar o algoritmo da inversão para encontrar a inversa de uma matriz invertível.
- Expressar uma matriz invertível como um produto de matrizes elementares.

Conjunto de exercícios 1.5

1. Em cada parte, decida se a matriz é elementar.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Em cada parte, decida se a matriz é elementar.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Em cada parte, encontre uma operação com linhas e a matriz elementar correspondente que retorna a matriz elementar dada à matriz identidade.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Em cada parte, encontre uma operação com linhas e a matriz elementar correspondente que retorna a matriz elementar dada à matriz identidade.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Em cada parte, são dadas uma matriz elementar E e uma matriz A. Escreva as operações elementares com linhas correspondentes a E e mostre que, aplicando essas operações a A, o resultado é o produto EA.

(a) $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$

(b) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

6. Em cada parte, são dadas uma matriz elementar E e uma matriz A. Escreva as operações elementares com linhas correspondentes a E e mostre que, aplicando essas operações a A, resultado é o produto EA.

(a) $E = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$

(b) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **7–8**, use as matrizes a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -6 & 21 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 8 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$ ◀

7. Encontre uma matriz elementar E que satisfaça a equação.

(a) $EA = B$ (b) $EB = A$

(c) $EA = C$ (d) $EC = A$

8. Encontre uma matriz elementar E que satisfaça a equação.

(a) $EB = D$ (b) $ED = B$

(c) $EB = F$ (d) $EF = B$

▶ Nos Exercícios **9–24**, use o algoritmo de inversão para encontrar a inversa da matriz dada, se essa inversa existir. ◀

9. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **25–26**, em cada parte, encontre a inversa da matriz 4 × 4 dada, em que k_1, k_2, k_3, k_4 e k são todos não nulos. ◀

25. (a) $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

26. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **27–28**, encontre todos os valores de c, se houver, com os quais a matriz dada é invertível. ◀

27. $\begin{bmatrix} c & c & c \\ 1 & c & c \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **29–32**, escreva a matriz dada como um produto de matrizes elementares. ◀

29. $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **33–36**, escreva a *inversa* da matriz dada como um produto de matrizes elementares. ◀

33. A matriz do Exercício 29.

34. A matriz do Exercício 30.

35. A matriz do Exercício 31.

36. A matriz do Exercício 32.

▶ Nos Exercícios **37–38**, mostre que as matrizes A e B dadas são equivalentes por linhas, e encontre uma sequência de operações elementares com linhas que produza B a partir de A. ◀

37. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

38. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -5 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

39. Mostre que, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

for uma matriz elementar, então pelo menos uma das entradas da terceira linha deve ser nula.

40. Mostre que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

não é invertível, com qualquer valor das entradas.

41. Prove que se A e B forem matrizes $m \times n$, então A e B são equivalentes por linhas se, e só se, A e B têm a mesma forma escalonada reduzida por linhas.

42. Prove que se A for uma matriz invertível e B for equivalente por linhas a A, então B também é invertível.

43. Mostre que se B for obtida de A por meio de uma sequência de operações elementares com linhas, então existe uma segunda sequência de operações elementares com linhas que, aplicada a B, produz A.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(g), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) O produto de duas matrizes elementares de mesmo tamanho é uma matriz elementar.

(b) Toda matriz elementar é invertível.

(c) Se A e B são equivalentes por linhas e B e C são equivalentes por linhas, então A e C são equivalentes por linhas.

(d) Se A for uma matriz não invertível $n \times n$, então o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem uma infinidade de soluções.

(e) Se A for uma matriz não invertível $n \times n$, então a matriz obtida pela troca de duas linhas de A não pode ser invertível.

(f) Se A for uma matriz invertível, e um múltiplo da primeira linha de A for somado à segunda linha, então a matriz resultante é invertível.

(g) É única a expressão de uma matriz invertível A como um produto de matrizes elementares.

1.6 Mais sobre sistemas lineares e matrizes invertíveis

Nesta seção, mostramos como a inversa de uma matriz pode ser usada para resolver um sistema linear e desenvolvemos mais resultados sobre matrizes invertíveis.

Número de soluções de um sistema linear

Na Seção 1.1, afirmamos (tomando por base as Figuras 1.1.1 e 1.1.2) que todo sistema linear tem ou nenhuma solução, ou exatamente uma solução, ou uma infinidade de soluções. Agora estamos em condições de provar esse resultado fundamental.

TEOREMA 1.6.1 *Um sistema de equações lineares tem zero, uma ou uma infinidade de soluções.*

Prova Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é um sistema de equações lineares, vale exatamente uma das afirmações: (a) o sistema não tem solução, (b) o sistema tem exatamente uma solução ou (c) o sistema tem mais de uma solução. A prova estará completa se conseguirmos mostrar que o sistema tem uma infinidade de soluções no caso (c).

Suponha que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tenha mais de uma solução e seja $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, onde $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ são duas soluções distintas quaisquer. Como $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ são distintas, a matriz $\mathbf{x}_0$ é não nula; além disso,

$$A\mathbf{x}_0 = A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Se k for um escalar qualquer, então

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}_1 + k\mathbf{x}_0) &= A\mathbf{x}_1 + A(k\mathbf{x}_0) = A\mathbf{x}_1 + k(A\mathbf{x}_0) \\ &= \mathbf{b} + k\mathbf{0} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

No entanto, isso significa que $\mathbf{x}_1 + k\mathbf{x}_0$ é uma solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Como $\mathbf{x}_0$ é não nula e existe uma infinidade de escolhas para k, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma infinidade de soluções. ◀

Resolvendo sistemas lineares por inversão matricial

Até aqui, estudamos dois *procedimentos* para resolver sistemas lineares, a saber, a eliminação de Gauss-Jordan e a eliminação gaussiana. O teorema seguinte fornece, efetivamente, uma *fórmula* para a solução de um sistema linear de n equações em n incógnitas no caso em que a matriz de coeficientes for invertível.

TEOREMA 1.6.2 *Se A for uma matriz invertível $n \times 1$, então para cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$, o sistema de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução, a saber, $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.*

Prova Como $A(A^{-1}\mathbf{b}) = \mathbf{b}$, segue que $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ é uma solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Para mostrar que essa é a única solução, vamos supor que $\mathbf{x}_0$ seja uma solução arbitrária e mostrar que, necessariamente, $\mathbf{x}_0$ é a solução $A^{-1}\mathbf{b}$.

Se $\mathbf{x}_0$ for uma solução qualquer, então $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$. Multiplicando ambos lados dessa equação por A^{-1}, obtemos $\mathbf{x}_0 = A^{-1}\mathbf{b}$. ◀

▶ EXEMPLO 1 Solução de um sistema linear usando A^{-1}

Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

No formato matricial, esse sistema pode ser escrito como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

No Exemplo 4 da seção precedente, mostramos que A é invertível e que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Pelo Teorema 1.6.2, a solução do sistema é

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ou $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$. ◀

Não esqueça que o método do Exemplo 1 só pode ser aplicado quando o sistema tiver o mesmo número de equações e incógnitas, e a matriz de coeficientes for invertível.

Sistemas lineares com uma matriz de coeficientes em comum

Com frequência, nos deparamos com a resolução de uma sequência de sistemas

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_3, \ldots, \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$$

cada um dos quais tem a mesma matriz de coeficientes A. Se A for invertível, então as soluções

$$\mathbf{x}_1 = A^{-1}\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{x}_2 = A^{-1}\mathbf{b}_2, \quad \mathbf{x}_3 = A^{-1}\mathbf{b}_3, \ldots, \quad \mathbf{x}_k = A^{-1}\mathbf{b}_k$$

podem ser obtidas com uma inversão matricial e k multiplicações de matrizes. Uma maneira eficiente de fazer isso é formar a matriz em blocos

$$[A \mid \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_k] \tag{1}$$

em que a matriz de coeficientes A foi "aumentada" por todas as k matrizes $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$, e, em seguida, reduzir (1) à forma escalonada reduzida por linhas com eliminação de Gauss-Jordan. Dessa forma, podemos resolver todos os k sistemas de uma só vez. Esse método tem a vantagem adicional de poder ser aplicado mesmo se A não for invertível.

▶ **EXEMPLO 2 Resolvendo dois sistemas lineares de uma só vez**

Resolva os sistemas

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 + 8x_3 &= 9 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 + 8x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Solução Os dois sistemas têm a mesma matriz de coeficientes. Aumentando essa matriz de coeficientes com as colunas das constantes à direita desses sistemas, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 9 & -6 \end{array}\right]$$

Reduzindo essa matriz à forma escalonada reduzida por linhas, obtemos (verifique)

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Segue das duas últimas colunas que a solução do sistema (a) é $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$ e a do sistema (b) é $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$. ◀

Propriedades de matrizes invertíveis

Até aqui, para mostrar que uma matriz A de tamanho $n \times n$ é invertível, tem sido necessário encontrar uma matriz B de tamanho $n \times n$ tal que

$$AB = I \quad \text{e} \quad BA = I$$

O próximo teorema mostra que, se obtivermos uma matriz B de tamanho $n \times n$ satisfazendo *qualquer uma* dessas condições, então a outra condição é automaticamente válida.

TEOREMA 1.6.3 *Seja A uma matriz quadrada.*

(*a*) *Se B for uma matriz quadrada satisfazendo $BA = I$, então $B = A^{-1}$.*

(*b*) *Se B for uma matriz quadrada satisfazendo $AB = I$, então $B = A^{-1}$.*

Provamos a parte (*a*) e deixamos a parte (*b*) como exercício.

Prova (a) Suponha que $BA = I$. Se conseguirmos mostrar que A é invertível, a prova poderá ser completada multiplicando $BA = I$ de ambos lados por A^{-1} para obter

$$BAA^{-1} = IA^{-1} \quad \text{ou} \quad BI = IA^{-1} \quad \text{ou} \quad B = A^{-1}$$

Para mostrar que A é invertível, é suficiente mostrar que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem só a solução trivial (ver Teorema 1.5.3). Seja $\mathbf{x}_0$ uma solução qualquer desse sistema. Multiplicando ambos lados de $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ à esquerda por B, obteremos $BA\mathbf{x}_0 = B\mathbf{0}$, $I\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Assim, o sistema de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial. ◀

Teorema da equivalência

Agora estamos em condições de acrescentar mais duas afirmações equivalentes às quatro dadas no Teorema 1.5.3.

TEOREMA 1.6.4 Afirmações equivalentes

Se A for uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes.

(*a*) *A é invertível.*

(*b*) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *tem somente a solução trivial.*

(*c*) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é* I_n.

(*d*) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*

(*e*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *é consistente com cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho* $n \times 1$.

(*f*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tem exatamente uma solução com cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho* $n \times 1$.

Prova Como no Teorema 1.5.3 já provamos que (*a*), (*b*), (*c*) e (*d*) são equivalentes, é suficiente provar que $(a) \Rightarrow (f) \Rightarrow (e) \Rightarrow (a)$.

(*a*) ⇒ (*f*) Isso já foi provado no Teorema 1.6.2.

(*f*) ⇒ (e) Isso é quase evidente, pois, se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiver exatamente uma solução, com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$, então $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ será consistente, com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$.

(e) ⇒ (*a*) Se o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for consistente, com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$, então, em particular, são consistentes os sistemas

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \quad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sejam $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ soluções desses sistemas, respectivamente, e formemos uma matriz C de tamanho $n \times n$ tendo essas soluções como colunas. Assim, C tem a forma

$$C = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{x}_n]$$

Como já discutimos na Seção 1.3, as sucessivas colunas do produto AC são

$$A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2, \ldots, A\mathbf{x}_n$$

[ver Fórmula (8) da Seção 1.3.]. Assim,

$$AC = [A\mathbf{x}_1 \mid A\mathbf{x}_2 \mid \cdots \mid A\mathbf{x}_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$$

Pela parte (*b*) do Teorema 1.6.3, segue que $C = A^{-1}$. Assim, A é invertível. ◀

Segue da equivalência das partes (*e*) e (*f*) que, se conseguirmos mostrar que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem *pelo menos uma* solução, com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$, então podemos concluir que há *exatamente uma* solução, com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$.

Sabemos de trabalho anterior que fatores matriciais invertíveis produzem um produto invertível. Reciprocamente, o teorema a seguir mostra que se o produto de matrizes quadradas for invertível, então os próprios fatores devem ser invertíveis.

TEOREMA 1.6.5 *Sejam A e B matrizes quadradas de mesmo tamanho. Se AB for invertível, então A e B também serão invertíveis.*

O problema fundamental a seguir ocorrerá com frequência em vários contextos no nosso trabalho.

Um problema fundamental Seja A uma matriz $m \times n$ fixada. Encontre todas as matrizes $\mathbf{b}$ de tamanho $m \times 1$ tais que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ seja consistente.

Se A for uma matriz invertível, o Teorema 1.6.2 resolve esse problema completamente afirmando que, com *qualquer* matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $m \times 1$, o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem a única solução $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Se A não for quadrada, ou se A for quadrada, mas não invertível, então o Teorema 1.6.2 não pode ser aplicado. Nesses casos, geralmente a matriz $\mathbf{b}$ deve satisfazer certas condições para garantir que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ seja consistente. O próximo exemplo ilustra como os métodos da Seção 1.2 podem ser usados para determinar tais condições.

▶ EXEMPLO 3 Determinando consistência por eliminação

Quais condições devem satisfazer b_1, b_2, e b_3 para garantir que o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ x_1 \qquad + x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

seja consistente?

Solução A matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{bmatrix}$$

que pode ser reduzida à forma escalonada, como segue.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

← -1 vez a primeira linha foi somada à segunda e -2 vezes a primeira linha foi somada à terceira.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

← A segunda linha foi multiplicada por -1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}$$

← A segunda linha foi somada à terceira.

Agora é evidente, pela terceira linha da matriz, que o sistema tem uma solução se, e só se, b_1, b_2 e b_3 satisfazem a condição

$$b_3 - b_2 - b_1 = 0 \quad \text{ou} \quad b_3 = b_1 + b_2$$

Para expressar essa condição de uma outra maneira, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente se, e só se, $\mathbf{b}$ é uma matriz da forma

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

em que b_1 e b_2 são arbitrários.

▶ EXEMPLO 4 Determinando consistência por eliminação

Quais condições devem satisfazer b_1, b_2 e b_3 para garantir que o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= b_2 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

seja consistente?

Solução A matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{bmatrix}$$

Reduzindo essa matriz à forma escalonada reduzida por linhas, obtemos (verifique)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40b_1 + 16b_2 + 9b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 13b_1 - 5b_2 - 3b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 5b_1 - 2b_2 - b_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Nesse caso, não há restrições sobre b_1, b_2 e b_3, de modo que o sistema tem a única solução

$$x_1 = -40b_1 + 16b_2 + 9b_3, \quad x_2 = 13b_1 - 5b_2 - 3b_3, \quad x_3 = 5b_1 - 2b_2 - b_3 \tag{3}$$

com quaisquer valores de b_1, b_2 e b_3. ◀

O que o resultado do Exemplo 4 nos diz sobre a matriz de coeficientes do sistema?

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se um sistema de equações lineares não tem solução, tem exatamente uma solução ou uma infinidade de soluções.
- Resolver sistemas lineares invertendo a matriz de coeficientes.
- Resolver simultaneamente sistemas lineares múltiplos com a mesma matriz de coeficientes.
- Conhecer as condições adicionais de invertibilidade enunciadas no Teorema de Equivalência.

Conjunto de exercícios 1.6

▶ Nos Exercícios **1–8**, resolva o sistema invertendo a matriz de coeficientes e usando o Teorema 1.6.2. ◀

1. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 9 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 &= -3 \\ 2x_1 - 5x_2 &= 9 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x + y - 4z &= 10 \\ -4x + y + z &= 0 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} - x - 2y - 3z &= 0 \\ w + x + 4y + 4z &= 7 \\ w + 3x + 7y + 9z &= 4 \\ -w - 2x - 4y - 6z &= 6 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= b_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$

▶ Nos Exercícios **9–12**, resolva simultaneamente os sistemas lineares reduzindo a matriz aumentada apropriada. ◀

9. $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= b_1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

(i) $b_1 = 1,\ b_2 = 4$ (ii) $b_1 = -2,\ b_2 = 5$

10. $\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 + 9x_2 - 2x_3 &= b_2 \\ 6x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$

(i) $b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0$
(ii) $b_1 = -3,\ b_2 = 4,\ b_3 = -5$

11. $\begin{aligned} 4x_1 - 7x_2 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

(i) $b_1 = 0,\ b_2 = 1$ (ii) $b_1 = -4,\ b_2 = 6$
(iii) $b_1 = -1,\ b_2 = 3$ (iv) $b_1 = -5,\ b_2 = 1$

12. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ -x_1 - 2x_2 \quad\quad &= b_2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

(i) $b_1 = 1, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = -1$
(ii) $b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 1$
(iii) $b_1 = -1, \quad b_2 = -1, \quad b_3 = 0$

▶ Nos Exercícios **13–17**, determine, se houver, as condições que as constantes b devem satisfazer para garantir a consistência do sistema linear dado. ◀

13. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= b_1 \\ -2x_1 + x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} 6x_1 - 4x_2 &= b_1 \\ 3x_1 - 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= b_2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= b_1 \\ -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= b_1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= b_2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= b_3 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= b_4 \end{aligned}$$

18. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ pode ser reescrita como $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e use esse resultado para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para $\mathbf{x}$.

(b) Resolva $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$.

▶ Nos Exercícios **19–20**, resolva a equação matricial dada para X. ◀

19. $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

20. $$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

21. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ um sistema homogêneo de n equações lineares em n incógnitas cuja única solução é a trivial. Mostre que se k for um inteiro positivo qualquer, então o sistema $A^k\mathbf{x} = 0$ também só tem a solução trivial.

22. Sejam $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ um sistema homogêneo de n equações lineares em n incógnitas e Q uma matriz invertível $n \times n$. Mostre que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial se, e só se, $(QA)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.

23. Sejam $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ um sistema de equações lineares consistente arbitrário e $\mathbf{x}_1$ uma solução fixada. Mostre que qualquer solução do sistema pode ser escrita na forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$, em que $\mathbf{x}_0$ é a solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Mostre, também, que qualquer matriz dessa forma é uma solução.

24. Use a parte (*a*) do Teorema 1.6.3 para provar a parte (*b*).

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(g), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) É impossível que um sistema de equações lineares tenha exatamente duas soluções.

(b) Se A é uma matriz quadrada, e se o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma única solução, então o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ também tem uma única solução.

(c) Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $AB = I_n$, então $BA = I_n$.

(d) Se A e B são matrizes equivalentes por linhas, então os sistemas lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ têm o mesmo conjunto de soluções.

(e) Sejam A uma matriz $n \times n$ e S uma matriz $n \times n$ invertível. Se $\mathbf{x}$ for uma solução do sistema linear $(S^{-1}AS)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, então $S\mathbf{x}$ será uma solução do sistema linear $A\mathbf{y} = S\mathbf{b}$.

(f) Seja A uma matriz $n \times n$. O sistema linear $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$ tem uma solução única se, e só se, $A - 4I$ for uma matriz invertível.

(g) Sejam A e B matrizes $n \times n$. Se A ou B (ou ambas) não for invertível, então tampouco AB será invertível.

1.7 Matrizes diagonais, triangulares e simétricas

Nesta seção, discutimos matrizes que têm vários formatos especiais. Essas matrizes surgem numa grande variedade de aplicações e desempenham um papel importante no nosso trabalho subsequente.

Matrizes diagonais

Uma matriz quadrada em que todas as entradas fora da diagonal principal são zero é denominada ***matriz diagonal***. Aqui temos alguns exemplos.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Uma matriz diagonal arbitrária D de tamanho $n \times n$ pode ser escrita como

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

Uma matriz diagonal é invertível se, e só se, todas as suas entradas na diagonal são não nulas; nesse caso, a inversa de (1) é

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

Confirme a Fórmula (2) mostrando que

$$DD^{-1} = D^{-1}D = I$$

As potências de matrizes diagonais são fáceis de calcular; deixamos para o leitor verificar que se D for a matriz diagonal (1) e k um inteiro positivo, então

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix} \tag{3}$$

▶ EXEMPLO 1 Inversas e potências de matrizes diagonais

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

então

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -243 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}, \quad A^{-5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{243} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{32} \end{bmatrix}$$ ◀

Os produtos de matrizes que envolvem fatores diagonais são especialmente fáceis de calcular. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & d_1a_{13} & d_1a_{14} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & d_2a_{23} & d_2a_{24} \\ d_3a_{31} & d_3a_{32} & d_3a_{33} & d_3a_{34} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1a_{11} & d_2a_{12} & d_3a_{13} \\ d_1a_{21} & d_2a_{22} & d_3a_{23} \\ d_1a_{31} & d_2a_{32} & d_3a_{33} \\ d_1a_{41} & d_2a_{42} & d_3a_{43} \end{bmatrix}$$

Em palavras, *para multiplicar uma matriz A à esquerda por uma matriz diagonal D, podemos multiplicar as linhas sucessivas de A pelas entradas sucessivas na diagonal de D e, para multiplicar A à direita por D, podemos multiplicar as colunas sucessivas de A pelas entradas sucessivas na diagonal de D.*

Matrizes triangulares

Uma matriz quadrada com todas as entradas acima da diagonal principal nulas é denominada ***triangular inferior***, e uma matriz quadrada com todas as entradas abaixo da diagonal principal nulas é denominada ***triangular superior***. Dizemos que uma matriz triangular inferior ou triangular superior é ***triangular***.

EXEMPLO 2 Matrizes triangulares superiores e inferiores

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Uma matriz triangular superior 4×4 arbitrária.

Uma matriz triangular inferior 4×4 arbitrária.

Observação Observe que matrizes diagonais são triangulares inferiores e superiores, pois têm zeros acima e abaixo da diagonal principal. Observe também que uma matriz *quadrada* em forma escalonada é triangular superior, pois tem zeros abaixo da diagonal principal.

Propriedades de matrizes triangulares

O Exemplo 2 ilustra os quatro fatos seguintes sobre matrizes triangulares que enunciamos sem demonstrações formais.

- Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é triangular superior se, e só se, todas as entradas à esquerda da diagonal principal são nulas, ou seja, $a_{ij} = 0$ com $i > j$ (Figura 1.7.1).
- Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é triangular inferior se, e só se, todas as entradas à direita da diagonal principal são nulas, ou seja, $a_{ij} = 0$ com $i < j$ (Figura 1.7.1).
- Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é triangular superior se, e só se, para cada i, a i–ésima linha começa com, pelo menos, $i - 1$ zeros.
- Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é triangular inferior se, e só se, para cada j, a j–ésima coluna começa com, pelo menos, $j - 1$ zeros.

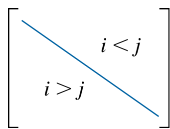


Figura 1.7.1

O teorema a seguir lista algumas das propriedades de matrizes triangulares.

TEOREMA 1.7.1

(*a*) *A transposta de uma matriz triangular inferior é triangular superior, e a transposta de uma matriz triangular superior é triangular inferior.*

(*b*) *O produto de matrizes triangulares inferiores é triangular inferior, e o produto de matrizes triangulares superiores é triangular superior.*

(*c*) *Uma matriz triangular é invertível se, e só se, suas entradas diagonais são todas não nulas.*

(*d*) *A inversa de uma matriz triangular inferior invertível é triangular inferior, e a inversa de uma matriz triangular superior invertível é triangular superior.*

A parte (*a*) é evidente, pois transpor uma matriz quadrada corresponde a refletir suas entradas em torno da diagonal principal; omitimos a prova formal. Provamos (*b*), mas vamos adiar as provas de (*c*) e (*d*) para o próximo capítulo, onde teremos as ferramentas necessárias para provar esses resultados de maneira mais eficiente.

Prova (b) Provamos o resultado para matrizes triangulares inferiores; a prova para matrizes triangulares superiores é análoga. Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes $n \times n$ trian-

gulares inferiores e seja $C = [c_{ij}]$ o produto $C = AB$. Podemos provar que C é triangular inferior mostrando que $c_{ij} = 0$, com $i < j$. Mas, pela definição de multiplicação matricial,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Supondo que $i < j$, os termos dessa expressão podem ser agrupados como segue.

$$c_{ij} = \underbrace{a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{i(j-1)}b_{(j-1)j}}_{\substack{\text{Termos com o número de}\\ \text{linha de } b \text{ menor do que}\\ \text{o número de coluna de } b}} + \underbrace{a_{ij}b_{jj} + \cdots + a_{in}b_{nj}}_{\substack{\text{Termos com o número de}\\ \text{linha de } a \text{ menor do que}\\ \text{o número de coluna de } a}}$$

No primeiro agrupamento, todos os fatores de b são nulos, pois B é triangular inferior e, no segundo agrupamento, todos os fatores de a são nulos, pois A é triangular inferior. Assim, $c_{ij} = 0$, que é o que queríamos mostrar. ◀

▶ EXEMPLO 3 Contas com matrizes triangulares

Considere as matrizes triangulares superiores

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue da parte (c) do Teorema 1.7.1 que a matriz A é invertível, mas a matriz B não é. Além disso, o teorema também nos diz que A^{-1}, AB e BA são triangulares superiores. Deixamos para o leitor a confirmação dessas três afirmações, mostrando que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ ◀

Matrizes simétricas

DEFINIÇÃO 1 Uma matriz quadrada A é dita ***simétrica*** se $A = A^T$.

▶ EXEMPLO 4 Matrizes simétricas

As seguintes matrizes são simétricas, já que cada uma delas é igual à sua transposta (verifique).

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$ ◀

É fácil reconhecer visualmente a simetria de uma matriz: as entradas na diagonal principal não têm restrições, mas as entradas que estão posicionadas simetricamente em relação à diagonal principal devem ser iguais. Segue uma figura usando a segunda matriz do Exemplo 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Todas as matrizes diagonais, como a terceira matriz do Exemplo 4, têm essa propriedade.

Observação Segue da Fórmula (11) da Seção 1.3 que uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é simétrica se, e só se,

$$(A)_{ij} = (A)_{ji} \tag{4}$$

com quaisquer valores de i e j.

O teorema seguinte lista as principais propriedades algébricas das matrizes simétricas. As provas são consequências diretas do Teorema 1.4.8 e são omitidas.

TEOREMA 1.7.2 *Sendo A e B matrizes simétricas de mesmo tamanho e k um escalar qualquer, então*

(*a*) A^T *é simétrica.*

(*b*) $A + B$ *e* $A - B$ *são simétricas.*

(*c*) kA *é simétrica.*

Não é verdade, em geral, que o produto de matrizes simétricas seja uma matriz simétrica. Para ver por que isso ocorre, sejam A e B matrizes simétricas de mesmo tamanho. Pela parte (*e*) do Teorema 1.4.8 e a simetria de A e B, temos

$$(AB)^T = B^TA^T = BA$$

Assim, $(AB)^T = AB$ se, e só se, $AB = BA$, isto é, se, e só se, A e B comutam. Em resumo, obtivemos o resultado seguinte.

TEOREMA 1.7.3 *O produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica se, e só se, as matrizes comutam.*

▶ EXEMPLO 5 Produtos de matrizes simétricas

A primeira das equações a seguir mostra um produto de matrizes simétricas que *não* é uma matriz simétrica, e a segunda mostra um produto de matrizes simétricas que *é* uma matriz simétrica. Concluímos que os fatores da primeira equação não comutam, mas que os da segunda comutam. Deixamos para o leitor verificar que isso ocorre.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad ◀$$

Invertibilidade de matrizes simétricas

Em geral, uma matriz simétrica não precisa ser invertível; por exemplo, uma matriz quadrada com um zero na diagonal principal é simétrica, mas não é invertível. Contudo, o próximo teorema mostra que se ocorrer que uma matriz simétrica é invertível, então sua inversa também é simétrica.

TEOREMA 1.7.4 *Se A for uma matriz simétrica invertível, então* A^{-1} *é simétrica.*

Prova Suponha que A seja simétrica e invertível. Pelo Teorema 1.4.9 e pelo fato de que $A = A^T$, decorre

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$$

provando que A^{-1} é simétrica. ◀

Produtos AA^T *e* A^TA

Numa variedade de aplicações, surgem produtos matriciais da forma AA^T e A^TA. Se A for uma matriz $m \times n$, então A^T é uma matriz $n \times m$, de modo que ambos produtos AA^T e A^TA são matrizes quadradas, a matriz AA^T de tamanho $m \times m$ e a matriz A^TA de tamanho $n \times n$. Esses produtos são sempre simétricos, pois

$$(AA^T)^T = (A^T)^TA^T = AA^T \quad \text{e} \quad (A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$$

▶ EXEMPLO 6 O produto de uma matriz e sua transposta é uma matriz simétrica

Seja A a matriz 2×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Então

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -11 \\ -2 & 4 & -8 \\ -11 & -8 & 41 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -17 \\ -17 & 34 \end{bmatrix}$$

Observe que A^TA e AA^T são simétricas, como se esperava. ◀

Adiante, neste texto, obteremos condições gerais sobre A sob as quais AA^T e A^TA são invertíveis. Contudo, no caso especial em que A é *quadrada*, temos o seguinte resultado.

TEOREMA 1.7.5 *Se A for uma matriz invertível, então AA^T e A^TA também serão invertíveis.*

Prova Como A é invertível, também A^T é invertível, pelo Teorema 1.4.9. Assim, AA^T e A^TA são invertíveis, por serem produtos de matrizes invertíveis. ◀

Revisão de conceitos

- Matriz diagonal
- Matriz triangular inferior
- Matriz triangular superior
- Matriz triangular
- Matriz simétrica

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se uma matriz diagonal é invertível sem fazer contas.
- Calcular mentalmente produtos matriciais envolvendo matrizes diagonais.
- Determinar se uma matriz é triangular.
- Entender como a transposição afeta matrizes diagonais e triangulares.
- Entender como a inversão afeta matrizes diagonais e triangulares.
- Determinar se uma matriz é simétrica.

Conjunto de exercícios 1.7

▶ Nos Exercícios **1–4**, determine se a matriz dada é invertível. ◀

1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **5–8**, determine o produto por inspeção. ◀

5. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & -5 & 3 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **9–12**, encontre por inspeção A^2, A^{-2} e A^{-k} (sendo k um inteiro qualquer). ◀

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **13–19**, decida se a matriz é simétrica. ◀

13. $\begin{bmatrix} -8 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 0 & -7 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -6 \\ 2 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **20–22**, decida por inspeção se a matriz é invertível. ◀

20. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & -5 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **23–24**, encontre todos os valores das constantes desconhecidas que tornam a matriz A simétrica. ◀

23. $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ a+5 & -1 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 2 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & 5 & a+c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **25–26**, encontre todos os valores de x que tornam a matriz A invertível. ◀

25. $A = \begin{bmatrix} x-1 & x^2 & x^4 \\ 0 & x+2 & x^3 \\ 0 & 0 & x-4 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} x-\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ x & x-\frac{1}{3} & 0 \\ x^2 & x^3 & x+\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **27–28**, encontre uma matriz diagonal A que satisfaz a condição dada. ◀

27. $A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

28. $A^{-2} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

29. Verifique o Teorema 1.7.1(b) para o produto AB, com

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

30. Verifique o Teorema 1.7.1(d) para as matrizes A e B do Exercício 29.

31. Em cada parte, verifique o Teorema 1.7.4 para a matriz dada.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

32. Seja A uma matriz simétrica $n \times n$.

(a) Mostre que A^2 é simétrica.

(b) Mostre que $2A^2 - 3A + I$ é simétrica.

33. Prove que se $A^TA = A$, então A é simétrica e $A = A^2$.

34. Encontre todas as matrizes diagonais A de tamanho 3×3 que satisfazem $A^2 - 3A - 4I = 0$.

35. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$. Em cada caso, determine se A é simétrica.

(a) $a_{ij} = i^2 + j^2$ (b) $a_{ij} = i^2 - j^2$

(c) $a_{ij} = 2i + 2j$ (d) $a_{ij} = 2i^2 + 2j^3$

36. Usando sua experiência com o Exercício 35, projete um teste geral que possa ser aplicado a uma fórmula para a_{ij} para determinar se $A = [a_{ij}]$ é simétrica.

37. Dizemos que uma matriz quadrada A é ***antissimétrica*** se $A^T = -A$. Prove cada afirmação dada.

(a) Se A for uma matriz antissimétrica invertível, então A^{-1} é antissimétrica.

(b) Se A e B são antissimétricas, então também o são A^T, $A + B$, $A - B$ e kA, com qualquer escalar k.

(c) Toda matriz quadrada A pode ser expressa como a soma de uma matriz simétrica e uma matriz antissimétrica. [*Sugestão*: observe a identidade $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.]

▶ Nos Exercícios **38–39**, preencha as entradas marcadas com um × para produzir uma matriz antissimétrica. ◀

38. $A = \begin{bmatrix} \times & \times & 4 \\ 0 & \times & \times \\ \times & -1 & \times \end{bmatrix}$ **39.** $A = \begin{bmatrix} \times & 0 & \times \\ \times & \times & -4 \\ 8 & \times & \times \end{bmatrix}$

40. Encontre todos os valores de a, b, c e d com os quais A é antissimétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2a - 3b + c & 3a - 5b + 5c \\ -2 & 0 & 5a - 8b + 6c \\ -3 & -5 & d \end{bmatrix}$$

41. Mostramos no Teorema 1.7.3 que o produto de matrizes simétricas é uma matriz simétrica se, e só se, as matrizes comutam. Será o produto de matrizes antissimétricas que comutam uma matriz antissimétrica? Explique. [*Observação*: ver Exercício 37 para a definição de antissimétrica.]

42. Se a matriz A de tamanho $n \times n$ pode ser expressa como $A = LU$, em que L é uma matriz triangular inferior e U é uma matriz triangular superior, então o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser expresso como $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e pode ser, portanto, resolvido em dois passos, como segue.

Passo 1. Seja $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, de modo que $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser escrito como $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Resolva esse sistema.

Passo 2. Resolva o sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ em $\mathbf{x}$.

Em cada parte, use esse método de dois passos para resolver o sistema dado.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

43. Encontre uma matriz triangular superior que satisfaça

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 30 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(m), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) A transposta de uma matriz diagonal é uma matriz diagonal.

(b) A transposta de uma matriz triangular superior é uma matriz triangular superior.

(c) A soma de uma matriz triangular superior e uma triangular inferior é uma matriz diagonal.

(d) Todas as entradas de uma matriz simétrica são determinadas pelas entradas que ocorrem na diagonal principal e acima dela.

(e) Todas as entradas de uma matriz triangular superior são determinadas pelas entradas que ocorrem na diagonal principal e acima dela.

(f) A inversa de uma matriz triangular inferior invertível é uma matriz triangular superior.

(g) Uma matriz diagonal é invertível se, e só se, todas as entradas diagonais são positivas.

(h) A soma de uma matriz diagonal e uma matriz triangular inferior é uma matriz triangular inferior.

(i) Uma matriz simétrica e triangular superior é diagonal.

(j) Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $A + B$ é simétrica, então A e B são simétricas.

(k) Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $A + B$ é triangular superior, então A e B são triangulares superiores.

(l) Se A^2 for simétrica, então A será uma matriz simétrica.

(m) Se kA for uma matriz simétrica com algum $k \neq 0$, então A será uma matriz simétrica.

1.8 Aplicações de sistemas lineares

Nesta seção, discutiremos resumidamente algumas aplicações de sistemas lineares. Essa é apenas uma pequena amostragem da ampla variedade de problemas do mundo real aos quais é aplicável nosso estudo de sistemas lineares.

Análise de redes

O conceito de *rede* aparece numa variedade de aplicações. Em termos gerais, uma ***rede*** é um conjunto de ***ramos*** através dos quais "flui" algum meio. Os ramos, por exemplo, podem ser fios elétricos através dos quais flui corrente elétrica, canos através dos quais flui água ou petróleo, ruas de uma cidade pelas quais fluem veículos, ou conexões financeiras pelas quais flui dinheiro, para citar apenas alguns.

Os ramos da maioria das redes se encontram em pontos denominados ***nós*** ou ***vértices***, nos quais o fluxo divide. Por exemplo, numa rede elétrica, os nós ocorrem onde três ou

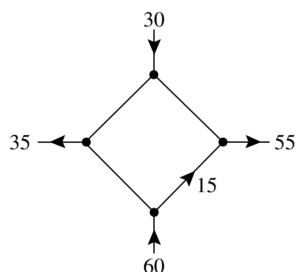
mais fios se juntam; na rede do trânsito, eles ocorrem em cruzamentos de ruas; e numa rede financeira, eles ocorrem em centros bancários, nos quais o dinheiro é distribuído a indivíduos ou outras instituições.

No estudo de redes, existe, em geral, alguma medida numérica da taxa segundo a qual o meio flui ao longo do ramo. Por exemplo, o fluxo de uma corrente elétrica, em geral, é medido em ampères; a taxa de fluxo da água ou petróleo, em litros por minuto; a do fluxo do trânsito, em veículos por hora; e a taxa do fluxo de moeda europeia, em milhões de euros por dia. Vamos restringir nossa atenção às redes em que há ***conservação do fluxo*** em cada nó, com o que queremos dizer que *a taxa de fluxo para dentro de qualquer nó é igual à taxa de fluxo para fora desse nó*. Isso garante que o meio não se acumula nos nós e não impede o movimento livre do meio ao longo da rede.

Um problema comum na análise de redes é usar taxas de fluxo conhecidas em certos ramos para encontrar a taxa de fluxo em todos os demais ramos da rede. Aqui temos um exemplo.

► EXEMPLO 1 Análise de redes usando sistemas lineares

A Figura 1.8.1 mostra uma rede de quatro nós com indicação de algumas taxas de fluxo e sentido do fluxo ao longo de ramos. Encontre as taxas de fluxo e o sentido do fluxo nos demais ramos.



▲ Figura 1.8.1

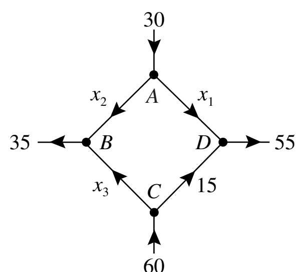
Solução Como ilustra a Figura 1.8.2, associamos sentidos arbitrários para as taxas de fluxos x_1, x_2 e x_3. Não precisamos nos preocupar com a veracidade desses sentidos, pois um sentido incorreto acabará recebendo um valor negativo para a taxa de fluxo quando tivermos resolvido para as incógnitas.

Segue da conservação do fluxo no nó A que

$$x_1 + x_2 = 30$$

Analogamente, nos demais nós, obtemos

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 35 \quad \text{(nó B)} \\ x_3 + 15 &= 60 \quad \text{(nó C)} \\ x_1 + 15 &= 55 \quad \text{(nó D)} \end{aligned}$$



▲ Figura 1.8.2

Essas quatro condições produzem o sistema linear

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 30 \\ x_2 + x_3 &= 35 \\ x_3 &= 45 \\ x_1 &= 40 \end{aligned}$$

que podemos, agora, tentar resolver para as taxas de fluxo desconhecidas. Nesse caso particular, o sistema é suficientemente simples para resolvê-lo sem fazer contas (de baixo para cima). Deixamos para o leitor confirmar que a solução é

$$x_1 = 40, \quad x_2 = -10, \quad x_3 = 45$$

Como x_2 é negativo, vemos que o sentido do fluxo naquele ramo da Figura 1.8.2 está incorreto, pois o fluxo naquele ramo é *para dentro* do nó A.

► EXEMPLO 2 Projetando padrões de tráfego

A rede da Figura 1.8.3 mostra uma proposta de fluxo de tráfego de uma certa cidade em torno de uma de suas praças, a Praça 15. O plano prevê a instalação de um semáforo computadorizado na saída norte da Rua Lavradio, e o diagrama indica o número médio de veículos por hora que se espera ter nas ruas que circundam o complexo da praça. Todas as ruas são de mão única.

(a) O semáforo deveria deixar passar quantos veículos por hora para garantir que o número médio de veículos por hora que entra no complexo seja igual ao número médio de veículos que sai do complexo?

(b) Supondo que o semáforo tenha sido ajustado para equilibrar o fluxo total para dentro e para fora do complexo da praça, o que pode ser dito sobre o número médio de veículos por hora que circulará pelas ruas que circundam o complexo?

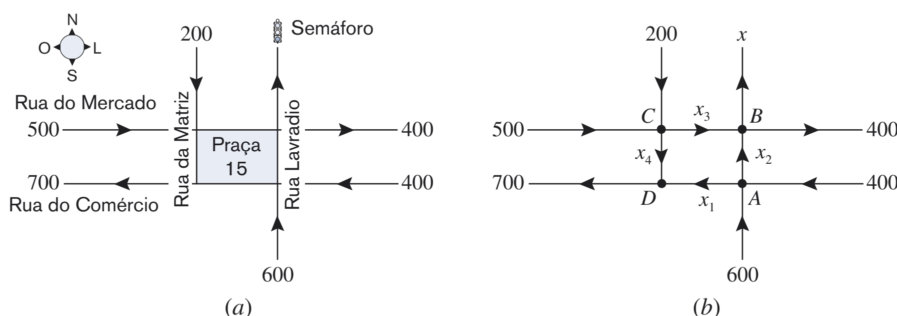


Figura 1.8.3

Solução (a) Se x for o número de veículos por hora que o semáforo deve deixar passar, conforme Figura 1.8.3(*b*), então o número total de veículos por hora que entra e sai do complexo da praça será

Para dentro: $500 + 400 + 600 + 200 = 1.700$
Para fora: $x + 700 + 400$

Igualando os fluxos para fora e para dentro, vemos que o semáforo deveria deixar passar 600 veículos por hora.

Solução (b) Para evitar congestionamentos de trânsito, o fluxo para dentro de cada cruzamento deve igualar o fluxo para fora do cruzamento. Para isso acontecer, as condições seguintes devem estar satisfeitas.

Cruzamento	Fluxo para dentro		Fluxo para fora
A	$400 + 600$	=	$x_1 + x_2$
B	$x_2 + x_3$	=	$400 + x$
C	$500 + 200$	=	$x_3 + x_4$
D	$x_1 + x_4$	=	700

Assim, com $x = 600$, como calculamos na parte (a), obtemos o sistema linear seguinte.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 1.000 \\ x_2 + x_3 \qquad &= 1.000 \\ x_3 + x_4 &= 700 \\ x_1 \qquad\qquad + x_4 &= 700 \end{aligned}$$

Deixamos para o leitor mostrar que esse sistema tem uma infinidade de soluções e que estas são dadas pelas equações paramétricas

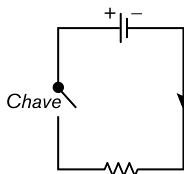
$$x_1 = 700 - t, \quad x_2 = 300 + t, \quad x_3 = 700 - t, \quad x_4 = t \tag{1}$$

Contudo, nesse exemplo, o parâmetro t não é completamente arbitrário, pois há restrições físicas a considerar. Por exemplo, as taxas de fluxo médias devem ser não negativas, pois estamos supondo ruas de mão única, e uma taxa de fluxo negativa indicaria um fluxo na contramão. Portanto, vemos de (1) que t pode ser qualquer número real que satisfaça $0 \leq t \leq 700$, o que implica que a taxa de fluxo média ao longo das ruas ficará dentro das cotas

$$0 \leq x_1 \leq 700, \quad 300 \leq x_2 \leq 1.000, \quad 0 \leq x_3 \leq 700, \quad 0 \leq x_4 \leq 700$$ ◀

Circuitos elétricos

Em seguida, mostramos como a análise de redes pode ser usada para analisar circuitos elétricos constituídos de capacitores e resistores. Um ***capacitor*** é uma fonte de energia elétrica, como uma bateria, e um ***resistor*** é um elemento que dissipa energia elétrica, como uma lâmpada. A Figura 1.8.4 mostra o diagrama esquemático de um circuito com um capacitor (representado pelo símbolo ⊣⊢), um resistor (representado pelo símbolo –⁄\/\/\/–) e uma chave. O capacitor tem um ***polo positivo*** (+) e um ***polo negativo*** (−). Quando a chave está fechada, consideramos a corrente elétrica fluindo a partir do polo positivo do capacitor, através do resistor, e de volta ao polo negativo do capacitor (indicado pela seta na figura).

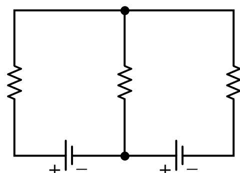


▲ **Figura 1.8.4**

A corrente elétrica, que é um fluxo de elétrons por fios, tem um comportamento muito parecido com o do fluxo de água por canos. Um capacitor funciona como uma bomba que cria "pressão elétrica" para aumentar a taxa de fluxo dos elétrons, e um resistor age como uma restrição num cano que reduz a taxa de fluxo dos elétrons. O termo técnico para a pressão elétrica é ***tensão elétrica***, que usualmente é medida em ***volts*** (V). A ***resistência*** é o quanto o resistor reduz a tensão elétrica, e costuma ser medida em ***ohms*** (Ω). A taxa de fluxo dos elétrons num fio é denominada a intensidade de ***corrente***, e é usualmente medida em ***ampères*** (A). O efeito preciso de um resistor é dado pela seguinte lei.

Lei de Ohm Se uma corrente de I ampères passa por um resistor com uma resistência de R ohms, então o resultado é uma queda da tensão elétrica de E volts, que é o produto da corrente pela resistência, ou seja,

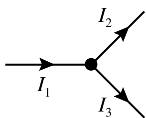
$$E = IR$$



▲ **Figura 1.8.5**

Uma rede elétrica típica possui vários capacitores e resistores ligados por alguma configuração de fios. Um ponto no qual três ou mais fios da rede se encontram é um ***nó*** da rede. Um ***ramo*** é um fio ligando dois nós, e um ***laço fechado*** é uma sucessão de ramos conectados que começa e termina no mesmo nó. Por exemplo, o circuito elétrico da Figura 1.8.5 tem dois nós e três laços fechados, dois internos e um externo. À medida que a corrente flui pelo circuito elétrico, ela passa por aumentos e diminuições de tensão elétrica, que são as ***elevações*** e as ***quedas*** de voltagem, respectivamente. O comportamento da corrente nos nós e em torno de laços fechados é governado por duas leis fundamentais.

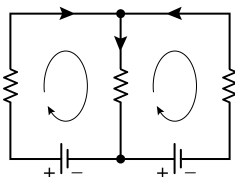
Lei das correntes de Kirchhoff A soma das correntes fluindo para dentro de qualquer nó é igual à soma das correntes fluindo para fora do nó.



▲ **Figura 1.8.6**

Lei das tensões de Kirchhoff Em uma volta em torno de qualquer laço fechado, a soma das elevações de voltagem é igual à soma das quedas de voltagem.

A lei das correntes de Kirchhoff é uma versão para circuitos elétricos do princípio da conservação do fluxo num nó, que enunciamos para redes gerais. Assim, por exemplo, as correntes no nó superior da Figura 1.8.6 satisfazem a equação $I_1 = I_2 + I_3$.



Convenção de laço fechado horário com sentidos arbitrários atribuídos às correntes nos ramos

▲ **Figura 1.8.7**

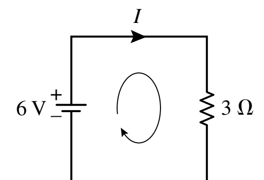
Em geral, não é possível saber de antemão os sentidos nos quais estão fluindo as correntes em circuitos com vários laços e capacitores; por isso, na análise de circuitos, é costume atribuir sentidos *arbitrários* aos fluxos das correntes nos vários ramos e deixar os cálculos matemáticos determinarem se os sentidos atribuídos estão corretos. Além de atribuir sentidos aos fluxos de corrente, a lei das tensões de Kirchhoff requer um sentido de percurso para cada laço fechado. A escolha é sempre arbitrária, mas para obter alguma consistência, sempre tomaremos esse sentido como sendo o *horário* (Figura 1.8.7). Também introduzimos as seguintes convenções.

- Se o sentido associado à corrente através do resistor for o mesmo que o sentido associado ao laço, então ocorre uma queda de voltagem no resistor e, se o sentido associado à corrente através do resistor for o oposto do sentido associado ao laço, então ocorre uma elevação de voltagem no resistor.
- Se o sentido associado à corrente através do laço for de − para + num capacitor, então ocorre uma elevação de voltagem no capacitor e, se o sentido associado à corrente através do laço for de + para − num capacitor, então ocorre uma queda de voltagem no capacitor.

Seguindo essas convenções ao calcular intensidades de correntes, as correntes cujos sentidos de fluxo foram atribuídos corretamente serão positivas, e aquelas cujos sentidos de fluxo foram atribuídos incorretamente serão negativas.

▶ EXEMPLO 3 Um circuito com um laço fechado

Determine a corrente I do circuito mostrado na Figura 1.8.8.



▲ Figura 1.8.8

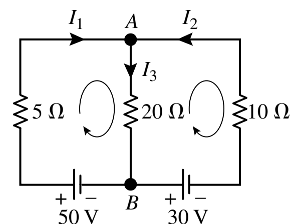
Solução Como o sentido atribuído à corrente pelo resistor é igual ao sentido do laço, temos uma queda de voltagem no resistor. Pela lei de Ohm, essa voltagem é $E = IR = 3I$. Além disso, como o sentido do laço é de − para + no capacitor, temos um aumento de voltagem de 6 volts no capacitor. Assim, pela lei das tensões de Kirchhoff, segue que

$$3I = 6$$

e concluímos que a corrente é $I = 2$A. Como I é positivo, está correto o sentido atribuído ao fluxo da corrente.

▶ EXEMPLO 4 Um circuito com três laços fechados

Determine as correntes I_1, I_2 e I_3 do circuito mostrado na Figura 1.8.9.



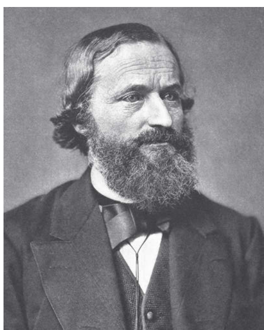
▲ Figura 1.8.9

Solução Usando os sentidos atribuídos às correntes, a lei das correntes de Kirchhoff fornece uma equação para cada nó:

Nó	Corrente para dentro		Corrente para fora
A	$I_1 + I_2$	=	I_3
B	I_3	=	$I_1 + I_2$

Contudo, essas equações realmente são iguais, pois ambas podem ser escritas como

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \qquad (2)$$



Gustav Kirchhoff (1824–1887)

Nota histórica O físico alemão Gustav Kirchhoff foi um aluno de Gauss. Seu trabalho sobre as leis que levam seu nome, anunciado em 1854, foi um avanço considerável no cálculo de correntes, voltagem e resistência de circuitos elétricos. Kirchhoff era severamente incapacitado, tendo passado a maior parte de sua vida de muletas ou em cadeira de rodas.

[Imagem: ©SSPL/The Image Works]

Para encontrar valores únicos para as correntes, vamos precisar de mais duas equações, que obtemos com a lei das tensões de Kirchhoff. Podemos ver, pelo diagrama do circuito, que há três laços fechados: um laço interno à esquerda com um capacitor de 50 V, um laço interno à direita com um capacitor de 30 V e o laço externo que contém ambos capacitores. Assim, a lei das tensões de Kirchhoff de fato fornece três equações. Num percurso horário dos laços, as quedas e as elevações de voltagem nesses três laços são como segue.

	Elevação de voltagem	**Queda de voltagem**
Laço interno à esquerda	50	$5I_1 + 20I_3$
Laço interno à direita	$30 + 10I_2 + 20I_3$	0
Laço externo	$30 + 50 + 10I_2$	$5I_1$

Essas condições podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} 5I_1 \qquad\quad + 20I_3 &= 50 \\ 10I_2 + 20I_3 &= -30 \\ 5I_1 - 10I_2 \qquad\quad &= 80 \end{aligned} \tag{3}$$

Contudo, por ser a diferença das duas primeiras, a última equação é supérflua. Assim, combinando (2) e as duas primeiras equações de (3), obtemos o sistema linear de três equações em três incógnitas que segue.

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ 5I_1 \qquad\quad + 20I_3 &= 50 \\ 10I_2 + 20I_3 &= -30 \end{aligned}$$

Deixamos para o leitor resolver esse sistema e mostrar que $I_1 = 6$A, $I_2 = -5$ A e $I_3 = 1A$. Como I_2 é negativo, vemos que o sentido da corrente é o oposto do indicado na Figura 1.8.9. ◀

Equilibrando equações químicas

Os componentes químicos são representados por ***fórmulas químicas*** que descrevem a composição atômica de suas moléculas. Por exemplo, a fórmula química da água é H_2O, pois é composta de dois átomos de hidrogênio e um átomo de oxigênio, e a fórmula química do oxigênio estável é O_2, pois é composto de dois átomos de oxigênio.

Quando combinamos compostos químicos sob condições corretas, os átomos de suas moléculas se rearranjam e formam novos componentes. Por exemplo, na queima de metano, o metano (CH_4) e o oxigênio estável (O_2) reagem para formar dióxido de carbono (CO_2), ou gás carbônico, e água (H_2O). Isso é indicado pela ***equação química***



$$CH_4 + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O \tag{4}$$

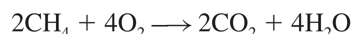
As moléculas à esquerda da seta são denominadas ***reagentes***, e as à direita são os ***produtos***. Nessa equação, o sinal de mais serve somente para separar as moléculas e não tem conotação de operação algébrica. Contudo, essa equação não conta toda a história, pois deixa de mencionar as proporções de moléculas necessárias para uma ***reação completa*** (sem sobra de reagentes). Por exemplo, podemos ver, no lado direito de (4), que, para produzir uma molécula de dióxido de carbono e uma molécula de água, precisamos de *três* átomos de oxigênio para cada átomo de carbono. Contudo, vemos, no lado esquerdo de (4), que uma molécula de metano e uma molécula de oxigênio estável têm somente *dois* átomos de oxigênio para cada átomo de carbono. Assim, para ter uma reação completa, a razão de metano para oxigênio estável do lado dos reagentes não pode ser de um para um.

Dizemos que uma reação química está ***equilibrada*** se aparecer o mesmo número de átomos em cada lado da seta para cada tipo de átomo na reação. Por exemplo, a versão equilibrada da Equação (4) é



$$CH_4 + 2O_2 \longrightarrow CO_2 + 2H_2O \qquad (5)$$

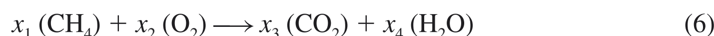
com a qual queremos indicar que combinamos uma molécula de metano com duas de oxigênio estável para produzir uma molécula de gás carbônico e duas moléculas de água. Poderíamos perfeitamente multiplicar toda a equação por qualquer inteiro positivo. Por exemplo, multiplicando todos os termos por 2, obtemos a equação química equilibrada



$$2CH_4 + 4O_2 \longrightarrow 2CO_2 + 4H_2O$$

Contudo, é convenção padrão utilizar os menores inteiros positivos que equilibram a equação.

A Equação (4) é suficientemente simples para ser equilibrada por tentativa e erro, mas equações químicas mais complicadas requerem um método mais sistemático. Existem vários métodos que podem ser usados, mas veremos um que usa sistemas de equações lineares. Para ilustrar o método, vamos reexaminar a Equação (4). Para equilibrar essa equação, precisamos encontrar inteiros x_1, x_2, x_3 e x_4 tais que



$$x_1\,(CH_4) + x_2\,(O_2) \longrightarrow x_3\,(CO_2) + x_4\,(H_2O) \qquad (6)$$

Para cada um dos átomos da equação, o número de átomos à esquerda deve ser igual ao número de átomos à direita. Expresso em formato tabular, temos

	Lado esquerdo		Lado direito
Carbono	x_1	=	x_3
Hidrogênio	$4x_1$	=	$2x_4$
Oxigênio	$2x_2$	=	$2x_3 + x_4$

de onde obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad - x_3 \qquad\quad &= 0 \\ 4x_1 \qquad\qquad\qquad - 2x_4 &= 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

A matriz aumentada desse sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Deixamos para o leitor mostrar que a forma escalonada reduzida por linhas dessa matriz é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

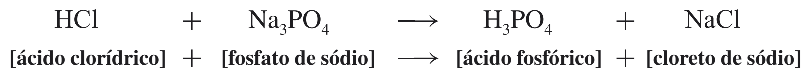
da qual concluímos que a solução geral desse sistema é

$$x_1 = t/2, \quad x_2 = t, \quad x_3 = t/2, \quad x_4 = t$$

em que t é arbitrário. Os menores valores inteiros positivos para as incógnitas ocorrem quando tomamos $t = 2$, de modo que podemos equilibrar a equação tomando $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$. Isso confere com nossa conclusão anterior, pois substituindo esses valores em (6), obtemos (5).

▶ EXEMPLO 5 Equilibrando equações químicas usando sistemas lineares

Equilibre a equação química



$$\begin{array}{ccccccc} HCl & + & Na_3PO_4 & \longrightarrow & H_3PO_4 & + & NaCl \\ \textbf{[ácido clorídrico]} & + & \textbf{[fosfato de sódio]} & \longrightarrow & \textbf{[ácido fosfórico]} & + & \textbf{[cloreto de sódio]} \end{array}$$

Solução Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 inteiros positivos que equilibram a equação



$$x_1\,(HCl) + x_2\,(Na_3PO_4) \longrightarrow x_3\,(H_3PO_4) + x_4\,(NaCl) \tag{7}$$

Igualando o número de átomos de cada tipo de ambos lados, resulta

$$\begin{aligned} 1x_1 &= 3x_3 && \textbf{Hidrogênio (H)} \\ 1x_1 &= 1x_4 && \textbf{Cloro (Cl)} \\ 3x_2 &= 1x_4 && \textbf{Sódio (Na)} \\ 1x_2 &= 1x_3 && \textbf{Fósforo (P)} \\ 4x_2 &= 4x_3 && \textbf{Oxigênio (O)} \end{aligned}$$

do que obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & & -\ 3x_3 & & = 0 \\ x_1 & & & -\ x_4 & = 0 \\ & 3x_2 & & -\ x_4 & = 0 \\ & x_2 & -\ \ x_3 & & = 0 \\ & 4x_2 & -\ 4x_3 & & = 0 \end{array}$$

Deixamos para o leitor mostrar que a forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada desse sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da qual concluímos que a solução geral desse sistema é

$$x_1 = t, \quad x_2 = t/3, \quad x_3 = t/3, \quad x_4 = t$$

onde t é arbitrário. Para obter os menores valores inteiros positivos que equilibram a equação, tomamos $t = 3$, e resulta $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ e $x_4 = 3$. Substituindo esses valores em (7), obtemos a equação equilibrada



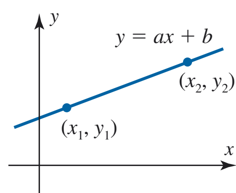
$$3HCl + Na_3PO_4 \longrightarrow H_3PO_4 + 3NaCl$$ ◀

Interpolação polinomial

Um problema importante em várias aplicações é encontrar um polinômio cujo gráfico passe por uma coleção de pontos especificados no plano; tal polinômio é dito ***polinômio interpolador*** dos pontos. O exemplo mais simples de um problema desses é encontrar um polinômio linear

$$p(x) = ax + b \tag{8}$$

cujo gráfico passe por dois pontos distintos conhecidos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) do plano xy (Figura 1.8.10). O leitor provavelmente aprendeu vários métodos da Geometria Analítica para encontrar a equação de uma reta por dois pontos, mas aqui daremos um método com base em sistemas lineares que pode ser adaptado à interpolação polinomial geral.



▲ **Figura 1.8.10**

O gráfico de (8) é a reta $y = ax + b$ e, para essa reta passar pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), devemos ter

$$y_1 = ax_1 + b \quad \text{e} \quad y_2 = ax_2 + b$$

Portanto, os coeficientes incógnitos a e b podem ser obtidos resolvendo o sistema linear

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \end{aligned}$$

Não precisamos de métodos geniais para resolver esse sistema; o valor de a pode ser obtido subtraindo as equações para eliminar b e, então, o valor de a pode ser substituído em qualquer uma das duas equações para encontrar b. Deixamos para o leitor encontrar a e b e mostrar que podem ser expressos na forma

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{e} \quad b = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1} \tag{9}$$

desde que tenhamos $x_1 \neq x_2$. Assim, por exemplo, a reta $y = ax + b$ que passa pelos pontos

$$(2, 1) \quad \text{e} \quad (5, 4)$$

podem ser obtida tomando $(x_1, y_1) = (2, 1)$ e $(x_2, y_2) = (5, 4)$, caso em que (9) fornece

$$a = \frac{4 - 1}{5 - 2} = 1 \quad \text{e} \quad b = \frac{(1)(5) - (4)(2)}{5 - 2} = -1$$

Portanto, a equação da reta é

$$y = x - 1$$

(Figura 1.8.11).

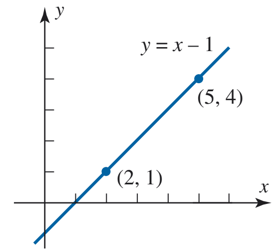


Figura 1.8.11

Consideremos, agora, o problema mais geral de encontrar um polinômio cujo gráfico passe pelos n pontos de coordenadas x distintas

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3), \ldots, \quad (x_n, y_n) \tag{10}$$

Como temos n condições a satisfazer, a intuição sugere que comecemos procurando por polinômios da forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \tag{11}$$

já que um polinômio dessa forma tem n coeficientes que estão à nossa disposição para satisfazer as n condições. Contudo, queremos permitir os casos em que alguns pontos estejam alinhados ou então satisfaçam alguma outra configuração, o que tornaria possível utilizar algum polinômio de grau menor do que $n - 1$; assim, vamos permitir que a_{n-1} e outros coeficientes em (11) sejam nulos.

O próximo teorema, que será provado mais adiante, é o resultado fundamental da interpolação polinomial.

TEOREMA 1.8.1 Interpolação polinomial

Dados quaisquer n pontos no plano xy que têm coordenadas x distintas, existe um único polinômio de grau $n - 1$ ou inferior cujo gráfico passa por esses pontos.

Vejamos, agora, como poderíamos encontrar o polinômio interpolador (11) cujo gráfico passa pelos pontos de (10). Como o gráfico desse polinômio é o gráfico da equação

$$y = a_0 + a_1x + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \tag{12}$$

segue que as coordenadas dos pontos satisfazem

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_{n-1}x_1^{n-1} &= y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_{n-1}x_2^{n-1} &= y_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad &\quad \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_{n-1}x_n^{n-1} &= y_n \end{aligned} \tag{13}$$

Estamos supondo que os valores dos x e y sejam conhecidos nessas equações, de modo que podemos ver esse sistema como um sistema linear nas incógnitas $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Desse ponto de vista, a matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & y_n \end{bmatrix} \tag{14}$$

e, portanto, podemos encontrar o polinômio interpolador reduzindo essa matriz à forma escalonada reduzida por linhas (eliminação de Gauss-Jordan).

▶ EXEMPLO 6 Interpolação polinomial por eliminação de Gauss-Jordan

Encontre um polinômio cúbico cujo gráfico passa pelos pontos

$$(1, 3), \quad (2,-2), \quad (3,-5), \quad (4, 0)$$

Solução Como há quatro pontos, utilizamos um polinômio interpolador de grau $n = 3$. Denote esse polinômio interpolador por

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

e denote as coordenadas x e y dos pontos dados por

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4 \quad \text{e} \quad y_1 = 3, \quad y_2 = -2, \quad y_3 = -5, \quad y_4 = 0$$

Assim, segue de (14) que a matriz aumentada do sistema linear nas incógnitas a_0, a_1, a_2 e a_3 é

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & y_3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -2 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & -5 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \end{bmatrix}$$

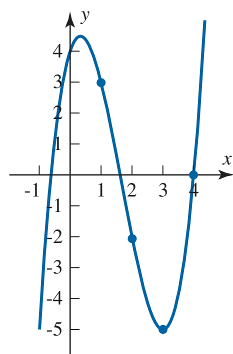
Deixamos para o leitor confirmar que a forma escalonada reduzida por linhas dessa matriz é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

da qual segue que $a_0 = 4$, $a_1 = 3$, $a_2 = -5$, $a_3 = 1$. Assim, o polinômio interpolador é

$$p(x) = 4 + 3x - 5x^2 + x^3$$

O gráfico desse polinômio e os pontos dados aparecem na Figura 1.8.12. ◀



▲ **Figura 1.8.12**

Observação Adiante veremos um método mais eficaz para encontrar polinômios interpoladores, que é mais recomendado nos problemas em que é grande o número de pontos dados.

▶ EXEMPLO 7 Integração aproximada

REQUER CÁLCULO E CALCULADORA

Não há como calcular a integral

$$\int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx$$

diretamente, pois não existe maneira de expressar a antiderivada do integrando em termos de funções elementares. Essa integral poderia ser aproximada pela regra de Simpson ou algum método comparável, mas uma abordagem alternativa é aproximar o integrando por um polinômio intepolador e integrar o polinômio aproximante. Por exemplo, considere os cinco pontos

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0{,}25, \quad x_2 = 0{,}5, \quad x_3 = 0{,}75, \quad x_4 = 1$$

que dividem o intervalo [0, 1] em quatro subintervalos de mesmo tamanho. Os valores de

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$$

nesses pontos são, aproximadamente,

$$f(0) = 0, \quad f(0{,}25) = 0{,}098017, \quad f(0{,}5) = 0{,}382683,$$
$$f(0{,}75) = 0{,}77301, \quad f(1) = 1$$

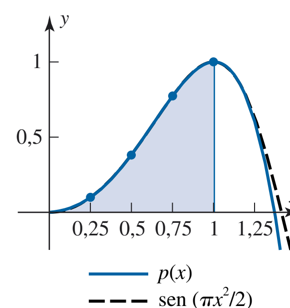
O polinômio interpolador é (verifique)

$$p(x) = 0{,}098796x + 0{,}762356x^2 + 2{,}14429x^3 - 2{,}00544x^4 \tag{15}$$

e

$$\int_0^1 p(x)\, dx \approx 0{,}438501 \tag{16}$$

Como mostra a Figura 1.8.13, os gráficos de f e de p se ajustam muito bem no intervalo [0, 1], de modo que a aproximação é bastante boa. ◀



▲ **Figura 1.8.13**

Revisão de conceitos

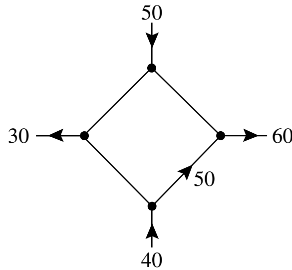
- Rede
- Ramo
- Nó
- Conservação do fluxo
- Circuitos elétricos: capacitor, resistor, polo (positivo e negativo), tensão elétrica, lei de Ohm, lei das correntes de Kirchhoff, lei das tensões de Kirchhoff
- Equações químicas: reagentes, produtos, equações equilibradas
- Interpolação polinomial

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar as taxas de fluxo e os sentido do fluxo nos ramos de uma rede.
- Encontrar a quantidade de corrente fluindo através das partes de um circuito elétrico.
- Escrever uma equação química equilibrada para uma dada reação química.
- Encontrar um polinômio interpolador para um gráfico passando por uma dada coleção de pontos.

Conjunto de exercícios 1.8

1. A figura dada mostra uma rede na qual são conhecidos a taxa de fluxo e o sentido do fluxo em alguns ramos. Encontre as taxas de fluxo e os sentidos do fluxo nos demais ramos.



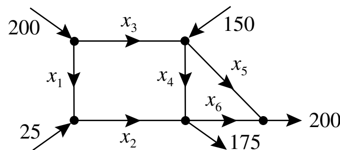
◀ **Figura Ex-1**

2. A figura dada mostra algumas taxas de fluxo de hidrocarbonetos para dentro e para fora de uma rede de canos de uma refinaria de petróleo.

(a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as taxas de fluxo desconhecidas.

(b) Resolva o sistema para as taxas de fluxo desconhecidas.

(c) Encontre as taxas de fluxo e os sentidos do fluxo se $x_4 = 50$ e $x_6 = 0$.



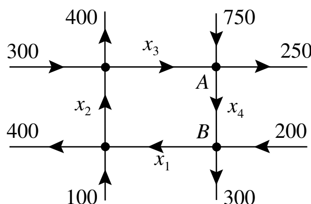
◀ **Figura Ex-2**

3. A figura dada mostra uma rede viária de ruas de mão única com fluxo de tráfego nos sentidos indicados. As taxas de fluxo ao longo das ruas são medidas pelo número médio de veículos por hora.

(a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as taxas de fluxo desconhecidas.

(b) Resolva o sistema para as taxas de fluxo desconhecidas.

(c) Se o fluxo ao longo da rua de A para B precisar ser reduzido em virtude de uma obra, qual será o fluxo mínimo necessário para manter o tráfego fluindo em todas as ruas?



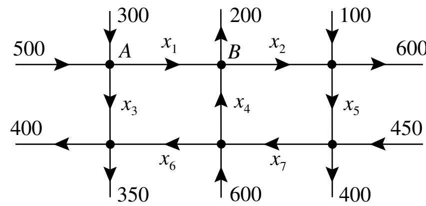
◀ **Figura Ex-3**

4. A figura dada mostra uma rede viária de ruas de mão única com fluxo de tráfego nos sentidos indicados. As taxas de fluxo ao longo das ruas são medidas pelo número médio de veículos por hora.

(a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as taxas de fluxo desconhecidas.

(b) Resolva o sistema para as taxas de fluxo desconhecidas.

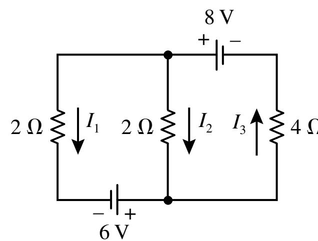
(c) É possível fechar a rua de A para B em virtude de uma obra e manter o tráfego fluindo em todas as outras ruas? Explique.



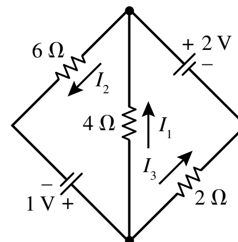
◀ **Figura Ex-4**

▶ Nos Exercícios **5–8**, analise os circuitos elétricos dados encontrando as correntes desconhecidas. ◀

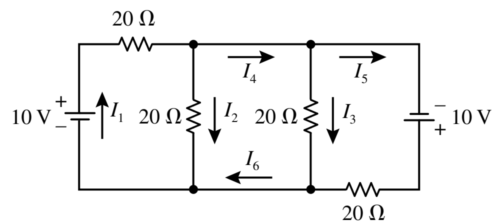
5.



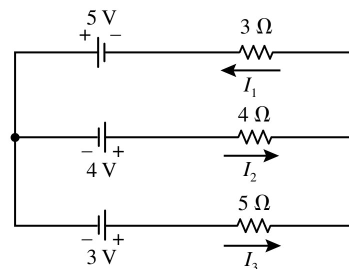
6.



7.



8.



▶ Nos Exercícios **9–12**, escreva uma equação equilibrada para a reação química dada. ◀

9. $C_3H_8 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$ (queima de propano)

10. $C_6H_{12}O_6 \rightarrow CO_2 + C_2H_5OH$ (fermentação do açúcar)

11. $CH_3COF + H_2O \rightarrow CH_3COOH + HF$

12. $CO_2 + H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$ (fotossíntese)

13. Encontre o polinômio quadrático cujo gráfico passa pelos pontos (1, 1), (2, 2) e (3, 5).

14. Encontre o polinômio quadrático cujo gráfico passa pelos pontos (0, 0), (−1, 1) e (1, 1).

15. Encontre o polinômio cúbico cujo gráfico passa pelos pontos (−1, −1), (0, 1), (1, 3), (4, −1).

16. A figura dada mostra o gráfico de um polinômio cúbico. Encontre o polinômio.

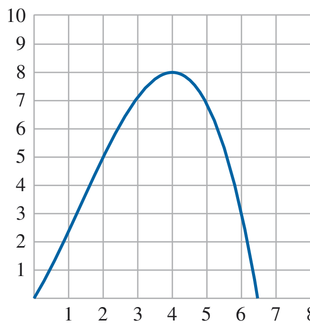


Figura Ex-16

17. (a) Encontre uma equação que represente a família de todos os polinômios de grau dois que passam pelos pontos (0, 1) e (1, 2). [*Sugestão*: a equação deve incluir um parâmetro arbitrário que produza os membros da família quando variar.]

(b) Esboce quatro curvas da família obtida a mão ou com a ajuda de uma ferramenta gráfica.

18. Nesta seção, selecionamos apenas algumas poucas aplicações de sistemas lineares. Usando uma ferramenta de busca na Internet, tente encontrar mais algumas aplicações desses sistemas ao mundo real. Selecione alguma de seu interesse e redija um parágrafo a respeito.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Numa rede qualquer, a soma dos fluxo para fora de algum nó deve ser igual à soma dos fluxos para dentro do nó.

(b) Quando uma corrente passa por um resistor, ocorre um aumento da tensão elétrica no circuito.

(c) A lei das correntes de Kirchhoff afirma que a soma das correntes fluindo para dentro de qualquer nó é igual à soma das correntes fluindo para fora do nó.

(d) Uma equação química está equilibrada se o número total de átomos em cada lado da equação for o mesmo.

(e) Dados n pontos do plano xy, existe um único polinômio de grau $n - 1$ ou inferior cujo gráfico passa por esses pontos.

1.9 Modelos econômicos de Leontief

Em 1973, o economista Wassily Leontief foi agraciado com o Prêmio Nobel pelo seu trabalho em modelagem econômica, no qual utilizou métodos matriciais para estudar as relações entre diferentes setores de uma economia. Nesta seção, discutiremos algumas das ideias desenvolvidas por Leontief.

Insumo e produto numa economia

Uma maneira de analisar uma economia é dividi-la em ***setores*** e estudar como os setores interagem entre si. Por exemplo, uma economia simples pode estar dividida em três setores: manufatura, agricultura e serviços. Tipicamente, um setor produz certos ***produtos***, mas requer ***insumos*** dos outros setores e de si mesmo. Por exemplo, o setor agrícola pode produzir trigo como produto, mas requer insumo de máquinas agrícolas do setor manufatureiro, energia elétrica do setor de serviços e alimento de seu próprio setor para alimentar seus trabalhadores. Assim, podemos imaginar uma economia como uma rede na qual fluem os insumos e os produtos entre os setores; o estudo desses fluxos é denominado ***análise de insumo-produto***. Os insumos e os produtos em geral são medidos em unidades monetárias (dólares, ou milhões de dólares, por exemplo, que denotamos simplesmente pelo cifrão $), mas também são possíveis outras medidas.

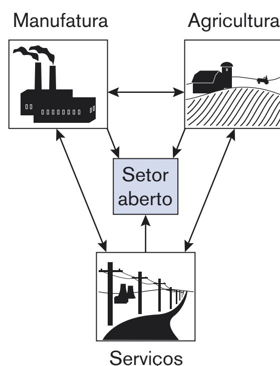
Os fluxos entre os setores de uma economia real não são sempre óbvios. Por exemplo, na Segunda Guerra Mundial, os Estados Unidos da América tiveram uma demanda por 50.000 novos aviões, que exigiu a construção de muitas novas fábricas de alumínio. Isso produziu uma demanda inesperadamente grande por certos componentes elétricos à base de cobre que, por sua vez, produziu uma escassez de cobre. O problema acabou sendo resolvido utilizando prata como substituto de cobre, sendo a prata tomada emprestada das

reservas governamentais depositadas em Fort Knox. É bastante provável que uma análise de insumo-produto moderna teria antecipado aquela escassez de cobre.

A maioria dos setores de uma economia produzirá produtos, mas podem existir setores que consomem produtos sem produzir nenhum produto (por exemplo, o setor dos consumidores). Aqueles setores que não produzem produtos são denominados ***setores abertos***. Economias sem setores abertos são denominadas ***economias fechadas***, e economias com um ou mais setores abertos são denominadas ***economias abertas*** (Figura 1.9.1). Nesta seção, vamos nos ocupar com economias de um setor aberto, e nosso objetivo principal será determinar os níveis de produção necessários para o setor produtivo sustentar a si mesmo e satisfazer a demanda do setor aberto.

O modelo de Leontief de uma economia aberta

Consideremos uma economia aberta simples com um setor aberto e três setores produtivos: manufatura, agricultura e serviços. Suponhamos que insumos e produtos sejam medidos em unidades monetárias ($) e que os insumos requeridos pelos setores produtivos para produzir uma unidade monetária de valor de produto estão de acordo com a Tabela 1 a seguir.



▲ **Figura 1.9.1**

Tabela 1

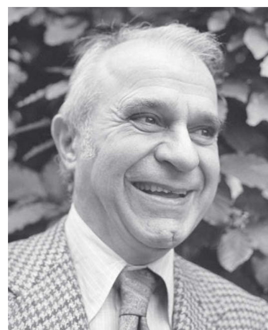
		Insumo requerido para produzir $1		
		Manufatura	**Agricultura**	**Serviços**
Fornecedor	**Manufatura**	$ 0,50	$ 0,10	$ 0,10
	Agricultura	$ 0,20	$ 0,50	$ 0,30
	Serviços	$ 0,10	$ 0,30	$ 0,40

Geralmente suprimimos as legendas da tabela e expressamos essa matriz como

$$C = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Essa é denominada a ***matriz de consumo*** da economia (ou, às vezes, a ***matriz tecnológica***). Os vetores-coluna

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,5 \\ 0,3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$



Wassily Leontief (1906–1999)

Nota histórica Não deixa de ser um pouco irônico que tenha sido Wassily Leontief, nascido na Rússia, quem recebeu o Prêmio Nobel de Economia de 1973, por seu trabalho que lançou os modernos métodos para analisar economias de mercado abertas. Leontief foi um estudante precoce que entrou na Universidade de Leningrado aos 15 anos. Incomodado pelas restrições intelectuais do regime soviético, acabou na cadeia por atividades anticomunistas e, depois, foi para a Universidade de Berlim, onde obteve seu doutorado em 1928. Foi para os Estados Unidos da América em 1931, ocupando uma cátedra na Universidade de Harvard e, depois, na Universidade de Nova York.

[Imagem: ©Bettmann/©Corbis]

de C listam os insumos necessários para os setores de manufatura, agricultura e serviços, respectivamente, produzirem \$1,00 de produto. Esses vetores são denominados ***vetores de consumo*** dos setores. Por exemplo, $\mathbf{c}_1$ nos diz que para produzir \$1,00 de valor de produto, o setor manufatureiro requer produtos no valor de \$0,50 do setor manufatureiro, no valor de \$0,20 do setor agrícola e no valor de \$0,10 do setor de serviços.

Qual é o significado econômico das somas das entradas de uma linha da matriz de consumo?

Continuando com o exemplo acima, vamos supor que o setor aberto necessita que a economia forneça bens manufaturados, produtos agrícolas e serviços com os valores em unidades monetárias seguintes.

d_1 unidades monetárias de bens manufaturados

d_2 unidades monetárias de produtos agrícolas

d_3 unidades monetárias de serviços

O vetor coluna **d** que tem esses números como componentes sucessivos é denominado ***vetor demanda externa***. Como os setores produtivos consomem alguns de seus próprios produtos, o valor em unidades monetárias de seus produtos precisa cobrir suas próprias necessidades mais a demanda externa. Suponhamos que os valores necessários para conseguir isso sejam

x_1 unidades monetárias de bens manufaturados

x_2 unidades monetárias de produtos agrícolas

x_3 unidades monetárias de serviços

O vetor coluna **x** que tem esses números como componentes sucessivos é denominado ***vetor de produção*** da economia. Para a economia com matriz de consumo (1), a porção do vetor de produção **x** que será consumido pelos três setores produtivos é

$$x_1\begin{bmatrix}0,5\\0,2\\0,1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0,1\\0,5\\0,3\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}0,1\\0,3\\0,4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,5 & 0,1 & 0,1\\0,2 & 0,5 & 0,3\\0,1 & 0,3 & 0,4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = C\mathbf{x}$$

As frações consumidas pela manufatura | As frações consumidas pela agricultura | As frações consumidas pelos serviços

O vetor $C\mathbf{x}$ é denominado ***vetor demanda intermediária*** da economia. Uma vez atendida a demanda intermediária, a porção da produção que resta para satisfazer as necessidades da demanda externa é $\mathbf{x} - C\mathbf{x}$. Assim, se o vetor demanda externa for **d**, então **x** deve satisfazer a equação

$$\mathbf{x} - C\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

Quantidade produzida | Demanda intermediária | Demanda externa

$$(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d} \tag{2}$$

A matriz $I - C$ é denominada ***matriz de Leontief*** e (2) é denominada ***equação de Leontief***.

▶ EXEMPLO 1 Satisfazendo a demanda externa

Considere a economia descrita na Tabela 1. Suponhamos que o setor aberto tenha uma demanda no valor de \$7.900 de produtos manufaturados, \$3.950 de produtos agrícolas e \$1.975 de serviços.

(a) A economia conseguirá atender essa demanda?

(b) Se conseguir, encontre um vetor de produção **x** que atenda exatamente essa demanda.

Solução A matriz de consumo, o vetor de produção e o vetor demanda externa são

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 7.900 \\ 3.950 \\ 1.975 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Para atender essa demanda, o vetor **x** deve satisfazer a equação de Leontief (2), portanto, o problema se reduz a resolver o sistema linear

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}5 & -0{,}3 \\ -0{,}1 & -0{,}3 & 0{,}6 \end{bmatrix}}_{I-C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7.900 \\ 3.950 \\ 1.975 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \tag{4}$$

(se for consistente). Deixamos para o leitor verificar que a forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada desse sistema é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 27.500 \\ 0 & 1 & 0 & 33.750 \\ 0 & 0 & 1 & 24.750 \end{array}\right]$$

Isso nos diz que (4) é consistente e que a economia consegue atender exatamente a demanda do setor aberto, produzindo um valor total de \$27.500 de produtos manufaturados, \$33.750 de produtos agrícolas e \$24.750 de serviços. ◀

Economias abertas produtivas

Na discussão precedente, consideramos uma economia aberta com três setores produtivos; as mesmas ideias se aplicam a economias com n setores produtivos. Nesse caso, a matriz de consumo, o vetor de produção e o vetor demanda externa têm a forma

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

em que todas as entradas são não negativas e

c_{ij} = ao valor monetário do produto do i-ésimo setor que é necessário para o j-ésimo setor produzir um produto no valor de uma unidade monetária

x_i = ao valor monetário do produto do i-ésimo setor

d_i = ao valor monetário do produto do i-ésimo setor que é necessário para atender a demanda do setor aberto

Observação Observe que o j-ésimo vetor coluna de C contém os valores monetários que o j-ésimo setor necessita dos outros setores para produzir um produto no valor de uma unidade monetária, e que o i-ésimo vetor linha de C contém os valores monetários exigidos do i-ésimo setor pelos outros setores para que cada um deles possa produzir um produto no valor de uma unidade monetária.

Conforme discutido no exemplo precedente, um vetor de produção **x** que atenda a demanda **d** do setor externo deve satisfazer a equação de Leontief

$$(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

Se a matriz $I - C$ for invertível, então essa equação tem a solução única

$$\mathbf{x} = (I - C)^{-1}\mathbf{d} \tag{5}$$

para cada vetor demanda **d**. Contudo, para **x** ser um vetor de produção válido, ele deve ter entradas não negativas, de modo que o problema de importância na Economia é determinar condições sob as quais a equação de Leontief tem uma solução com entradas não negativas.

No caso em que $I - C$ for invertível, é evidente, pelo formato de (5), que se $(I - C)^{-1}$ tem entradas não negativas, então, para cada vetor demanda **d**, o vetor **x** correspondente tem entradas não negativas e, portanto, é um vetor de produção válido para a economia. As economias nas quais $(I - C)^{-1}$ tem entradas não negativas são ditas ***produtivas***. Tais economias são particularmente desejáveis, pois a demanda pode ser sempre atendida por algum nível de produção apropriado. O próximo teorema, cuja prova pode ser encontrada em muitos livros de Economia, dá condições sob as quais são produtivas as economias abertas.

TEOREMA 1.9.1 *Se C for a matriz de consumo de uma economia aberta e se todas as somas das entradas de colunas forem menores do que 1, então a matriz $I - C$ é invertível, as entradas de $(I - C)^{-1}$ são não negativas e a economia é produtiva.*

Observação A soma das entradas da j-ésima coluna de C representa o valor total de insumo em unidades monetárias que é necessário para o j-ésimo setor produzir $1 de produto, de modo que se a soma das entradas da j-ésima coluna for menor do que 1, então o j-ésimo setor precisará de menos de $1 de insumo para produzir $1 de produto; nesse caso dizemos que o j-ésimo setor é ***rentável***. Assim, o Teorema 1.9.1 afirma que se todos os setores produtivos de uma economia aberta forem rentáveis, então a economia é produtiva. Nos exercícios, pedimos para o leitor mostrar que uma economia é produtiva se todas as somas das entradas de linhas de C forem menores do que 1 (Exercício 11). Assim, uma economia aberta será rentável se *ou* a soma das entradas de todas as colunas de C for menor do que 1 *ou* a soma das entradas de todas as linhas de C for menor do que 1.

▶ EXEMPLO 2 Uma economia aberta com todos os setores rentáveis

As somas das entradas de colunas da matriz de consumo C em (1) são menores do que 1, de modo que $(I - C)^{-1}$ existe e tem entradas não negativas. Use uma ferramenta computacional para confirmar isso e use essa inversa para resolver a Equação (4) no Exemplo 1.

Solução Deixamos para o leitor mostrar que

$$(I - C)^{-1} \approx \begin{bmatrix} 2{,}65823 & 1{,}13924 & 1{,}01266 \\ 1{,}89873 & 3{,}67089 & 2{,}15190 \\ 1{,}39241 & 2{,}02532 & 2{,}91139 \end{bmatrix}$$

Essa matriz tem entradas não negativas e

$$\mathbf{x} = (I - C)^{-1}\,\mathbf{d} \approx \begin{bmatrix} 2{,}65823 & 1{,}13924 & 1{,}01266 \\ 1{,}89873 & 3{,}67089 & 2{,}15190 \\ 1{,}39241 & 2{,}02532 & 2{,}91139 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.900 \\ 3.950 \\ 1.975 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 27.500 \\ 33.750 \\ 24.750 \end{bmatrix}$$

que é consistente com a solução do Exemplo 1. ◀

Revisão de conceitos

- Setores
- Insumos
- Produtos
- Análise de insumo-produto
- Setor aberto
- Economias: aberta, fechada
- Matriz de consumo (tecnológica)
- Vetor de consumo
- Vetor demanda externa
- Vetor de produção
- Vetor demanda intermediária
- Matriz de Leontief
- Equação de Leontief

Aptidões desenvolvidas

- Construir uma matriz de consumo para uma economia.
- Entender as relações entre os vetores de um setor de uma economia: consumo, demanda externa, de produção, demanda intermediária.

Conjunto de exercícios 1.9

1. Duas oficinas de conserto de veículos, uma que trata da parte mecânica (M) e outra de lataria (L), utilizam uma os serviços da outra. Para cada $1,00 de negócios que M faz, M utiliza $0,50 de seus próprios serviços e $0,25 dos serviços de L e, para cada $1,00 de negócios que L faz, L utiliza $0,10 de seus próprios serviços e $0,25 dos serviços de M.

(a) Construa uma matriz de consumo para essa economia.

(b) Quais valores de M e L devem ser produzidos para essa economia gerar negócios de $7.000,00 de serviços mecânicos e $14.000,00 de serviços de lataria?

2. Uma economia simples produz alimento (A) e moradia (M). A produção de $1,00 de alimento requer $0,30 de alimento e $0,10 de moradia, e a produção de $1,00 de moradia requer $0,20 de alimento e $0,60 de moradia.

(a) Construa uma matriz de consumo para essa economia.

(b) Quais valores de alimento e moradia devem ser produzidos para essa economia gerar negócios de $130.000,00 de alimento e $130.000,00 de moradia?

3. Considere a economia aberta descrita pela tabela dada, onde o insumo é em unidades monetárias ($) necessárias para $1,00 de produto.

(a) Encontre a matriz de consumo para essa economia.

(b) Suponha que o setor aberto tenha uma demanda no valor de $1.930 de moradia, $3.860 de alimento e $5.790 de serviços. Use redução por linhas para encontrar um vetor de produção que atenda essa demanda exatamente.

Tabela Ex-3

		Insumo requerido para produzir $1		
		Moradia	**Alimentação**	**Serviços**
Fornecedor	**Moradia**	$ 0,10	$ 0,60	$ 0,40
	Alimentação	$ 0,30	$ 0,20	$ 0,30
	Serviços	$ 0,40	$ 0,10	$ 0,20

4. Uma companhia produz projetos de *web*, desenvolve *software* e presta serviços de rede. Considere a companhia como uma economia aberta descrita pela tabela dada, onde o insumo é em unidades monetárias ($) necessárias para $1,00 de produto.

(a) Encontre a matriz de consumo para essa economia.

(b) Suponha que os consumidores (o setor aberto) tenham uma demanda no valor de $5.400 de projetos de web, $2.700 de *software* e $900 de serviços de rede. Use redução por linhas para encontrar um vetor de produção que atenda exatamente essa demanda.

Tabela Ex-4

		Insumo requerido para produzir $1		
		Projeto de web	***Software***	**Rede**
Fornecedor	**Projeto de Web**	$ 0,40	$ 0,20	$ 0,45
	Software	$ 0,30	$ 0,35	$ 0,30
	Rede	$ 0,15	$ 0,10	$ 0,20

Nos Exercícios **5–6**, use inversão matricial para encontrar o vetor de produção $\mathbf{x}$ que satisfaz a demanda $\mathbf{d}$ para a matriz de consumo C.

5. $C = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 50 \\ 60 \end{bmatrix}$

6. $C = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}$; $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 22 \\ 14 \end{bmatrix}$

7. Considere uma economia aberta com matriz de consumo

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que a economia pode atender uma demanda de $d_1 = 2$ unidades do primeiro setor e $d_2 = 0$ unidades do segundo setor, mas não consegue atender uma demanda de $d_1 = 2$ unidades do primeiro setor e $d_2 = 1$ unidades do segundo setor.

(b) Dê uma explicação matemática e uma explicação econômica para o resultado da parte (a).

8. Considere uma economia aberta com matriz de consumo

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Se o setor aberto demanda o mesmo valor em unidades monetárias de cada setor produtivo, qual desses setores deve produzir o maior valor monetário para atender a demanda da economia?

9. Considere uma economia aberta com matriz de consumo

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Mostre que a equação de Leontief $\mathbf{x} - C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ tem uma solução única com cada vetor demanda $\mathbf{d}$ se $c_{21}c_{12} < 1 - c_{11}$.

10. (a) Considere uma economia aberta com matriz de consumo C cujas somas das entradas de coluna são menores do que 1 e seja $\mathbf{x}$ o vetor de produção que satisfaz a demanda externa $\mathbf{d}$, ou seja, $(I - C)^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{x}$. Seja $\mathbf{d}_j$ o vetor demanda que é obtido aumentando a j-ésima entrada de $\mathbf{d}$ por 1 unidade e deixando as outras entradas fixas. Prove que o vetor de produção $\mathbf{x}_j$ que atende essa demanda é

$$\mathbf{x}_j + j\text{-ésimo vetor coluna de } (I - C)^{-1}$$

(b) Em palavras, qual é o significado econômico do j-ésimo vetor coluna de $(I - C)^{-1}$? [*Sugestão*: observe o vetor $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}$.]

11. Prove que se C for uma matriz $n \times n$ cujas entradas são não negativas e cujas somas das entradas de linhas são menores do que 1, então $I - C$ é invertível e tem entradas não negativas. [*Sugestão*: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ para uma matriz invertível qualquer A.]

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Os setores produtores da economia são denominados setores abertos.

(b) Uma economia fechada é uma que não tem setores abertos.

(c) As linhas de uma matriz de consumo representam os produtos de um setor da economia.

(d) Se a soma das entradas das colunas da matriz de consumo são menores do que 1, então a matriz de Leontief é invertível.

(e) A equação de Leontief relaciona o vetor de produção de uma economia com o vetor demanda externa.

Capítulo 1 Exercícios suplementares

► Nos Exercícios **1–4**, a matriz dada representa uma matriz aumentada de um sistema linear. Escreva o conjunto de equações lineares correspondentes do sistema e use eliminação gaussiana para resolver o sistema linear. Introduza parâmetros livres se necessário. ◄

1. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & -8 & 2 \\ 3 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & 6 \\ -4 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -9 & -3 & 6 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. Use eliminação de Gauss-Jordan para resolver x' e y' em termos de x e y.

$$x = \tfrac{3}{5}x' - \tfrac{4}{5}y'$$
$$y = \tfrac{4}{5}x' + \tfrac{3}{5}y'$$

6. Use eliminação de Gauss-Jordan para resolver x' e y' em termos de x e y.

$$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$$
$$y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$$

7. Encontre inteiros positivos que satisfaçam

$$x + y + z = 9$$
$$x + 5y + 10z = 44$$

8. Uma caixa contendo moedas de 1, 5 e 10 centavos tem 13 moedas totalizando 83 centavos. Quantas moedas de cada tipo há na caixa?

9. Seja

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{bmatrix}$$

a matriz aumentada de um sistema linear. Encontre os valores de a e b com os quais o sistema tem

(a) uma única solução.

(b) uma solução a um parâmetro.

(c) uma solução a dois parâmetros.

(d) nenhuma solução.

10. Para qual(is) valor(es) de a o sistema a seguir tem zero, uma ou uma infinidade de soluções?

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_3 = 2$$
$$(a^2 - 4)x_3 = a - 2$$

11. Encontre uma matriz K tal que $AKB = C$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

12. Como deveriam ser escolhidos os coeficientes a, b e c para que o sistema

$$\begin{aligned} ax + by - 3z &= -3 \\ -2x - by + cz &= -1 \\ ax + 3y - cz &= -3 \end{aligned}$$

tenha a solução $x = 1$, $y = -1$ e $z = 2$?

13. Em cada parte, resolva a equação matricial para X.

(a) $X \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $X \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

14. Seja A uma matriz quadrada.

(a) Mostre que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$ se $A^4 = 0$.

(b) Mostre que

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^n$$

se $A^{n+1} = 0$.

15. Encontre valores de a, b, e c tais que o gráfico do polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$ passe pelos pontos (1, 2), (−1, 6) e (2, 3).

16. (***Requer Cálculo***) Encontre valores de a, b, e c tais que o gráfico do polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$ passa pelo ponto (−1, 0) e tem uma tangente horizontal em (2, −9).

17. Seja J_n a matriz $n \times n$ com todas as entradas iguais a 1. Mostre que se $n > 1$, então

$$(I - J_n)^{-1} = I - \frac{1}{n-1} J_n$$

18. Mostre que se uma matriz quadrada A satisfaz a equação

$$A^3 + 4A^2 - 2A + 7I = 0$$

então A^T também satisfaz essa equação.

19. Prove: se B for invertível, então $AB^{-1} = B^{-1}A$ se, e só se, $AB = BA$.

20. Prove: se A for invertível, então $A + B$ e $I + BA^{-1}$ são ambas invertíveis ou ambas não invertíveis.

21. Prove: se A for uma matriz $m \times n$ e B, a matriz $n \times 1$ com todas as entradas iguais a $1/n$, então

$$AB = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \vdots \\ \bar{r}_m \end{bmatrix}$$

em que $\bar{r}_i$ é a média das entradas na i-ésima linha de A.

22. (***Requer Cálculo***) Se as entradas da matriz

$$C = \begin{bmatrix} c_{11}(x) & c_{12}(x) & \cdots & c_{1n}(x) \\ c_{21}(x) & c_{22}(x) & \cdots & c_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1}(x) & c_{m2}(x) & \cdots & c_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

são funções deriváveis de x, então definimos

$$\frac{dC}{dx} = \begin{bmatrix} c'_{11}(x) & c'_{12}(x) & \cdots & c'_{1n}(x) \\ c'_{21}(x) & c'_{22}(x) & \cdots & c'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c'_{m1}(x) & c'_{m2}(x) & \cdots & c'_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

Mostre que, se as entradas de A e B forem funções deriváveis de x e os tamanhos das matrizes forem tais que as operações estão definidas, então

(a) $\dfrac{d}{dx}(kA) = k\dfrac{dA}{dx}$

(b) $\dfrac{d}{dx}(A + B) = \dfrac{dA}{dx} + \dfrac{dB}{dx}$

(c) $\dfrac{d}{dx}(AB) = \dfrac{dA}{dx}B + A\dfrac{dB}{dx}$

23. (***Requer Cálculo***) Use a parte (c) do Exercício 22 para mostrar que

$$\frac{dA^{-1}}{dx} = -A^{-1}\frac{dA}{dx}A^{-1}$$

Enuncie todas as hipóteses necessárias para obter essa fórmula.

24. Supondo que as inversas envolvidas existam, prove as igualdades a seguir.

(a) $(C^{-1} + D^{-1})^{-1} = C(C + D)^{-1}D$

(b) $(I + CD)^{-1}C = C(I + DC)^{-1}$

(c) $(C + DD^T)^{-1}D = C^{-1}D(I + D^TC^{-1}D)-^1$

Determinantes

CONTEÚDO DO CAPÍTULO

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, estudamos "determinantes" ou, mais precisamente, "funções determinante". Diferentemente de funções reais, como $f(x) = x^2$, que associam um número real $f(x)$ a uma variável real x, as funções determinante associam um número real $f(A)$ a uma variável matricial A. Embora os determinantes tenham surgido primeiro no contexto de resolução de sistemas de equações lineares, não são mais usados com esse propósito nas aplicações do mundo real. Ainda que possam ser úteis na resolução de sistemas lineares muito pequenos (digamos, em duas ou três incógnitas), nosso interesse predominante nos determinantes deriva do fato de relacionarem vários conceitos da Álgebra Linear e fornecerem uma fórmula útil para a inversa de uma matriz.

2.1 Determinantes por expansão em cofatores

Nesta seção, definimos a noção de "determinante". Isso nos dará condições para obter uma fórmula específica para a inversa de uma matriz invertível, quando até agora só dispomos de um procedimento computacional para encontrá-la. Essa fórmula, por sua vez, vai acabar fornecendo uma fórmula para a resolução de certos tipos de sistemas lineares.

Lembre-se do Teorema 1.4.5, que diz que a matriz 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se $ad - bc \neq 0$ e que a expressão $ad - bc$ é denominada ***determinante*** da matriz A. Lembre, também, que esse determinante é denotado escrevendo

ADVERTÊNCIA É importante não esquecer que $\det(A)$ é um *número*, enquanto A é uma *matriz*.

$$\det(A) = ad - bc \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{1}$$

e que a inversa de A pode ser expressa em termos do determinante por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{2}$$

Menores e cofatores

Um dos principais objetivos deste capítulo é o de obter análogos da fórmula (2) que sejam aplicáveis a matrizes quadradas de *todas as ordens*. Para isso, é conveniente usar entradas com índices ao escrever matrizes ou determinantes. Assim, denotando uma matriz 2×2 por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Definimos o determinante de uma matriz $A = [a_{11}]$ de tamanho 1×1 por

$$\det[A] = \det[a_{11}] = a_{11}$$

as duas equações em (1) tomam a forma

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{3}$$

A definição seguinte é fundamental para o nosso objetivo de definir o determinante de uma matriz de ordem superior.

DEFINIÇÃO 1 Se A for uma matriz quadrada, então o ***menor da entrada*** $\boldsymbol{a_{ij}}$ é denotado por M_{ij} e definido como o determinante da submatriz que sobra quando suprimimos a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A. O número $(-1)^{i+j}M_{ij}$ é denotado por C_{ij} e é denominado ***cofator da entrada*** $\boldsymbol{a_{ij}}$.

ADVERTÊNCIA Seguimos a convenção padrão de usar letras maiúsculas para denotar menores e cofatores, mesmo que sejam números e não matrizes.

▶ EXEMPLO 1 Encontrando menores e cofatores

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

O menor da entrada a_{11} é

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

O cofator de a_{11} é

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} = 16$$

Analogamente, o menor da entrada a_{32} é

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

O cofator de a_{32} é

$$C_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -M_{32} = -26 \quad ◀$$

Nota histórica O termo *determinante* foi introduzido pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss, em 1801 (ver nota à página 15), que o utilizou para "determinar" as propriedades de certos tipos de funções. É interessante observar que o termo *matriz* deriva da palavra em latim para "ventre", por serem as matrizes consideradas um recipiente de determinantes.

Nota histórica Aparentemente, o termo *menor* é devido ao matemático inglês James Sylvester (ver nota à página 34), que escreveu o seguinte num artigo científico publicado em 1850: "Agora conceba uma linha e uma coluna quaisquer sendo canceladas, e obtemos um ... quadrado, com um termo a menos em largura e profundidade do que o quadrado original; e supondo que o quadrado original consista em n linhas e n colunas, variando a linha e coluna excluídas dentre todas as seleções possíveis, obtemos n^2 desses quadrados menores, cada um dos quais representa o que eu vou denominar "Primeiro Determinante Menor" relativo ao determinante principal ou completo."

Observação Observe que um menor M_{ij} e seu cofator correspondente C_{ij} são ou iguais ou negativos um do outro, e que o sinal $(-1)^{i+j}$ que os relaciona é $+1$ ou -1 de acordo com o padrão de tabuleiro de xadrez

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Por exemplo,

$$C_{11} = M_{11}, \qquad C_{21} = -M_{21}, \qquad C_{22} = M_{22}$$

e assim por diante. Assim, realmente nunca é preciso calcular $(-1)^{i+j}$ para encontrar C_{ij}: basta calcular o menor M_{ij} e ajustar o sinal, se necessário, de acordo com o padrão do tabuleiro de xadrez. Teste isso no Exemplo 1.

► EXEMPLO 2 Expansão em cofatores de uma matriz 2 × 2

O padrão de tabuleiro de xadrez de uma matriz $A = [a_{ij}]$ de tamanho 2×2 é

$$\begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{array}{ll} C_{11} = M_{11} = a_{22} & C_{12} = -M_{12} = -a_{21} \\ C_{21} = -M_{21} = -a_{12} & C_{22} = M_{22} = a_{11} \end{array}$$

Deixamos para o leitor usar a Fórmula (3) para verificar que det(A) pode ser expresso em termos de cofatores das quatro maneiras a seguir.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} \\ &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} \\ &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} \end{aligned} \tag{4}$$

Cada uma das quatro últimas equações é denominada *expansão em cofatores* do det(A). Em cada expansão de cofatores, todas as entradas e os cofatores vêm da mesma linha ou coluna de A. Por exemplo, na primeira equação, todas as entradas e os cofatores vêm da primeira linha de A; na segunda, todas elas vêm da segunda linha de A; na terceira, todas elas vêm da primeira coluna de A; e na quarta, todas elas vêm da segunda coluna de A. ◄

Definição de um determinante geral

A Fórmula (4) é um caso especial do resultado geral seguinte, que enunciamos sem demonstração.

TEOREMA 2.1.1 *Se A for uma matriz $n \times n$, então independentemente de qual linha ou coluna escolhermos, sempre obteremos o mesmo número multiplicando as entradas daquela linha ou coluna pelos cofatores correspondentes e somando os produtos obtidos.*

Esse resultado nos permite apresentar a próxima definição.

DEFINIÇÃO 2 Se A for uma matriz de tamanho $n \times n$, então o número obtido multiplicando as entradas de uma linha ou coluna qualquer de A pelos cofatores correspondentes e somando os produtos assim obtidos é denominado ***determinante de A***. As próprias somas são denominadas ***expansões em cofatores de*** **det(*A*)**, ou seja,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \tag{5}$$

[expansão em cofatores ao longo da coluna *j*]

e

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \tag{6}$$

[expansão em cofatores ao longo da linha *i*]

► EXEMPLO 3 Expansão em cofatores ao longo da primeira linha

Encontre o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

expandindo em cofatores ao longo da primeira linha.

Solução

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - (1)(-11) + 0 = -1$$

► EXEMPLO 4 Expansão em cofatores ao longo da primeira coluna

Seja A a matriz do Exemplo 3. Calcule $\det(A)$ expandindo em cofatores ao longo da primeira coluna de A.

Observe que, no Exemplo 4, precisamos calcular três cofatores, enquanto no Exemplo 3, só dois, porque o terceiro foi multiplicado por zero. Como uma regra geral, a melhor estratégia para calcular uma expansão em cofatores é expandir ao longo de uma linha ou coluna com o maior número de zeros.

Solução

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - (-2)(-2) + 5(3) = -1$$

Isso está de acordo com o resultado obtido no Exemplo 3.



Charles Lutwidge Dodgson (Lewis Carroll) (1832–1898)

Nota histórica A expansão em cofatores não é o único método para expressar o determinante de uma matriz em termos de determinantes de ordens menores. Por exemplo, embora não seja muito bem conhecido, o matemático inglês Charles Dodgson, que foi o autor de *Alice no País das Maravilhas* e *Pelo Espelho* sob o pseudônimo de Lewis Carroll, inventou um tal método, denominado "*condensação*". Esse método foi recentemente ressuscitado da obscuridade por ser especialmente adequado para o processamento paralelo em computadores.

[Imagem: Time & Life Pictures/Getty Images, Inc.]

▶ EXEMPLO 5 Uma escolha esperta de linha ou coluna

Se A for a matriz 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então a maneira mais fácil de calcular $\det(A)$ é expandir em cofatores ao longo da segunda coluna, que é a que tem mais zeros.

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Para o determinante 3×3, a maneira mais fácil é usar expansão em cofatores ao longo de sua segunda coluna, que é a que tem mais zeros.

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2(1+2) \\ &= -6 \end{aligned}$$

▶ EXEMPLO 6 Determinante de uma matriz triangular inferior

As contas a seguir mostram que o determinante de uma matriz triangular inferior 4×4 é o produto de suas entradas diagonais. Cada parte da conta usa uma expansão em cofatores ao longo da primeira linha.

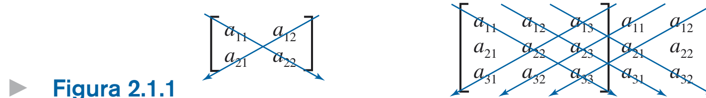
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}|a_{44}| = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \end{aligned}$$ ◀

O método ilustrado no Exemplo 6 pode ser facilmente adaptado para provar o próximo resultado geral.

TEOREMA 2.1.2 *Se A for uma matriz triangular $n \times n$ (triangular superior, inferior ou diagonal), então* $\det(A)$ *é o produto das entradas na diagonal principal da matriz, ou seja,* $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

Uma técnica útil para calcular determinantes 2×2 e 3×3

Os determinantes de matrizes 2×2 e 3×3 podem ser calculados muito eficientemente usando o padrão sugerido na Figura 2.1.1.



▶ **Figura 2.1.1**

No caso 2×2, o determinante pode ser calculado formando o produto das entradas na seta para a direita e subtraindo o produto das entradas na seta para a esquerda. No caso 3×3, primeiro copiamos as primeira e segunda colunas conforme indicado na figura e depois podemos calcular o determinante somando o produto das entradas nas setas para a

ADVERTÊNCIA A técnica de setas só funciona com determinantes de matrizes 2×2 e 3×3.

direita e subtraindo os produtos das entradas nas setas para a esquerda. Esse procedimento executa as seguintes contas.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\end{aligned}$$

que estão de acordo com a expansão em cofatores ao longo da primeira linha.

▶ EXEMPLO 7 Uma técnica para calcular determinantes 2×2 e 3×3

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{matrix}$$

$$= [45 + 84 + 96] - [105 - 48 - 72] = 240$$ ◀

Revisão de conceitos

- Determinante
- Menor
- Cofator
- Expansão em cofatores

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar os menores e cofatores de uma matriz quadrada.
- Usar a expansão em cofatores para calcular o determinante de uma matriz quadrada.
- Usar a técnica de setas calcular o determinante de uma matriz 2×2 ou 3×3.
- Usar o determinante de uma matriz invertível 2×2 para encontrar a inversa dessa matriz.
- Encontrar mentalmente o determinante de uma matriz triangular superior, inferior ou diagonal.

Conjunto de exercícios 2.1

▶ Nos Exercícios **1–2**, encontre todos os menores e cofatores da matriz A. ◀

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Encontre

(a) M_{13} e C_{13}. (b) M_{23} e C_{23}.
(c) M_{22} e C_{22}. (d) M_{21} e C_{21}.

4. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Encontre

(a) M_{32} e C_{32}. (b) M_{44} e C_{44}.

(c) M_{41} e C_{41}. (d) M_{24} e C_{24}.

▶ Nos Exercícios **5–8**, calcule o determinante da matriz. Se a matriz for invertível, use a Equação (2) pra encontrar a inversa. ◀

5. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 4 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **9–14**, use a técnica de setas para calcular o determinante da matriz. ◀

9. $\begin{bmatrix} a-3 & 5 \\ -3 & a-2 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **15–18**, encontre todos os valores de λ com os quais (A) = 0. ◀

15. $A = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -5 & \lambda+4 \end{bmatrix}$ **16.** $A = \begin{bmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 2 & \lambda+1 \end{bmatrix}$ **18.** $A = \begin{bmatrix} \lambda-4 & 4 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix}$

19. Calcule o determinante da matriz do Exercício 13 usando uma expansão em cofatores ao longo

(a) da primeira linha (b) da primeira coluna

(c) da segunda linha (d) da segunda coluna

(e) da terceira linha (f) da terceira coluna

20. Calcule o determinante da matriz do Exercício 12 usando uma expansão em cofatores ao longo

(a) da primeira linha (b) da primeira coluna

(c) da segunda linha (d) da segunda coluna

(e) da terceira linha (f) da terceira coluna

▶ Nos Exercícios **21–26**, calcule det(A) com uma expansão em cofatores ao longo de uma linha ou coluna de sua escolha. ◀

21. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **22.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \end{bmatrix}$ **24.** $A = \begin{bmatrix} k+1 & k-1 & 7 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 5 & k+1 & k \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **27–32**, obtenha por inspeção o determinante da matriz dada. ◀

27. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **28.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ **30.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **32.** $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 40 & 10 & -1 & 0 \\ 100 & 200 & -23 & 3 \end{bmatrix}$

33. Mostre que o valor do determinante independe de θ.

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta)-\cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta)+\cos(\theta) & 1 \end{vmatrix}$$

34. Mostre que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

comutam se, e só se,

$$\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$$

35. Sem fazer contas, descubra uma relação entre os determinantes

$$d_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & 1 & f \\ g & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad d_2 = \begin{vmatrix} a+\lambda & b & c \\ d & 1 & f \\ g & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

36. Mostre que

$$\det(A) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \text{tr}(A) & 1 \\ \text{tr}(A^2) & \text{tr}(A) \end{vmatrix}$$

para qualquer matriz A de tamanho 2×2.

37. O que pode ser dito sobre um determinante de enésima ordem com todas as entradas iguais a 1? Explique seu raciocínio.

38. Qual é o número máximo de zeros que uma matriz 3×3 pode ter sem ter determinante zero? Explique seu raciocínio.

39. Qual é o número máximo de zeros que uma matriz 4×4 pode ter sem ter determinante zero? Explique seu raciocínio.

40. Prove que os pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) são colineares se, e só se,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

41. Prove: a equação da reta que passa pelos pontos distintos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) pode ser escrita como

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

42. Prove que se A for uma matriz triangular superior e se B_{ij} for a matriz que resulta quando suprimimos a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A, então B_{ij} é triangular superior se $i < j$.

Exercícios Verdadeiro/Falso

Nas partes (a)-(j), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) O determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de tamanho 2×2 é $ad + bc$.

(b) Duas matrizes quadradas A e B podem ter o mesmo determinante se, e só se, forem de mesmo tamanho.

(c) O menor M_{ij} é igual ao cofator C_{ij} se, e só se, $i + j$ for par.

(d) Se A for uma matriz simétrica de tamanho 3×3, então $C_{ij} = C_{ij}$, com quaisquer i e j.

(e) O valor da expansão em cofatores de uma matriz A é independente da linha ou coluna escolhida para a expansão.

(f) O determinante de uma matriz triangular inferior é a soma das entradas ao longo de sua diagonal principal.

(g) Dados uma matriz quadrada A e um escalar c quaisquer, temos $\det(cA) = c\det(A)$.

(h) Dadas quaisquer matrizes quadradas A e B, temos $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

(i) Dada qualquer matriz A de tamanho 2×2, temos $\det(A^2) = (\det(A))^2$.

2.2 Calculando determinantes por meio de redução por linhas

Nesta seção, mostramos como calcular um determinante por meio da redução da matriz associada à forma escalonada por linhas. Em geral, esse método requer menos cálculos que a expansão em cofatores e é, portanto, o método preferido para matrizes grandes.

Um teorema básico

Começamos com um teorema fundamental que nos leva a um procedimento eficiente para calcular o determinante de uma matriz quadrada de qualquer tamanho.

TEOREMA 2.2.1 *Seja A uma matriz quadrada. Se A tem uma linha ou uma coluna de zeros, então* $\det(A) = 0$.

Prova Como o determinante de A pode ser obtido por uma coleção de expansões em cofatores ao longo de qualquer linha ou coluna, podemos usar a linha ou coluna de zeros.

Assim, denotando os cofatores de A ao longo dessa linha ou coluna por $C_1, C_2, \ldots, C_n$, então segue da Fórmula (5) ou (6) da Seção 2.1 que

$$\det(A) = 0 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 + \cdots + 0 \cdot C_n = 0 \quad \blacktriangleleft$$

O teorema útil a seguir relaciona o determinante de uma matriz com o determinante de sua transposta.

TEOREMA 2.2.2 *Seja A uma matriz quadrada. Então* $\det(A) = \det(A^T)$.

Como transpor uma matriz troca suas colunas para linhas e suas linhas para colunas, quase todo teorema sobre as linhas de um determinantes tem uma versão companheira sobre as colunas, e vice-versa.

Prova Como transpor uma matriz troca suas colunas para linhas e suas linhas para colunas, a expansão em cofatores de A ao longo de qualquer linha é igual à expansão em cofatores de A^T ao longo da coluna correspondente. Assim, ambas matrizes têm o mesmo determinante. ◀

Operações elementares com as linhas

O próximo teorema mostra como uma operação elementar com as linhas de uma matriz quadrada afeta o valor de seu determinante. Em vez de uma prova formal, fornecemos uma tabela para ilustrar as ideias no caso 3×3 (ver Tabela 1).

TEOREMA 2.2.3 *Seja A uma matriz* $n \times n$.

(*a*) *Se B for a matriz que resulta quando uma única linha ou coluna de A é multiplicada por um escalar k, então* $\det(B) = k\det(A)$.

(*b*) *Se B for a matriz que resulta quando duas linhas ou colunas de A são permutadas, então* $\det(B) = -\det(A)$.

(*c*) *Se B for a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha de A é somado a uma outra linha, ou quando um múltiplo de uma coluna de A é somado a uma outra coluna, então* $\det(B) = \det(A)$

Tabela 1

Relação	Operação
$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{11} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = k\det(A)$	A primeira linha de A é multiplicada por k.
$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = -\det(A)$	A primeira e a segunda linhas de A são permutadas.
$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = \det(A)$	Um múltiplo da segunda linha de A é somado à primeira linha.

O primeiro painel da Tabela 1 mostra que podemos trazer um fator de qualquer linha (ou coluna) de um determinante para fora do determinante. Essa é uma maneira ligeiramente diferente de interpretar a parte (*a*) do Teorema 2.2.3.

Verificamos a primeira equação da Tabela 1 e deixamos as outras duas para o leitor. Para começar, observe que os determinantes dos dois lados da equação diferem apenas em sua primeira linha, de modo que esses determinantes têm os mesmos cofatores C_{11}, C_{12}, C_{13} ao longo dessa linha (já que esses cofatores dependem somente das entradas nas *duas*

linhas de baixo). Assim, expandindo o lado esquerdo em cofatores ao longo da primeira linha, obtemos

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \end{vmatrix} &= ka_{11}C_{11} + ka_{12}C_{12} + ka_{13}C_{13} \\ &= k(a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}) \\ &= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Matrizes elementares

É útil considerar o caso especial do Teorema 2.2.3 em que $A = I_n$ é a matriz identidade $n \times n$, e E (em vez de B) denota a matriz elementar que resulta de efetuar a operação elementar com a linha de I_n. Nesse caso especial, o Teorema 2.2.3 implica o resultado seguinte.

TEOREMA 2.2.4 *Seja E uma matriz elementar $n \times n$.*

(*a*) *Se E resulta da multiplicação de uma linha de I_n por um número não nulo k, então* $\det(E) = k$.

(*b*) *Se E resulta da permutação de duas linhas de I_n, então* $\det(E) = -1$.

(*c*) *Se E resulta da soma de um múltiplo de uma linha de I_n com uma outra linha, então* $\det(E) = 1$.

▶ EXEMPLO 1 Determinantes de matrizes elementares

Observe que o determinante de uma matriz elementar não pode ser zero.

Os determinantes de matrizes elementares seguintes, que são calculados mentalmente, ilustram o Teorema 2.2.4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad ◀$$

A segunda linha de I_4 foi multiplicada por 3. **7 vezes a última linha de I_4 foi somada à primeira linha.** **A primeira e última linhas de I_4 foram permutadas.**

Matrizes com linhas ou colunas proporcionais

Se uma matriz quadrada A tem duas linhas proporcionais, então pode ser introduzida uma linha de zeros somando um múltiplo conveniente de uma das duas linhas à outra. Analogamente para colunas. Mas somar um múltiplo de uma linha ou coluna a uma outra não muda o determinante, de modo que, pelo Teorema 2.2.1, devemos ter $\det(A) = 0$. Isso prova o teorema seguinte.

TEOREMA 2.2.5 *Se A for uma matriz quadrada com duas linhas proporcionais ou duas colunas proporcionais, então* $\det(A) = 0$.

▶ EXEMPLO 2 Introduzindo linhas de zeros

O próximo cálculo mostra como introduzir uma linha de zeros quando há duas linhas proporcionais.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

← A segunda linha é 2 vezes a primeira, portanto, somamos –2 vezes a primeira linha à segunda para introduzir uma linha de zeros.

Cada uma das matrizes a seguir tem duas linhas ou colunas proporcionais; assim, cada uma tem determinante zero.

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

Calculando determinantes com redução por linhas

Veremos, agora, um método para calcular determinantes que envolve substancialmente menos cálculos do que a expansão em cofatores. A ideia do método é reduzir a matriz dada ao formato triangular superior por operações elementares com as linhas, depois calcular o determinante da matriz triangular superior (uma conta fácil) e, finalmente, relacionar esse determinante com o da matriz original. Vejamos um exemplo.

▶ EXEMPLO 3 Usando redução por linhas para calcular um determinante

Calcule det(A), sendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução Vamos reduzir A a uma forma escalonada (que é triangular superior) e, então, aplicar o Teorema 2.1.2.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$
← A primeira e segunda linhas de A foram permutadas.

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$
← Um fator comum de 3 da primeira linha foi trazido para fora do determinante.

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$
← -2 vezes a primeira linha foi somado à terceira linha.

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$
← -10 vezes a segunda linha foi somado à terceira linha.

$$= (-3)(-55)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$
← Um fator comum de -55 da última linha foi trazido para fora do determinante.

$$= (-3)(-55)(1) = 165$$

> Mesmo com os computadores mais velozes de hoje, levaria milhões de anos para calcular um determinante 25×25 por expansão em cofatores, motivo pelo qual, para determinantes grandes, são utilizados, muitas vezes, métodos com base em redução por linhas. Para determinantes pequenos (como os deste texto), uma escolha razoável é a expansão em cofatores.

▶ EXEMPLO 4 Usando operações com colunas para calcular um determinante

Calcule o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Solução Esse determinante poderia ser calculado como o anterior, usando operações elementares com linhas para reduzir A à forma escalonada, mas podemos colocar A em forma triangular inferior em um passo, somando -3 vezes a primeira à quarta colunas para obter

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{bmatrix} = (1)(7)(3)(-26) = -546 \blacktriangleleft$$

O Exemplo 4 ressalta a utilidade de manter a atenção voltada às operações com colunas que podem encurtar nossas contas.

Às vezes, a expansão em cofatores e as operações com linhas e colunas podem ser usadas em combinação para fornecer um método eficaz de calcular determinantes. Essa ideia é ilustrada no próximo exemplo.

▶ EXEMPLO 5 Operações com linhas e expansão em cofatores

Calcule $\det(A)$, com

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução Somando múltiplos convenientes da segunda linha às demais linhas, obtemos

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \quad \longleftarrow \text{Expansão em cofatores ao longo da primeira coluna.}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} \quad \longleftarrow \text{Somamos a primeira linha à terceira.}$$

$$= -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} \quad \longleftarrow \text{Expansão em cofatores ao longo da primeira coluna.}$$

$$= -18 \blacktriangleleft$$

Aptidões desenvolvidas

- Conhecer o efeito de operações elementares com linhas no valor do determinante.
- Conhecer o determinante dos três tipos de matrizes elementares.
- Saber como introduzir zeros nas linhas ou colunas de uma matriz para facilitar o cálculo de seu determinante.
- Usar a redução por linhas para calcular o determinante de uma matriz.
- Usar operações com as colunas para calcular o determinante de uma matriz.
- Combinar o uso de redução por linhas e expansão em cofatores para calcular o determinante de uma matriz.

Conjunto de exercícios 2.2

► Nos Exercícios **1–4**, verifique que $\det(A) = \det(A^T)$. ◄

1. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

► Nos Exercícios **5–9**, calcule por inspeção o determinante da matriz elementar dada. ◄

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

► Nos Exercícios **10–17**, calcule o determinante da matriz dada reduzindo a matriz à forma escalonada por linhas. ◄

10. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

18. Repita os Exercícios 10–13 usando uma combinação de operações com linhas e expansão em cofatores.

19. Repita os Exercícios 14–17 usando uma combinação de operações com linhas e expansão em cofatores.

► Nos Exercícios **20–27**, calcule o determinante, sabendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$$ ◄

20. $\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g+3a & h+3b & i+3c \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

28. Mostre que

(a) $\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}$

(b) $\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

29. Use redução por linhas para mostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

► Nos Exercícios **30–33**, confirme as identidades sem calcular o determinante diretamente. ◄

30. $\begin{vmatrix} a_1+b_1t & a_2+b_2t & a_3+b_3t \\ a_1t+b_1 & a_2t+b_2 & a_3t+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (1-t^2)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1+ta_1 & c_1+rb_1+sa_1 \\ a_2 & b_2+ta_2 & c_2+rb_2+sa_2 \\ a_3 & b_3+ta_3 & c_3+rb_3+sa_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

34. Encontre o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}$$

▶ Nos Exercícios **35–36**, mostre que $\det(A) = 0$ sem calcular o determinante diretamente. ◀

35. $A = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 10 & 6 & 5 \\ 4 & -6 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

36. $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(f), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se A for uma matriz 4×4 e B a matriz que resulta se trocarmos entre si as duas primeiras linhas de A e depois trocarmos entre si as duas últimas linhas de A, então $\det(B) = \det(A)$.

(b) Se A for uma matriz 3×3 e B a matriz que resulta se multiplicarmos a primeira coluna por 4 e a terceira coluna por $\frac{3}{4}$, então $\det(B) = 3\det(A)$.

(c) Se A for uma matriz 3×3 e B a matriz que resulta se somarmos 5 vezes a primeira linha à segunda e à terceira linhas de A, então $\det(B) = 25\det(A)$.

(d) Se A for uma matriz $n \times n$ e B a matriz que resulta se multiplicarmos cada linha de A pelo índice dessa linha, então

$$\det(B) = \frac{n(n+1)}{2}\det(A)$$

(e) Se A for uma matriz quadrada com duas colunas idênticas, então $\det(A) = 0$.

(f) Se a soma do segundo com o quarto vetor linha de uma matriz A de tamanho 6×6 for igual ao último vetor linha, então $\det(A) = 0$.

2.3 Propriedades dos determinantes; regra de Cramer

Nesta seção, desenvolvemos algumas propriedades fundamentais dos determinantes e utilizamos esses resultados para deduzir uma fórmula para a inversa de uma matriz invertível e fórmulas para as soluções de certos tipos de sistemas lineares.

Propriedades básicas dos determinantes

Suponha que A e B sejam matrizes $n \times n$ e que k seja um escalar qualquer. Começamos considerando as possíveis relações entre $\det(A)$, $\det(B)$ e

$$\det(kA), \quad \det(A+B), \quad \text{e} \quad \det(AB)$$

Como um fator comum de qualquer linha de uma matriz pode ser trazido para fora do determinante e como cada uma das n linhas de kA tem o fator k em comum, segue que

$$\det(kA) = k^n \det(A) \tag{1}$$

Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Infelizmente, em geral não existem relações simples entre $\det(A)$, $\det(B)$ e o determinante da soma $\det(A+B)$. Em particular, enfatizamos que $\det(A+B)$ geralmente *não* é igual a $\det(A) + \det(B)$. Isso é ilustrado pelo próximo exemplo.

▶ EXEMPLO 1 det(A + B) ≠ det(A) + det(B)

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Temos $\det(A) = 1$, $\det(B) = 8$ e $\det(A + B) = 23$; assim,

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B) \quad ◀$$

Não obstante o aspecto negativo do exemplo precedente, existe uma relação útil que trata de somas de determinantes e que é aplicável quando as matrizes envolvidas são iguais exceto por *uma* linha (ou coluna). Por exemplo, considere as duas matrizes seguintes, que só diferem na segunda linha.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Calculando os determinantes de A e B, obtemos

$$\begin{aligned} \det(A) + \det(B) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}(a_{22} + b_{22}) - a_{12}(a_{21} + b_{21}) \\ &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Esse é um caso especial do resultado geral que segue.

TEOREMA 2.3.1 *Sejam A, B e C matrizes $n \times n$ que diferem somente em uma única linha, digamos, a r-ésima, e suponha que a r-ésima linha de C possa ser obtida somando as entradas correspondentes nas r-ésimas linhas de A e B. Então*

$$\det(C) = \det(A) + \det(B)$$

O mesmo resultado vale para colunas.

▶ EXEMPLO 2 Somas de determinantes

Deixamos para o leitor confirmar a igualdade seguinte calculando os determinantes.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad ◀$$

Determinante de um produto matricial

Considerando a complexidade das fórmulas de determinantes e multiplicação matricial, poderia parecer improvável que existisse alguma relação simples entre esses conceitos. Isso é o que faz tão surpreendente a simplicidade do nosso próximo resultado. Mostraremos que se A e B forem matrizes quadradas de mesmo tamanho, então

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{2}$$

A prova desse teorema é razoavelmente complexa, de modo que vamos precisar desenvolver primeiro alguns resultados preliminares. Começamos com o caso especial de (2) em que A é uma matriz elementar. Como esse caso especial é só um prelúdio para (2), vamos denominá-lo lema.

LEMA 2.3.2 *Se B for uma matriz $n \times n$ e E uma matriz elementar $n \times n$, então*

$$\det(EB) = \det(E)\det(B)$$

Prova Consideramos três casos, um para cada uma das operações com linhas que produzem a matriz E.

Caso 1 Se E for o resultado da multiplicação de uma linha de I_n por k, então, pelo Teorema 1.5.1, o resultado da multiplicação da linha correspondente de B por k é EB; logo, pelo Teorema 2.2.3(a), temos

$$\det(EB) = k\det(B)$$

Mas, pelo Teorema 2.2.4(a), sabemos que $\det(E) = k$, portanto,

$$\det(EB) = \det(E)\det(B)$$

Casos 2 e 3 As provas dos casos em que E é o resultado da troca de duas linhas de I_n entre si ou da soma de um múltiplo de uma linha com uma outra linha de I_n seguem o mesmo padrão do Caso 1 e são deixadas como exercícios. ◀

Observação Da aplicação repetida do Lema 2.3.2 segue que se B for uma matriz $n \times n$ e se $E_1, E_2, \ldots, E_r$ forem matrizes elementares $n \times n$, então

$$\det(E_1E_2\cdots E_rB) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_r)\det(B) \tag{3}$$

Teste do determinante para a invertibilidade

Nosso próximo teorema fornece um critério importante para determinar se uma matriz é invertível. Também nos leva um passo mais próximo de mostrar a Fórmula (2).

TEOREMA 2.3.3 *Uma matriz quadrada A é invertível se, e só se,* $\det(A) \neq 0$.

Prova Seja R a forma escalonada reduzida por linhas de A. Como um passo preliminar, vamos mostrar que $\det(A)$ e $\det(R)$ são ambos nulos ou ambos não nulos. Sejam $E_1, E_2, \ldots, E_r$ as matrizes elementares que correspondem às operações elementares com linhas que produzem R a partir de A. Assim,

$$R = E_r \cdots E_2E_1A$$

e, por (3),

$$\det(R) = \det(E_r)\cdots\det(E_2)\det(E_1)\det(A) \tag{4}$$

Na nota marginal que acompanha o Teorema 2.2.4, observamos que o determinante de uma matriz elementar é não nulo. Assim, segue da Fórmula (4) que $\det(A)$ e $\det(R)$ são ambos nulos ou ambos não nulos, o que dá a fundamentação para a parte principal da prova. Supondo que A seja invertível, então, pelo Teorema 1.6.4, segue que $R = I$, de modo que $\det(R) = 1$ ($\neq 0$) e, consequentemente, $\det(A) \neq 0$, que é o que queríamos provar.

Reciprocamente, suponha que $\det(A) \neq 0$. Disso decorre que $\det(R) \neq 0$, o que nos diz que R não pode ter uma linha de zeros. Assim, segue do Teorema 1.4.3 que $R = I$, de modo que A é invertível pelo Teorema 1.6.4. ◀

Segue dos Teoremas 2.3.3 e 2.2.5 que uma matriz quadrada com duas linhas ou duas colunas proporcionais é não invertível.

▶ EXEMPLO 3 Testando invertibilidade por determinantes

Como a primeira e terceira linhas de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

são proporcionais, $\det(A) = 0$. Assim, A não é invertível. ◀

Agora estamos prontos para o principal resultado relativo a produtos de matrizes.

TEOREMA 2.3.4 *Se A e B são matrizes quadradas de mesmo tamanho, então*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Prova Dividimos a prova em dois casos, dependendo de A ser invertível ou não. Se a matriz A for não invertível, então, pelo Teorema 1.6.5, o produto AB também não é. Assim, pelo Teorema 2.3.3, temos $\det(AB) = 0$ e $\det(A) = 0$, e segue que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Suponha agora, que A seja invertível. Pelo Teorema 1.6.4, a matriz A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares, digamos

$$A = E_1E_2 \cdots E_r \tag{5}$$

e, portanto,

$$AB = E_1E_2 \cdots E_rB$$

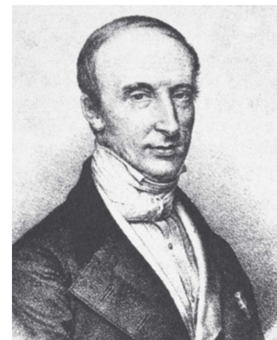
Aplicando (3) a essa equação, obtemos

$$\det(AB) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_r)\det(B)$$

e aplicando novamente (3), resulta

$$\det(AB) = \det(E_1E_2 \cdots E_r)\det(B)$$

que, por (5), pode ser reescrito como $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. ◀



Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Nota histórica Em 1815, o grande matemático francês Augustin Cauchy publicou um artigo de pesquisa fundamental, no qual apresentou o primeiro tratamento sistemático e moderno de determinantes. Foi naquele artigo que o Teorema 2.3.4 foi enunciado e provado pela primeira vez em toda sua generalidade. Casos especiais do teorema já haviam sido enunciados e provados antes, mas foi Cauchy quem finalizou o resultado.

[Imagem: The Granger Collection, New York]

▶ EXEMPLO 4 Verificando que det(*AB*) = det(*A*) det(*B*)

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

Deixamos para o leitor verificar que

$$\det(A) = 1, \quad \det(\mathrm{B}) = -23, \quad \text{e} \quad \det(\mathrm{AB}) = -23$$

Assim, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, como garante o Teorema 2.3.4. ◀

O próximo teorema dá uma relação útil entre o determinante de uma matriz invertível e o determinante de sua inversa.

TEOREMA 2.3.5 *Se A for invertível, então*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Prova Como $A^{-1}A = I$, segue que $\det(A^{-1}A) = \det(I)$. Logo, devemos ter $\det(A^{-1})\det(A) = 1$. Como $\det(A) \neq 0$, a prova pode ser completada dividindo ambos os lados dessa equação por $\det(A)$. ◀

Adjunta de uma matriz

Na expansão em cofatores, calculamos $\det(A)$ multiplicando as entradas de uma linha ou coluna pelos seus cofatores e somando os produtos resultantes. Ocorre que se multiplicamos as entradas de uma linha qualquer pelos cofatores de uma *outra* linha diferente, a soma dos produtos resultantes é sempre zero. (Esse resultado também vale para colunas.) Mesmo omitindo a prova geral, o próximo exemplo ilustra a ideia da prova num caso especial.

▶ EXEMPLO 5 Entradas e cofatores de linhas diferentes

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Considere a expressão

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33}$$

que é formada multiplicando as entradas da primeira linha pelos cofatores das entradas correspondentes da terceira linha e somando os produtos resultantes. Usando o artifício a seguir, mostramos que essa quantidade é zero. Construa uma nova matriz A' substituindo a terceira linha de A com uma cópia da primeira linha, ou seja,

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Sejam C'_{31}, C'_{32} e C'_{33} os cofatores das entradas da terceira linha de A'. Como as duas primeiras linhas de A e A' são iguais e como os cálculos para obter C_{31}, C_{32}, C_{33}, C'_{31}, C'_{32} e C'_{33} envolvem somente as entradas das duas primeiras linhas de A e A', segue que

$$C_{31} = C'_{31}, \quad C_{32} = C'_{32} \quad \text{e} \quad C_{33} = C'_{33}$$

Como A' tem duas linhas idênticas, segue de (3) que

$$\det(A') = 0 \tag{6}$$

Por outro lado, calculando $\det(A')$ por expansão em cofatores ao longo da terceira linha, dá

$$\det(A') = a_{11}C'_{31} + a_{12}C'_{32} + a_{13}C'_{33} = a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} \tag{7}$$

De (6) e (7), obtemos

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} = 0$$ ◀

DEFINIÇÃO 1 Se A for uma matriz $n \times n$ qualquer e C_{ij} o cofator de a_{ij}, então a matriz

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

é denominada ***matriz de cofatores de A***. A transposta dessa matriz é denominada ***adjunta de A*** e denotada por adj(A).

▶ EXEMPLO 6 A adjunta de uma matriz 3 × 3

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Os cofatores de A são

$$\begin{array}{lll} C_{11} = 12 & C_{12} = 6 & C_{13} = -16 \\ C_{21} = 4 & C_{22} = 2 & C_{23} = 16 \\ C_{31} = 12 & C_{32} = -10 & C_{33} = 16 \end{array}$$

de modo que a matriz dos cofatores é

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

e a adjunta de A é

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$ ◀

No Teorema 1.4.5, apresentamos uma fórmula para a inversa de uma matriz 2×2 invertível. Nosso próximo teorema estende aquele resultado para matrizes invertíveis $n \times n$.

TEOREMA 2.3.6 A inversa de uma matriz usando sua adjunta

Se A for uma matriz invertível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A) \tag{8}$$

Prova Em primeiro lugar, mostramos que

$$A\,\text{adj}(A) = \det(A)I$$

Considere o produto

$$A\,\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$



Leonard Eugene Dickson (1874–1954)

Nota histórica O uso do termo *adjunta* para a transposta da matriz dos cofatores parece ter sido introduzido pelo matemático norte-americano L. E. Dickson num artigo científico publicado por ele em 1902.

[Imagem: cortesia da American Mathematical Society]

Segue dos Teoremas 2.3.5 e 2.1.2 que se A é uma matriz triangular invertível então,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{a_{11}}\frac{1}{a_{22}}\cdots\frac{1}{a_{nn}}$$

Além disso, usando a fórmula da adjunta, é possível mostrar que

$$\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \ldots, \frac{1}{a_{nn}}$$

são realmente as entradas diagonais sucessivas de A^{-1} (compare A com A^{-1} no Exemplo 3 da Seção 1.7).

A entrada na i-ésima linha e j-ésima coluna do produto A adj(A) é

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} \tag{9}$$

(ver as linhas destacada nas matrizes).

Se $i = j$, então (9) é a expansão em cofatores de det(A) ao longo da i-ésima linha de A (Teorema 2.1.1) e se $i \neq j$, então as entradas da matriz A e os cofatores provêm de linhas diferentes de A, de modo que o valor de (9) é zero. Portanto,

$$A\,\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I \tag{10}$$

Como A é invertível, det(A) $\neq 0$. Portanto, a Equação (10) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{\det(A)}[A\,\text{adj}(A)] = I \quad \text{ou} \quad A\left[\frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)\right] = I$$

Multiplicando ambos lados à esquerda por A^{-1}, resulta

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A) \blacktriangleleft$$

▶ EXEMPLO 7 Usando a adjunta para encontrar uma matriz inversa

Use (8) para encontrar a inversa da matriz A do Exemplo 6.

Solução Deixamos para o leitor conferir que det(A) = 64. Assim,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A) = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & -\frac{10}{64} \\ -\frac{16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

A regra de Cramer

Nosso próximo teorema usa a fórmula da inversa de uma matriz invertível para produzir uma fórmula, conhecida como ***regra de Cramer***, para a solução de um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de n equações em n incógnitas no caso em que a matriz de coeficientes A for invertível (ou, equivalentemente, se det(A) $\neq 0$).

TEOREMA 2.3.7 Regra de Cramer

Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for um sistema de n equações lineares em n incógnitas tal que det(A) $\neq 0$, *então o sistema tem uma única solução. Essa solução é*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

em que A_j é a matriz obtida substituindo as entradas da j-ésima coluna de A pelas entradas da matriz

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Prova Se $\det(A) \neq 0$, então A é invertível e, pelo Teorema 1.6.2, $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ é a única solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Portanto, pelo Teorema 2.3.6, temos

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Multiplicando as matrizes, resulta

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \cdots + b_nC_{n2} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \cdots + b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

Portanto, a entrada na j-ésima linha de $\mathbf{x}$ é

$$x_j = \frac{b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj}}{\det(A)} \tag{11}$$

Seja, agora,

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Como A_j difere de A somente na j-ésima coluna, segue que os cofatores das entradas $b_1, b_2, \ldots, b_n$ de A_j coincidem com os cofatores das entradas correspondentes da j-ésima coluna de A. A expansão em cofatores de $\det(A_j)$ ao longo da j-ésima coluna é, portanto,

$$\det(A_j) = b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj}$$

Substituindo esse resultado em (11), obtemos

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \quad ◀$$



Gabriel Cramer (1704–1752)

Nota histórica Variações da Regra de Cramer eram razoavelmente conhecidas antes do matemático suíço Gabriel Cramer discuti-la num trabalho publicado em 1750. Foi a notação superior de Cramer que popularizou o método e levou os matemáticos a associar seu nome à regra.

[Imagem: Granger Collection]

▶ EXEMPLO 8 Usando a regra de Cramer para resolver um sistema linear

Use a regra de Cramer para resolver

$$\begin{aligned} x_1 + \qquad + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Solução

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11} \quad ◀$$

Com $n > 3$, a eliminação de Gauss-Jordan é, em geral, mais eficiente para resolver um sistema linear de n equações em n incógnitas do que a regra de Cramer. O uso mais importante dessa regra é na obtenção de propriedades de soluções de um sistema linear sem precisar resolvê-lo.

Teorema da equivalência

No Teorema 1.6.4, listamos cinco resultados que são equivalentes à invertibilidade de uma matriz A. Concluímos esta seção juntando o Teorema 2.3.3 àquela lista para obter um teorema que relaciona todos os principais tópicos que estudamos até aqui.

TEOREMA 2.3.8 Afirmações equivalentes

Se A for uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes.

(*a*) *A é invertível.*

(*b*) *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.*

(*c*) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.*

(*d*) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*

(*e*) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$.*

(*f*) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$.*

(*g*) $\det(A) \neq 0$.

OPCIONAL

Agora dispomos de toda a maquinaria necessária para provar os dois resultados seguintes, que enunciamos sem provar no Teorema 1.7.1.

- **Teorema 1.7.1(*c*)** Uma matriz triangular é invertível se, e só se, suas entradas diagonais são todas não nulas.
- **Teorema 1.7.1(*d*)** A inversa de uma matriz triangular inferior invertível é triangular inferior e a inversa de uma matriz triangular superior invertível é triangular superior.

Prova do Teorema 1.7.1(c) Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz triangular, com entradas diagonais

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$$

Pelo Teorema 2.1.2, a matriz A é invertível se, e só se,

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

for não nulo, o que vale se, e só se, as entradas diagonais forem todas não nulas.

Prova do Teorema 1.7.1(d) Provamos o resultado para matrizes triangulares superiores e deixamos o caso de triangulares inferiores como exercício. Suponha que A seja triangular superior e invertível. Como

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$$

podemos provar que A^{-1} é triangular superior mostrando que adj(A) é triangular superior ou, equivalentemente, que a matriz de cofatores é triangular inferior. Isso pode ser feito mostrando que é nulo cada cofator $i < j$, com $i < j$ (ou seja, acima da diagonal principal). Como

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

é suficiente provar que é nulo cada menor M_{ij}, com $i < j$. Para verificar isso, seja B_{ij} a matriz obtida suprimindo a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A, ou seja,

$$M_{ij} = \det(B_{ij}) \tag{12}$$

Da hipótese $i < j$, segue que B_{ij} é triangular superior (ver Figura 1.7.1). Como A é triangular superior, sua $(i + 1)$-ésima linha começa com i zeros, pelo menos. Mas a i-ésima linha de B_{ij} é a $(i + 1)$-ésima linha de A com a entrada na j-ésima coluna removida. Como $i < j$, nenhum dos primeiros i zeros foi removido quando omitmos a j-ésima coluna; assim, a i-ésima linha de B_{ij} começa com i zeros, pelo menos, o que implica que essa linha tem um zero na diagonal principal. Segue agora, pelo Teorema 2.1.2, que $\det(B_{ij}) = 0$ e, por (12), que $M_{ij} = 0$. ◀

Revisão de conceitos

- Teste do determinante para invertibilidade
- Matriz de cofatores
- Adjunta de uma matriz
- Regra de Cramer
- Afirmações equivalentes sobre uma matriz invertível

Aptidões desenvolvidas

- Saber como os determinantes se comportam em relação às operações aritméticas básicas, conforme Equação (1), Teorema 2.3.1, Lema 2.3.2 e Teorema 2.3.4.
- Usar o determinante para testar uma matriz quanto à invertibilidade.
- Conhecer a relação entre $\det(A)$ e $\det(A^{-1})$.
- Calcular a matriz de cofatores de uma matriz quadrada A.
- Calcular $\operatorname{adj}(A)$ de uma matriz quadrada A.
- Usar a adjunta de uma matriz invertível para encontrar sua inversa.
- Usar a regra de Cramer para resolver um sistema de equações lineares.
- Conhecer as caracterizações equivalentes da invertibilidade de uma matriz dadas no Teorema 2.3.8.

Conjunto de exercícios 2.3

► Nos Exercícios **1–4**, verifique que $\det(kA) = k^n \det(A)$. ◄

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};\ k = 2$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix};\ k = -4$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix};\ k = -2$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix};\ k = 3$

► Nos Exercícios **5–6**, verifique que $\det(AB) = \det(BA)$ e determine se vale a igualdade $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$. ◄

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

► Nos Exercícios **7–14**, use determinantes para decidir se a matriz é invertível. ◄

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{7} & 0 \\ 3\sqrt{2} & -3\sqrt{7} & 0 \\ 5 & -9 & 0 \end{bmatrix}$

► Nos Exercícios **15–18**, encontre os valores de k com os quais A é invertível. ◄

15. $A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 1 & k \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

► Nos Exercícios **19–23**, decida se a matriz é invertível e, caso for, use o método da adjunta para encontrar a inversa. ◄

19. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

► Nos Exercícios **24–29**, resolva usando a regra de Cramer, quando aplicável. ◄

24. $\begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$

25. $\begin{aligned} 4x + 5y &= 2 \\ 11x + y + 2z &= 3 \\ x + 5y + 2z &= 1 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} x - 4y + z &= 6 \\ 4x - y + 2z &= -1 \\ 2x + 2y - 3z &= -20 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 &= -2 \\ 4x_1 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

28. $$\begin{aligned} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= -32 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 &= 14 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= -4 \end{aligned}$$

29. $$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}$$

30. Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível com qualquer valor de θ; em seguida, encontre A^{-1} usando o Teorema 2.3.6.

31. Use a regra de Cramer para resolver em y sem resolver nas incógnitas x, z e w.

$$\begin{aligned} 4x + y + z + w &= 6 \\ 3x + 7y - z + w &= 1 \\ 7x + 3y - 5z + 8w &= -3 \\ x + y + z + 2w &= 3 \end{aligned}$$

32. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ o sistema do Exercício 31.

(a) Resolva o sistema pela regra de Cramer.

(b) Resolva o sistema por eliminação de Gauss-Jordan.

(c) Qual método envolve menos contas?

33. Prove que se $\det(A) = 1$ e todas as entradas de A são números inteiros, então todas as entradas de A^{-1} também são inteiros.

34. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ um sistema de n equações lineares em n incógnitas com todos os coeficientes e as constantes números inteiros. Prove que se $\det(A) = 1$, então a solução $\mathbf{x}$ tem entradas inteiras.

35. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Supondo que $\det(A) = -7$, obtenha

(a) det(3A) (b) $\det(A^{-1})$ (c) $\det(2A^{-1})$

(d) $\det((2A)^{-1})$ (e) $\det\begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

36. Em cada parte, encontre o determinante, sabendo que A é uma matriz 4×4 com $\det(A) = -2$.

(a) $\det(-A)$ (b) $\det(A^{-1})$ (c) $\det(2A^T)$ (d) $\det(A^3)$

37. Em cada parte, encontre o determinante, sabendo que A é uma matriz 3×3 com $\det(A) = 7$.

(a) $\det(3A)$ (b) $\det(A^{-1})$

(c) $\det(2A^{-1})$ (d) $\det((2A)^{-1})$

38. Prove que uma matriz quadrada A é invertível se, e só se, A^TA é invertível.

39. Mostre que se A for uma matriz quadrada, então $\det(A^TA) = \det(AA^T)$.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(l), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se A for uma matriz 3×3, então $\det(2A) = 2\det(A)$.

(b) Se A e B forem matrizes quadradas de mesmo tamanho tais que $\det(A) = \det(B)$, então $\det(A + B) = 2\det(A)$.

(c) Se A e B forem matrizes quadradas de mesmo tamanho e A for invertível, então

$$\det(A^{-1}BA) = \det(B)$$

(d) Uma matriz quadrada A é invertível se, e só se, $\det(A) = 0$.

(e) A matriz de cofatores de A é precisamente $[\operatorname{adj}(A)]^T$.

(f) Para cada matriz A de tamanho $n \times n$, temos

$$A \cdot \operatorname{adj}(A) = (\det(A))I_n$$

(g) Se A for uma matriz quadrada, e o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiver soluções múltiplas para $\mathbf{x}$, então $\det(A) = 0$.

(h) Se A for uma matriz de tamanho $n \times n$, e existir uma matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$ tal que o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ não tem soluções, então a forma escalonada reduzida de A não pode ser I_n.

(i) Se E for uma matriz elementar, então $E\mathbf{x} = \mathbf{0}$ só tem a solução trivial.

(j) Dada uma matriz invertível A, o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem somente a solução trivial se, e só se, o sistema linear $A^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.

(k) Se A for invertível, então $\operatorname{adj}(A)$ também será invertível.

(l) Se A tem uma linha de zeros, então $\operatorname{adj}(A)$ também tem.

Capítulo 2 Exercícios suplementares

▶ Nos Exercícios **1–8**, calcule o determinante da matriz usando (a) a expansão em cofatores e (b) as operações elementares com as linhas para introduzir zeros na matriz. ◀

1. $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ -7 & -8 & -9 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -9 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

9. Calcule os determinantes nos Exercícios 3–6 usando a técnica das setas (ver Exemplo 7 da Seção 2.1).

10. (a) Construa uma matriz 4×4 cujo determinante seja fácil de calcular usando expansão em cofatores, mas difícil de calcular usando operações elementares com linhas.

(b) Construa uma matriz 4×4 cujo determinante seja fácil de calcular usando operações elementares com linhas, mas difícil de calcular usando expansão em cofatores.

11. Use o determinante para decidir se as matrizes dos Exercícios 1–4 são invertíveis.

12. Use o determinante para decidir se as matrizes dos Exercícios 5–8 são invertíveis.

▶ Nos Exercícios **13–15**, encontre o determinante da matriz usando qualquer método. ◀

13. $\begin{vmatrix} 5 & b-3 \\ b-2 & -3 \end{vmatrix}$ **14.** $\begin{vmatrix} 3 & -4 & a \\ a^2 & 1 & 2 \\ 2 & a-1 & 4 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

16. Resolva para x.

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$$

▶ Nos Exercícios **17–24**, use o método da adjunta (Teorema 2.3.6) para encontrar a inversa da matriz dada, se existir. ◀

17. A matriz do Exercício 1. **18.** A matriz do Exercício 2.

19. A matriz do Exercício 3. **20.** A matriz do Exercício 4.

21. A matriz do Exercício 5. **22.** A matriz do Exercício 6.

23. A matriz do Exercício 7. **24.** A matriz do Exercício 8.

25. Use a regra de Cramer para resolver x' e y' em termos de x e y.

$$x = \tfrac{3}{5}x' - \tfrac{4}{5}y'$$
$$y = \tfrac{4}{5}x' + \tfrac{3}{5}y'$$

26. Use a regra de Cramer para resolver x' e y' em termos de x e y.

$$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$$
$$y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$$

27. Examinando o determinante da matriz de coeficientes, mostre que o sistema dado tem uma solução não trivial se, e só se, $\alpha = \beta$.

$$\begin{aligned} x + y + \alpha z &= 0 \\ x + y + \beta z &= 0 \\ \alpha x + \beta y + z &= 0 \end{aligned}$$

28. Seja A uma matriz 3×3 com todas as entradas iguais a 0 ou 1. Qual é o maior valor possível para $\det(A)$?

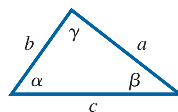
29. (a) Para o triângulo da figura dada, use trigonometria para mostrar que

$$\begin{aligned} b\cos\gamma + c\cos\beta &= a \\ c\cos\alpha + a\cos\gamma &= b \\ a\cos\beta + b\cos\alpha &= c \end{aligned}$$

e, então, aplique a regra de Cramer para mostrar que

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(b) Use a regra de Cramer para obter fórmulas análogas para β e γ.



◀ **Figura Ex-29**

30. Use determinantes para mostrar que, com qualquer valor de λ, a única solução de

$$\begin{aligned} x - 2y &= \lambda x \\ x - y &= \lambda y \end{aligned}$$

é $x = 0$, $y = 0$.

31. Prove: se A for invertível, então adj(A) é invertível e

$$[\mathrm{adj}(A)]^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A = \mathrm{adj}(A^{-1})$$

32. Prove: se A for uma matriz $n \times n$, então

$$\det[\mathrm{adj}(A)] = [\det(A)]^{n-1}$$

33. Prove: se a soma das entradas em cada linha de uma matriz A de tamanho $n \times n$ for sempre zero, então o determinante de A é zero. [*Sugestão*: considere o produto matricial AX, em que X é a matriz $n \times 1$ com todas as entradas iguais a 1.]

34. (a) Na figura dada, a área do triângulo ABC pode ser expressa como

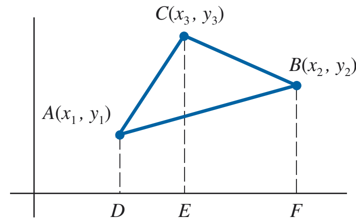
$$\text{área } ABC = \text{área } ADEC + \text{área } CEFB - \text{área } ADFB$$

Use isso e o fato de que a área de um trapézio é igual à metade da altura vezes a soma dos lados paralelos para mostrar que

$$\text{área } ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

[*Observação*: na dedução dessa fórmula, os vértices foram denotados de tal modo que quando passamos de (x_1, y_1) para (x_2, y_2) para (x_3, y_3), o triângulo é percorrido no sentido anti-horário. Para uma orientação horária, o determinante acima dá o *negativo* da área.]

(b) Use o resultado da parte (a) para encontrar a área do triângulo de vértices (3, 3), (4, 0), (−2, −1).



◄ **Figura Ex-34**

35. Sabendo que 21.375, 38.798, 34.162, 40.223 e 79.154 são todos divisíveis por 19, mostre, sem calcular diretamente, que o determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

é divisível por 19.

36. Sem calcular diretamente o determinante, mostre que

$$\begin{vmatrix} \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha & \mathrm{sen}(\alpha+\delta) \\ \mathrm{sen}\,\beta & \cos\beta & \mathrm{sen}(\beta+\delta) \\ \mathrm{sen}\,\gamma & \cos\gamma & \mathrm{sen}(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$$

CAPÍTULO 3

Espaços Vetoriais Euclidianos

CONTEÚDO DO CAPÍTULO

INTRODUÇÃO

Os engenheiros e os físicos fazem uma distinção entre dois tipos de quantidades físicas: os ***escalares***, que são quantidades que podem ser descritas simplesmente por um valor numérico, e os ***vetores***, que são quantidades que requerem não só um valor numérico, mas também uma direção e um sentido para sua descrição física completa. Por exemplo, a temperatura, o comprimento e a velocidade escalar são escalares, porque podem ser completamente descritos por um número que diz "quanto", digamos, uma temperatura de 20°C, um comprimento de 5 cm ou uma velocidade de 75 km/h. Por outro lado, a velocidade e a força são vetores, porque requerem um número que diz "quanto" e uma direção e um sentido que diz "para onde", digamos, um barco se movendo a 10 nós (ou milhas náuticas por hora, a maneira tradicional de medir velocidade na água) numa direção de 45° no sentido do nordeste ou uma força de 100 kgf agindo verticalmente para baixo. Embora as noções de vetores e escalares que estudamos neste texto tenham suas origens na Física e na Engenharia, aqui estaremos mais interessados em utilizá-los para construir estruturas matemáticas e em aplicar essas estruturas a áreas tão diversas como Genética, Ciência da Computação, Economia, telecomunicações e Ecologia.

3.1 Vetores bi, tri e *n*–dimensionais

A Álgebra Linear se ocupa de dois tipos de objetos matemáticos: as "matrizes" e os "vetores". Já nos familiarizamos com as ideias básicas sobre matrizes, portanto, nesta seção, introduzimos algumas das ideias básicas sobre vetores. À medida que progredirmos neste texto, veremos que os vetores e as matrizes estão muito relacionados e que uma boa parte da Álgebra Linear se ocupa dessa relação.

Vetores geométricos

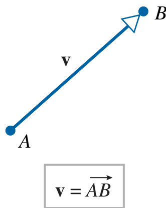
Os engenheiros e os físicos representam vetores em duas dimensões (no espaço ***bi***dimensional) ou em três dimensões (no espaço ***tri***dimensional) por flechas. A direção e o sentido da flecha especificam a ***direção*** e o ***sentido*** do vetor, e o comprimento da flecha descreve seu ***comprimento***, ou ***magnitude***. Os matemáticos dizem que esses vetores são ***geométricos***. A cauda da flecha é o ***ponto inicial*** do vetor, e a ponta da flecha é seu ***ponto final*** (Figura 3.1.1).



▲ **Figura 3.1.1**

Neste texto, denotamos vetores com letras minúsculas em negrito, como **a**, **b**, **v**, **w** e **x**, e escalares com minúsculas em itálico, como *a*, *k*, *v*, *w* e *x*. Quando quisermos indicar que um vetor **v** tem ponto inicial *A* e ponto final *B*, então, conforme Figura 3.1.2, escrevemos

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$$



▲ **Figura 3.1.2**

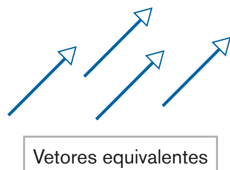
Vetores com o mesmo comprimento, direção e sentido, como os da Figura 3.1.3, são ditos ***equivalentes***. Como queremos que um vetor seja determinado somente pelo seu comprimento, direção e sentido, consideramos vetores equivalentes como sendo o mesmo vetor, embora possam estar em posições diferentes. Também dizemos que vetores equivalentes são ***iguais***, o que indicamos escrevendo

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

O vetor cujos pontos inicial e terminal coincidem tem comprimento zero, portanto, denominamos esse vetor de ***vetor zero*** ou ***vetor nulo***, e o denotamos por $\mathbf{0}$. Como o vetor nulo não possui direção ou sentido naturais, convencionamos que ele tem a direção e o sentido que forem convenientes para os nossos propósitos.

Adição vetorial

Existem várias operações algébricas importantes efetuadas com vetores, todas originando das leis da Física.



▲ **Figura 3.1.3**

Regra do paralelogramo para a adição vetorial Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ forem vetores no espaço bi ou tridimensional posicionados de tal modo que seus pontos iniciais coincidam, então os dois vetores formam lados adjacentes de um paralelogramo, e a ***soma*** $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ é o vetor representado pela flecha desde o ponto inicial comum de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ até o vértice oposto do paralelogramo (Figura 3.1.4*a*).

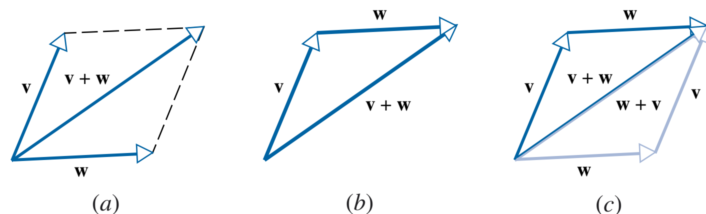
Uma outra maneira de formar a soma de dois vetores é a seguinte.

Regra do triângulo para a adição vetorial Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ forem vetores no espaço bi ou tridimensional posicionados de tal modo que o ponto inicial de $\mathbf{w}$ é o ponto terminal de $\mathbf{v}$, então a ***soma*** $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ é o vetor representado pela flecha desde o ponto inicial de $\mathbf{v}$ até o ponto terminal de $\mathbf{w}$ (Figura 3.1.4*b*).

Na Figura 3.1.4(*c*), construímos as somas $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ e $\mathbf{w} + \mathbf{v}$ pela regra do triângulo. Essa construção torna evidente que

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v} \tag{1}$$

e que a soma obtida pela regra do triângulo coincide com a soma obtida pela regra do paralelogramo.



▶ **Figura 3.1.4**

A adição vetorial também pode ser vista como um processo de translação de pontos.

A adição vetorial vista como translação Se $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ estiverem posicionados de tal modo que seus pontos iniciais coincidem, então o ponto terminal de $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ pode ser entendido de duas maneiras, como segue.

1. O ponto terminal de $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ é o ponto que resulta da translação do ponto terminal de $\mathbf{v}$ na direção e sentido de $\mathbf{w}$ por uma distância igual ao comprimento de $\mathbf{w}$ (Figura 3.1.5*a*).
2. O ponto terminal de $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ é o ponto que resulta da translação do ponto terminal de $\mathbf{w}$ na direção e sentido de $\mathbf{v}$ por uma distância igual ao comprimento de $\mathbf{v}$ (Figura 3.1.5*b*).

Em vista disso, dizemos que $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ é a ***translação de* v *por* w** ou, então, a ***translação de* w *por* v**.

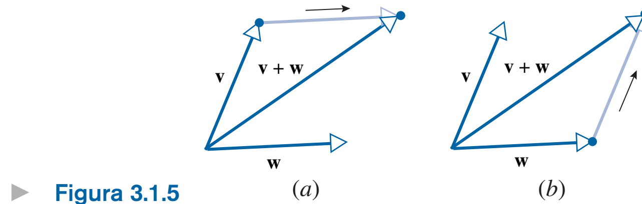


Figura 3.1.5

Subtração vetorial

Na aritmética comum de números, podemos escrever $a - b = a + (-b)$, que expressa a subtração em termos da adição. Na aritmética de vetores, utilizamos a ideia correspondente.

> **Subtração vetorial** O ***negativo*** de um vetor **v**, denotado por $-$ **v**, é o vetor que tem o mesmo comprimento e direção de **v**, mas tem sentido oposto (Figura 3.1.6*a*), e o vetor ***diferença*** de **v** com **w**, denotado por $\mathbf{w} - \mathbf{v}$, é definido como sendo a soma
>
> $$\mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{w} + (-\mathbf{v}) \tag{2}$$

A diferença de **v** com **w** pode ser obtida geometricamente pelo método do paralelogramo mostrado na Figura 3.1.6*b* ou, de modo mais direto, posicionando **w** e **v** de tal modo que seus pontos iniciais coincidam e traçando um vetor do ponto terminal de **v** ao ponto terminal de **w** (Figura 3.1.6*c*).

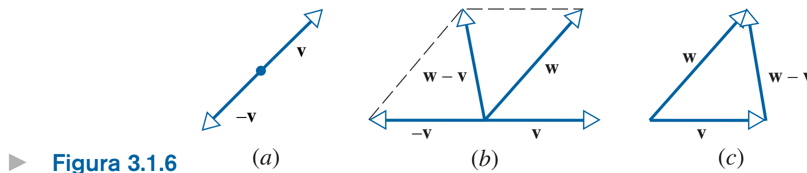


Figura 3.1.6

Multiplicação por escalar

Às vezes, ocorre a necessidade de mudar o comprimento de um vetor ou mudar seu comprimento e trocar seu sentido. Isso é alcançado com um tipo de multiplicação na qual vetores são multiplicados por escalares. Como um exemplo, o produto 2**v** denota o vetor de mesma direção e sentido de **v**, mas com o dobro do comprimento, e o produto -2**v** denota o vetor de mesma direção de **v**, mas com o sentido oposto e o dobro do comprimento. Em geral, temos o seguinte.

> **Multiplicação por escalar** Se **v** for um vetor não nulo do espaço bi ou tridimensional e k, um escalar não nulo, então o ***múltiplo escalar*** de **v** por k, denotado por $k\mathbf{v}$, é o vetor de mesma direção do que **v**, mas cujo comprimento é $|k|$ vezes o comprimento de **v** e cujo sentido é o mesmo que o de **v** se k for positivo e o oposto do de **v** se k for negativo. Se $k = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então definimos $k\mathbf{v}$ como sendo **0**.

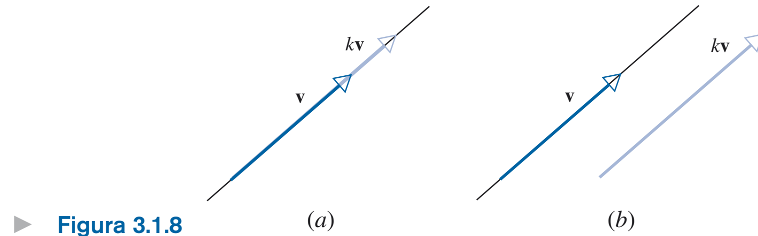
A Figura 3.1.7 mostra a relação geométrica entre um vetor **v** com alguns de seus múltiplos escalares. Em particular, observe que $(-1)\mathbf{v}$ tem o mesmo comprimento e direção de **v**, mas sentido oposto; assim,

$$(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v} \tag{3}$$

Figura 3.1.7

Vetores paralelos e colineares

Sejam **v** e **w** vetores bi ou tridimensionais com um ponto inicial comum. Se um dos vetores for um múltiplo escalar do outro, então os vetores estão numa reta comum e, portanto, é razoável dizer que são ***colineares*** (Figura 3.1.8*a*). Contudo, se transladarmos um dos vetores, conforme indicado na Figura 3.1.8*b*, então os vetores são ***paralelos***, mas não mais colineares. Isso cria um problema linguístico, já que um vetor não muda com uma translação. A única saída é concordar que os termos *paralelo* e *colinear* significam a mesma coisa quando aplicados a vetores. Embora o vetor **0** não tenha direção e sentido



▶ **Figura 3.1.8**

bem definidos, consideramos esse vetor como sendo paralelo a todos os vetores, quando for conveniente.

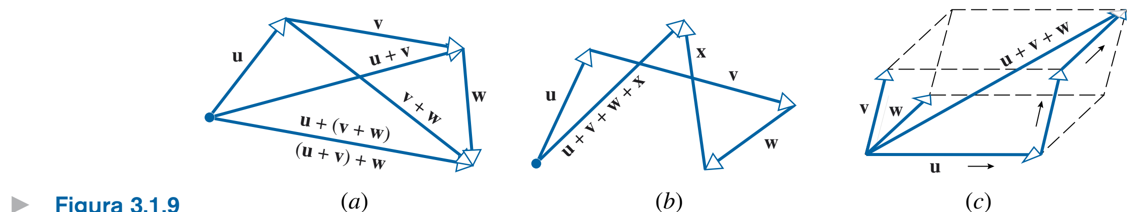
Somas de três ou mais vetores

A adição vetorial satisfaz a ***lei da associatividade da adição vetorial***, que significa que quando somamos três vetores, digamos, **u**, **v** e **w**, tanto faz quais dos dois somamos primeiro, ou seja, temos

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

Segue disso que não há ambiguidade na expressão $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$, pois obtemos o mesmo resultado, independentemente da maneira como agrupamos os vetores.

Uma maneira simples de construir o vetor $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ é colocar os vetores cada um com o ponto inicial no ponto final do anterior e então traçar o vetor do ponto inicial de **u** até o ponto final de **w** (Figura 3.1.9*a*). Esse método também funciona com somas de quatro ou mais vetores (Figura 3.1.9*b*). Esse método de colocar ponto inicial no final do anterior também torna evidente que se **u**, **v** e **w** são vetores tridimensionais com um *ponto inicial comum*, então $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ é a diagonal do paralelepípedo que tem os três vetores como arestas adjacentes (Figura 3.1.9*c*).



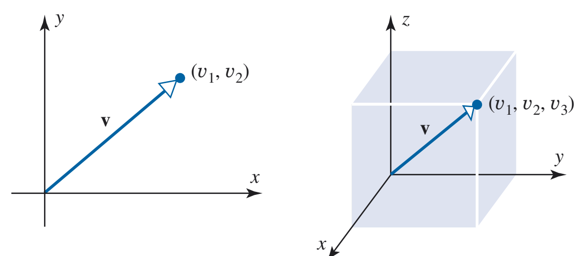
▶ **Figura 3.1.9**

Vetores em sistemas de coordenadas

Até aqui, discutimos vetores sem referência alguma a um sistema de coordenadas. No entanto, como veremos em breve, os cálculos com vetores são efetuados muito mais simplesmente se tivermos um sistema de coordenadas à nossa disposição.

Se um vetor **v** qualquer do espaço bi ou tridimensional for posicionado com seu ponto inicial na origem de um sistema de coordenadas retangulares, então o vetor estará completamente determinado pelas coordenadas de seu ponto final (Figura 3.1.10). Dizemos que essas coordenadas são os ***componentes*** de **v** em relação ao sistema de coordenadas. Escrevemos $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ para denotar um vetor **v** do espaço bidimensional de componentes (v_1, v_2) e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ para denotar um vetor **v** do espaço tridimensional de componentes (v_1, v_2, v_3).

> No formato de componentes, o vetor zero no espaço bidimensional é $\mathbf{0} = (0, 0)$ e no espaço tridimensional é $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$.



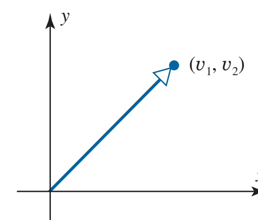
▶ **Figura 3.1.10**

Deveria ser geometricamente evidente que dois vetores no espaço bi ou tridimensional são equivalentes se, e só se, eles têm o mesmo ponto final quando seus pontos iniciais estiverem colocados na origem. Algebricamente, isso significa que dois vetores serão equivalentes se, e só se, seus componentes correspondentes forem iguais. Assim, por exemplo, os vetores

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

do espaço tridimensional são equivalentes se, e só se,

$$v_1 = w_1, \quad v_2 = w_2, \quad v_3 = w_3$$



▲ **Figura 3.1.11** O par ordenado (v_1, v_2) pode representar um ponto ou um vetor.

Observação Já pode ter ocorrido ao leitor que um par ordenado pode representar tanto um vetor de *componentes* v_1 e v_2 quanto um ponto de coordenadas v_1 e v_2 (e analogamente para ternos ordenados). Ambas são interpretações geométricas válidas, de modo que a interpretação apropriada depende do ponto de vista geométrico que queremos enfatizar (Figura 3.1.11).

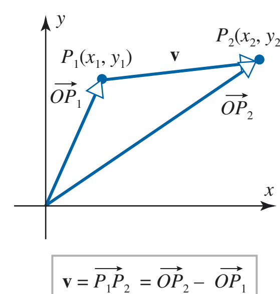
Componentes de um vetor cujo ponto inicial não está na origem

Às vezes, precisamos considerar vetores cujos pontos iniciais não estão na origem. Se $\overrightarrow{P_1P_2}$ denota o vetor de ponto inicial $P_1(x_1, y_1)$ e ponto final $P_2(x_2, y_2)$, então os componentes desse vetor são dados pela fórmula

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \tag{4}$$

Ou seja, os componentes de $\overrightarrow{P_1P_2}$ são obtidos subtraindo as coordenadas do ponto inicial das coordenadas do ponto final. Por exemplo, na Figura 3.1.12, o vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ é a diferença dos vetores $\overrightarrow{OP_2}$ e $\overrightarrow{OP_1}$, de modo que

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$



▲ **Figura 3.1.12**

Como era de se esperar, os componentes de um vetor do espaço tridimensional com ponto inicial $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e ponto final $P_2(x_2, y_2, z_2)$ são dados por

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \tag{5}$$

▶ EXEMPLO 1 Encontrando os componentes de um vetor

Os componentes do vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ de ponto inicial $P_1(2, -1, 4)$ e ponto terminal $P_2(7, 5, -8)$ são

$$\mathbf{v} = (7 - 2, 5 - (-1), (-8) - 4) = (5, 6, -12) \quad ◀$$

O espaço n-dimensional

A ideia de usar pares e ternos ordenados de números reais para representar pontos e vetores nos espaços bi e tridimensionais era bem conhecida nos séculos XVIII e XIX. No início do século XX, os matemáticos e os físicos estavam explorando o uso de espaços de "dimensões maiores" na Matemática e na Física. Hoje, até o leigo está familiarizado com a noção do tempo como uma quarta dimensão, uma ideia usada por Albert Einstein no desenvolvimento da teoria da relatividade geral. Atualmente, os físicos que trabalham na área de teoria de cordas utilizam um espaço de dimensão 11 em sua busca por uma teoria unificada com a qual pretendem explicar como funcionam as forças fundamentais da natureza. A maior parte do resto desta seção é dedicada a estender a noção de espaço a n dimensões.

Para continuar explorando essas ideia, começamos com alguma terminologia e notação. O conjunto de todos os números reais pode ser visto geometricamente como uma reta, denominada ***reta real*** e denotada por R ou R^1. O expoente reforça a ideia intuitiva de que a reta é unidimensional. Os conjuntos de todos os pares ordenados de números reais e o de todos os ternos ordenados de números reais são denotados por R^2 e R^3, respectiva-

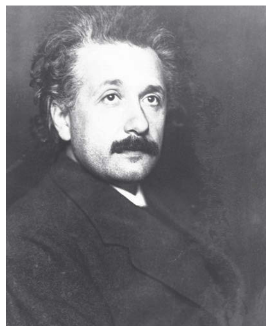
mente. Os expoentes reforçam a ideia de que pontos ordenados correspondem a pontos do espaço bidimensional (um plano) e ternos ordenados, a pontos do espaço tridimensional. A definição seguinte estende essa ideia.

DEFINIÇÃO 1 Se n for um inteiro positivo, então uma ***ênupla ordenada*** é uma sequência de n números reais $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. O conjunto de todas as ênuplas ordenadas é denominado o ***espaço de dimensão n*** e é denotado por R^n.

Observação Podemos pensar nos números de uma ênupla $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ como as coordenadas de um *ponto generalizado* ou como os componentes de um *vetor generalizado*, dependendo da imagem geométrica que queremos utilizar; essa escolha não faz diferença matemática alguma, pois são as propriedades algébricas das ênuplas que nos interessam.

Vejamos algumas aplicações típicas que levam a ênuplas.

- **Dados Experimentais** – Um cientista realiza uma série de experimentos e toma n medições numéricas a cada realização do experimento. O resultado de cada experimento pode ser pensado como um vetor $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ em R^n, no qual $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são os valores medidos.
- **Transporte e Armazenamento** – Uma companhia nacional de transporte de cargas tem 15 terminais com depósitos de armazenamento de carga e oficinas de manutenção de seus caminhões. Em cada instante de tempo, a distribuição dos caminhões nos terminais pode ser descrita por uma 15-upla $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{15})$ na qual x_1 é o número de caminhões no primeiro terminal, x_2 é o número de caminhões no segundo terminal e assim por diante.
- **Circuitos Elétricos** – Um certo tipo de microprocessador eletrônico é projetado para receber quatro voltagens de entrada e produzir três voltagens em resposta. As voltagens de entrada podem ser consideradas como vetores de R^4 e as de resposta, como vetores de R^3. Assim, o microprocessador pode ser visto como um aparelho que transforma cada vetor de entrada $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ de R^4 num vetor de resposta $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ de R^3.
- **Imagens Digitalizadas** – Uma maneira pela qual são criadas as imagens coloridas nas telas dos monitores de computadores é associar a cada pixel (que é um ponto endereçável da tela) três números, que descrevem o ***matiz***, a ***saturação*** e o ***brilho*** do pixel. Assim, uma imagem colorida completa pode ser vista como um conjunto de 5-uplas da forma $\mathbf{v} = (x, y, h, s, b)$ na qual x e y são as coordenadas do pixel na tela e h, s e b são o matiz (com a inicial do termo em inglês *hue*), a saturação e o brilho.
- **Economia** – Uma abordagem da Análise Econômica é dividir uma economia em setores (manufatura, serviços, utilidades, e assim por diante) e medir o produto de cada setor com um valor monetário. Assim, numa economia com 10 setores, o produto total de toda a economia pode ser representado por uma 10-upla $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_{10})$ na qual os números $s_1, s_2, \ldots, s_{10}$ são os produtos dos setores individuais.



Albert Einstein (1879–1955)

Nota histórica O físico Albert Einstein, nascido na Alemanha, emigrou aos Estados Unidos da América em 1935, onde se estabeleceu na Princeton University. Einstein trabalhou sem êxito durante as três últimas décadas de sua vida na tentativa de produzir uma *teoria do campo unificado*, que estabeleceria uma relação subjacente entre as forças da gravidade e do eletromagnetismo. Recentemente, os físicos progrediram no problema utilizando uma nova abordagem, conhecida como a *teoria das cordas*. Nessa teoria, os componentes menores e indivisíveis do universo não são partículas, mas laços que se comportam como cordas vibrantes. Enquanto o universo espaço-tempo de Einstein era de dimensão 4, as cordas vivem num mundo de dimensão 11, que é o foco de muita pesquisa atual.

[Imagem: ©Betmann/©Corbis]

- **Sistemas Mecânicos** – Suponha que seis partículas se movam ao longo da mesma reta coordenada de tal modo que, no instante t, suas coordenadas sejam $x_1, x_2, \ldots, x_6$ e suas velocidades, $v_1, v_2, \ldots, v_6$, respectivamente. Essa informação pode ser representada pelo vetor

$$\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, t)$$

de R^{13}. Esse vetor é denominado o ***estado*** do sistema de partículas no instante t.

Operações com vetores em R^n

Nosso próximo objetivo é definir operações úteis em R^n. Essas operações serão extensões naturais das operações conhecidas dos vetores de R^2 e R^3. Denotamos um vetor $\mathbf{v}$ de R^n usando a notação

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

e dizemos que $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ é o ***vetor zero*** ou ***nulo***.

Observamos anteriormente que dois vetores em R^2 ou R^3 são equivalentes (iguais) se, e só se, seus componentes correspondentes são iguais. Assim, apresentamos a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 2 Dois vetores $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ de R^n são ditos ***equivalentes*** (ou, então, ***iguais***) se

$$v_1 = w_1, \quad v_2 = w_2, \ldots, v_n = w_n$$

Indicamos essa equivalência escrevendo $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

▶ EXEMPLO 2 Igualdade de vetores

$$(a, b, c, d) = (1, -4, 2, 7)$$

se, e só se $a = 1$, $b = -4$, $c = 2$ e $d = 7$. ◀

Nosso próximo objetivo é definir as operações de adição, subtração e multiplicação por escalar para vetores em R^n. Para motivar essas ideias, consideramos como essas operações podem ser efetuadas com componentes usando vetores em R^2. Observando a Figura 3.1.13, é possível deduzir que se $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, então

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \tag{6}$$

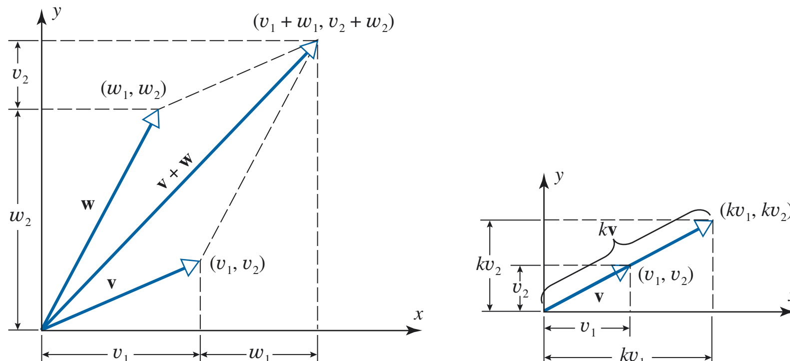
$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2) \tag{7}$$

Em particular, segue de (7) que

$$-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} = (-v_1, -v_2) \tag{8}$$

e, portanto, que

$$\mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{w} + (-\mathbf{v}) = (w_1 - v_1, w_2 - v_2) \tag{9}$$



▶ **Figura 3.1.13**

Motivados pelas Fórmulas (6)-(9), apresentamos a definição a seguir.

DEFINIÇÃO 3 Se $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ são vetores em R^n e se k é um escalar qualquer, definimos

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n) \tag{10}$$

$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n) \tag{11}$$

$$-\mathbf{v} = (-v_1, -v_2, \ldots, -v_n) \tag{12}$$

$$\mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{w} + (-\mathbf{v}) = (w_1 - v_1, w_2 - v_2, \ldots, w_n - v_n) \tag{13}$$

Dito em palavras, vetores são somados (ou subtraídos) pela adição (ou subtração) de seus componentes correspondentes, e um vetor é multiplicado por um escalar pela multiplicação de cada componente por esse escalar.

▶ EXEMPLO 3 Operações algébricas usando componentes

Se $\mathbf{v} = (1, -3, 2)$ e $\mathbf{w} = (4, 2, 1)$, então

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (5, -1, 3), \qquad 2\mathbf{v} = (2, -6, 4)$$
$$-\mathbf{w} = (-4, -2, -1), \qquad \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w}) = (-3, -5, 1)$$ ◀

O próximo teorema resume as propriedades mais importantes das operações vetoriais.

TEOREMA 3.1.1 *Se* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *são vetores em* R^n *e se* k *e* m *são escalares, então:*

(*a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(*b*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(*c*) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} + \mathbf{u}$

(*d*) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

(*e*) $k(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = k\mathbf{v} + k\mathbf{w}$

(*f*) $(k + m)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + m\mathbf{v}$

(*g*) $k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$

(*h*) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Vamos provar a parte (*b*) e deixar algumas das outras partes como exercícios.

Prova (b) Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$. Então

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= \big((u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n)\big) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) && \text{[Adição vetorial]} \\ &= \big((u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2, \ldots, (u_n + v_n) + w_n\big) && \text{[Adição vetorial]} \\ &= \big(u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2), \ldots, u_n + (v_n + w_n)\big) && \text{[Reagrupando]} \\ &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n) && \text{[Adição vetorial]} \\ &= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})\end{aligned}$$ ◀

As propriedades adicionais seguintes dos vetores em R^n podem ser deduzidas facilmente expressando os vetores em termos de componentes (verifique).

TEOREMA 3.1.2 *Se* $\mathbf{v}$ *é um vetor em* R^n *e se* k *é um escalar, então:*

(*a*) $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$

(*b*) $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$

(*c*) $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$

Calculando sem componentes

Uma das consequências importantes dos Teoremas 3.1.1 e 3.1.2 é que esses resultados nos permitem efetuar cálculos com vetores sem expressá-los em termos de componentes. Por exemplo, suponha que **x**, **a** e **b** sejam vetores em R^n e que queiramos resolver a equação vetorial $\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{b}$ para o vetor **x** sem usar componentes. Poderíamos fazer isso como segue.

$$\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \textbf{[Dado]}$$
$$(\mathbf{x} + \mathbf{a}) + (-\mathbf{a}) = \mathbf{b} + (-\mathbf{a}) \quad \textbf{[Somamos o negativo de a em ambos lados]}$$
$$\mathbf{x} + (\mathbf{a} + (-\mathbf{a})) = \mathbf{b} - \mathbf{a} \quad \textbf{[Parte (}b\textbf{) do Teorema 3.1.1]}$$
$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \quad \textbf{[Parte (}d\textbf{) do Teorema 3.1.1]}$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \quad \textbf{[Parte (}c\textbf{) do Teorema 3.1.1]}$$

Mesmo que esse método seja obviamente mais desajeitado que calcular com componentes de R^n, mais adiante no texto, ele se torna importante quando encontrarmos tipos mais gerais de vetores.

Combinações lineares

As operações de adição, subtração e multiplicação por escalar são usadas, com frequência, em combinação para formar novos vetores. Por exemplo, se $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são vetores dados, então os vetores

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = 7\mathbf{v}_1 - 6\mathbf{v}_2 + 8\mathbf{v}_3$$

foram formados dessa maneira. Em geral, apresentamos a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 4 Dizemos que um vetor **w** em R^n é uma ***combinação linear*** dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ em R^n se **w** puder ser expresso na forma

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r \tag{14}$$

em que $k_1, k_2, \ldots, k_r$ são escalares. Esses escalares são denominados ***coeficientes*** da combinação linear. No caso em que $r = 1$, a Fórmula (14) se torna $\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1$, de modo uma combinação linear de um vetor só é simplesmente um múltiplo escalar desse vetor.

Observe que essa definição de uma combinação linear é consistente com a dada no contexto de matrizes (ver Definição 6 na Seção 1.3).

Aplicação de combinação linear a modelos de cor

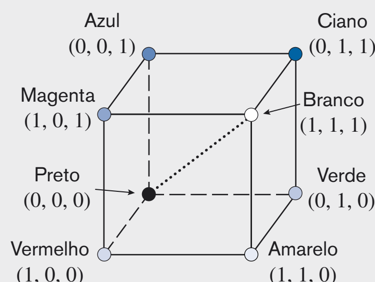
As cores nas telas dos monitores de computadores costumam ter por base o assim chamado ***modelo de cores* RGB**. As cores nesse sistema são criadas juntando porcentagens das três cores primárias, a saber, o vermelho (com a inicial *R* do inglês *red*), o verde (com a inicial *G* do inglês *green*) e o azul (com a inicial *B* do inglês *blue*). Uma maneira de fazer isso é identificar as cores primárias com os vetores

$$\mathbf{r} = (1, 0, 0) \text{ (vermelho puro)},$$
$$\mathbf{g} = (0, 1, 0) \text{ (verde puro)},$$
$$\mathbf{b} = (0, 0, 1) \text{ (azul puro)}$$

de R^3 e criar todas as outras cores formando combinações lineares de **r**, **g** e **b** usando coeficientes entre 0 e 1, inclusive; esses coeficientes representam a porcentagem de cada cor pura na mistura. O conjunto de todas essas cores é o ***espaço* RGB** ou, então, o ***cubo de cores* RGB** (Figura 3.1.14). Assim, cada vetor de cor **c** nesse cubo pode ser expresso como uma combinação linear da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= k_1\mathbf{r} + k_2\mathbf{g} + k_3\mathbf{b} \\ &= k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) \\ &= (k_1, k_2, k_3) \end{aligned}$$

onde $0 \le k_i \le 1$. Como indicamos na figura, os vértices do cubo representam as cores primárias puras junto com as cores preto, branco, magenta, ciano e amarelo. Os vetores ao longo da diagonal entre preto e branco representam tonalidades de cinza.



▶ **Figura 3.1.14**

Notações alternativas para vetores

Até aqui, temos escrito vetores em R^n usando a notação

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \tag{15}$$

Dizemos que essa é a forma ***de ênupla***. Contudo, como um vetor em R^n é simplesmente uma lista de n componentes ordenados de uma maneira específica, qualquer notação que exiba esses componentes em sua ordem correta é uma maneira válida de representar o vetor. Por exemplo, o vetor em (15) pode ser escrito como

$$\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n] \tag{16}$$

que é denominada forma ***matriz linha***, ou como

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{17}$$

que é denominada forma ***matriz coluna***. A escolha de notação é, muitas vezes, uma questão de gosto ou conveniência, mas, às vezes, a natureza de um problema sugere uma notação específica. As três notações (15), (16) e (17) serão utilizadas em vários lugares do texto.

Revisão de conceitos

- Vetor geométrico
- Direção e sentido
- Comprimento
- Ponto inicial
- Ponto final
- Vetores equivalentes
- Vetor zero
- Adição vetorial, regra do paralelogramo e regra do triângulo
- Subtração vetorial
- Negativo de um vetor
- Multiplicação por escalar
- Vetores colineares (ou seja, paralelos)
- Componentes de um vetor
- Coordenadas de um ponto
- Ênupla
- Espaço de dimensão n
- Operações vetoriais no espaço de dimensão n: adição, subtração e multiplicação por escalar.
- Combinação linear de vetores

Aptidões desenvolvidas

- Efetuar operações geométricas com vetores: adição, subtração e multiplicação por escalar.
- Efetuar operações algébricas com vetores: adição, subtração e multiplicação por escalar.
- Determinar se dois vetores são equivalentes.
- Determinar se dois vetores são colineares.
- Esboçar vetores cujos pontos inicial e terminal sejam dados.
- Encontrar componentes de um vetor cujos pontos inicial e terminal sejam dados.
- Provar as propriedades algébricas básicas de vetores (Teoremas 3.1.1 e 3.1.2).

Conjunto de exercícios 3.1

► Nos Exercícios **1–2**, desenhe um sistema de coordenadas (como na Figura 3.1.10) e marque, em cada parte, o ponto cujas coordenadas são dadas. ◄

1. (a) $(3, 4, 5)$ (b) $(-3, 4, 5)$ (c) $(3, -4, 5)$
(d) $(3, 4, -5)$ (e) $(-3, -4, 5)$ (f) $(-3, 4, -5)$

2. (a) $(0, 3, -3)$ (b) $(3, -3, 0)$ (c) $(-3, 0, 0)$
(d) $(3, 0, 3)$ (e) $(0, 0, -3)$ (f) $(0, 3, 0)$

▶ Nos Exercícios 3–4, em cada parte esboce o vetor dado com ponto inicial na origem. ◀

3. (a) $\mathbf{v}_1 = (3, 6)$ (b) $\mathbf{v}_2 = (-4, -8)$
(c) $\mathbf{v}_3 = (-4, -3)$ (d) $\mathbf{v}_4 = (3, 4, 5)$
(e) $\mathbf{v}_5 = (3, 3, 0)$ (f) $\mathbf{v}_6 = (-1, 0, 2)$

4. (a) $\mathbf{v}_1 = (5, -4)$ (b) $\mathbf{v}_2 = (3, 0)$
(c) $\mathbf{v}_3 = (0, -7)$ (d) $\mathbf{v}_4 = (0, 0, -3)$
(e) $\mathbf{v}_5 = (0, 4, -1)$ (f) $\mathbf{v}_6 = (2, 2, 2)$

▶ Nos Exercícios 5–6, em cada parte esboce, com ponto inicial na origem, o vetor determinado pelos dois pontos dados. ◀

5. (a) $P_1(4, 8), P_2(3, 7)$
(b) $P_1(3, -5), P_2(-4, -7)$
(c) $P_1(3, -7, 2), P_2(-2, 5, -4)$

6. (a) $P_1(-5, 0), P_2(-3, 1)$
(b) $P_1(0, 0), P_2(3, 4)$
(c) $P_1(-1, 0, 2), P_2(0, -1, 0)$
(d) $P_1(2, 2, 2), P_2(0, 0, 0)$

▶ Nos Exercícios 7–8, em cada parte encontre os componentes do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$. ◀

7. (a) $P_1(3, 5), P_2(2, 8)$
(b) $P_1(5, -2, 1), P_2(2, 4, 2)$

8. (a) $P_1(-6, 2), P_2(-4, -1)$
(b) $P_1(0, 0, 0), P_2(-1, 6, 1)$

9. (a) Encontre o ponto final do vetor que é equivalente a $\mathbf{u} = (1, 2)$ e cujo ponto inicial é $A(1, 1)$.
(b) Encontre o ponto inicial do vetor que é equivalente a $\mathbf{u} = (1, 1, 3)$ e cujo ponto final é $B(-1, -1, 2)$.

10. (a) Encontre o ponto inicial do vetor que é equivalente a $\mathbf{u} = (1, 2)$ e cujo ponto final é $B(2, 0)$.
(b) Encontre o ponto final do vetor que é equivalente a $\mathbf{u} = (1, 1, 3)$ e cujo ponto inicial é $A(0, 2, 0)$.

11. Encontre um ponto inicial P de um vetor não nulo $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ com ponto final $Q(3, 0, -5)$ tal que
(a) $\mathbf{u}$ tem a mesma direção e sentido de $\mathbf{v} = (4, -2, -1)$.
(b) $\mathbf{u}$ tem a mesma direção, mas sentido oposto ao de $\mathbf{v} = (4, -2, -1)$.

12. Encontre um ponto final Q de um vetor não nulo $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ de ponto inicial $P(-1, 3, -5)$ tal que
(a) $\mathbf{u}$ tem a mesma direção e sentido de $\mathbf{v} = (6, 7, -3)$.
(b) $\mathbf{u}$ tem a mesma direção, mas sentido oposto ao de $\mathbf{v} = (6, 7, -3)$.

13. Sejam $\mathbf{u} = (4, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 5)$ e $\mathbf{w} = (-3, -3)$. Encontre os componentes de
(a) $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ (b) $\mathbf{v} - 3\mathbf{u}$
(c) $2(\mathbf{u} - 5\mathbf{w})$ (d) $3\mathbf{v} - 2(\mathbf{u} + 2\mathbf{w})$
(e) $-3(\mathbf{w} - 2\mathbf{u} + \mathbf{v})$ (f) $(-2\mathbf{u} - \mathbf{v}) - 5(\mathbf{v} + 3\mathbf{w})$

14. Sejam $\mathbf{u} = (-3, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 0, -8)$ e $\mathbf{w} = (6, -1, -4)$. Encontre os componentes de
(a) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ (b) $6\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$
(c) $-\mathbf{v} + \mathbf{u}$ (d) $5(\mathbf{v} - 4\mathbf{u})$
(e) $-3(\mathbf{v} - 8\mathbf{w})$ (f) $(2\mathbf{u} - 7\mathbf{w}) - (8\mathbf{v} + \mathbf{u})$

15. Sejam $\mathbf{u} = (-3, 2, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (4, 7, -3, 2)$ e $\mathbf{w} = (5, -2, 8, 1)$. Encontre os componentes de
(a) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ (b) $2\mathbf{u} + 7\mathbf{v}$
(c) $-\mathbf{u} + (\mathbf{v} - 4\mathbf{w})$ (d) $6(\mathbf{u} - 3\mathbf{v})$
(e) $-\mathbf{v} - \mathbf{w}$ (f) $(6\mathbf{v} - \mathbf{w}) - (4\mathbf{u} + \mathbf{v})$

16. Sejam $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ os vetores do Exercício 15. Encontre o vetor $\mathbf{x}$ que satisfaz $5\mathbf{x} - 2\mathbf{v} = 2(\mathbf{w} - 5\mathbf{x})$.

17. Sejam $\mathbf{u} = (5, -1, 0, 3, -3)$, $\mathbf{v} = (-1, -1, 7, 2, 0)$ e $\mathbf{w} = (-4, 2, -3, -5, 2)$. Encontre os componentes de
(a) $\mathbf{w} - \mathbf{u}$ (b) $2\mathbf{v} + 3\mathbf{u}$
(c) $-\mathbf{w} + 3(\mathbf{v} - \mathbf{u})$ (d) $5(-\mathbf{v} + 4\mathbf{u} - \mathbf{w})$
(e) $-2(3\mathbf{w} + \mathbf{v}) + (2\mathbf{u} + \mathbf{w})$ (f) $\frac{1}{2}(\mathbf{w} - 5\mathbf{v} + 2\mathbf{u}) + \mathbf{v}$

18. Sejam $\mathbf{u} = (1, 2, -3, 5, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 4, -1, 1, 2)$ e $\mathbf{w} = (7, 1, -4, -2, 3)$. Encontre os componentes de
(a) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (b) $3(2\mathbf{u} - \mathbf{v})$
(c) $(3\mathbf{u} - \mathbf{v}) - (2\mathbf{u} + 4\mathbf{w})$

19. Sejam $\mathbf{u} = (-3, 1, 2, 4, 4)$, $\mathbf{v} = (4, 0, -8, 1, 2)$ e $\mathbf{w} = (6, -1, -4, 3, -5)$. Encontre os componentes de
(a) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ (b) $6\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$
(c) $(2\mathbf{u} - 7\mathbf{w}) - (8\mathbf{v} + \mathbf{u})$

20. Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ os vetores do Exercício 18. Encontre os componentes do vetor $\mathbf{x}$ que satisfazem a equação $3\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w} = 3\mathbf{x} + 2\mathbf{w}$.

21. Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ os vetores do Exercício 19. Encontre os componentes do vetor $\mathbf{x}$ que satisfazem a equação $2\mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{x} = 7\mathbf{x} + \mathbf{w}$.

22. Com qual(is) valor(es) de t, se houver, o vetor dado é paralelo a $\mathbf{u} = (4, -1)$?
(a) $(8t, -2)$ (b) $(8t, 2t)$ (c) $(1, t^2)$

23. Qual(is) dos vetores em R^6 dados é(são) paralelo(s) a $\mathbf{u} = (-2, 1, 0, 3, 5, 1)$?
(a) $(4, 2, 0, 6, 10, 2)$
(b) $(4, -2, 0, -6, -10, -2)$
(c) $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$

24. Sejam $\mathbf{u} = (2, 1, 0, 1, -1)$ e $\mathbf{v} = (-2, 3, 1, 0, 2)$. Encontre escalares a e b tais que $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = (-8, 8, 3, -1, 7)$.

25. Sejam $\mathbf{u} = (1, -1, 3, 5)$ e $\mathbf{v} = (2, 1, 0, -3)$. Encontre escalares a e b tais que $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = (1, -4, 9, 18)$.

26. Encontre todos os escalares c_1, c_2 e c_3 tais que

$$c_1(1, 2, 0) + c_2(2, 1, 1) + c_3(0, 3, 1) = (0, 0, 0)$$

27. Encontre todos os escalares c_1, c_2 e c_3 tais que

$$c_1(1, -1, 0) + c_2(3, 2, 1) + c_3(0, 1, 4) = (-1, 1, 19)$$

28. Encontre todos os escalares c_1, c_2 e c_3 tais que

$$c_1(-1, 0, 2) + c_2(2, 2, -2) + c_3(1, -2, 1) = (-6, 12, 4)$$

29. Sejam $\mathbf{u}_1 = (-1, 3, 2, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 0, 4, -1)$, $\mathbf{u}_3 = (7, 1, 1, 4)$ e $\mathbf{u}_4 = (6, 3, 1, 2)$. Encontre escalares a_1, a_2, a_3 e a_4 tais que $a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3 + a_4\mathbf{u}_4 = (0, 5, 6, -3)$.

30. Mostre que não existem escalares c_1, c_2, e c_3 tais que

$$c_1(1, 0, 1, 0) + c_2(1, 0, -2, 1) + c_3(2, 0, 1, 2) = (1, -2, 2, 3)$$

31. Mostre que não existem escalares c_1, c_2, e c_3 tais que

$$c_1(-2, 9, 6) + c_2(-3, 2, 1) + c_3(1, 7, 5) = (0, 5, 4)$$

32. Considere a Figura 3.1.12. Discuta uma interpretação geométrica do vetor

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OP_1} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1})$$

33. Sejam P o ponto $(2, 3, -2)$ e Q o ponto $(7, -4, 1)$.

(a) Encontre o ponto médio do segmento de reta que liga P a Q.

(b) Encontre o ponto no segmento de reta que liga P a Q que está a $\frac{3}{4}$ do caminho de P a Q.

34. Seja P o ponto $(1, 3, 7)$. Se o ponto $(4, 0, -6)$ for o ponto médio do segmento de reta que liga P e Q, quem é Q?

35. Prove as partes (*a*), (*c*) e (*d*) do Teorema 3.1.1.

36. Prove as partes (*e*)-(*h*) do Teorema 3.1.1.

37. Prove as partes (*a*)-(*c*) do Teorema 3.1.2.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(k), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Dois vetores equivalentes sempre têm o mesmo ponto inicial.

(b) Os vetores (a, b) e $(a, b, 0)$ são equivalentes.

(c) Se k for um escalar e $\mathbf{v}$, um vetor, então $\mathbf{v}$ e $k\mathbf{v}$ são paralelos se, e só se, $k \geq 0$.

(d) Os vetores $\mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{w})$ e $(\mathbf{w} + \mathbf{v}) + \mathbf{u}$ são iguais.

(e) Se $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, então $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

(f) Se a e b forem escalares tais que $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores paralelos.

(g) Vetores colineares de mesmo tamanho são iguais.

(h) Se $(a, b, c) + (x, y, z) = (x, y, z)$, então (a, b, c) necessariamente é o vetor nulo.

(i) Se a e b forem escalares e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores, então

$$(a + b)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$$

(j) Dados vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, a equação vetorial

$$3(2\mathbf{v} - \mathbf{x}) = 5\mathbf{x} - 4\mathbf{w} + \mathbf{v}$$

pode ser resolvida para $\mathbf{x}$.

(k) As combinações lineares $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$ e $b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2$ só podem ser iguais se $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$.

3.2 Norma, produto escalar e distância em R^n

Nesta seção, vamos tratar das noções de comprimento e distância em relação a vetores. Começamos discutindo essas ideias em R^2 e R^3 e depois as estendemos algebricamente ao R^n.

Norma de um vetor

Neste texto, denotamos o comprimento de um vetor $\mathbf{v}$ pelo símbolo $\|\mathbf{v}\|$ e dizemos que este é a *norma*, o *comprimento* ou a *magnitude* de $\mathbf{v}$ (sendo que o termo "norma" é um sinônimo matemático comum para comprimento). Como sugere a Figura 3.2.1*a*, segue pelo Teorema de Pitágoras que a norma de um vetor (v_1, v_2) de R^2 é

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \tag{1}$$

Analogamente, para um vetor (v_1, v_2, v_3) em R^3, segue da Figura 3.2.1*b* e duas aplicações do Teorema de Pitágoras que

$$\|\mathbf{v}\|^2 = (OR)^2 + (RP)^2 = (OQ)^2 + (QR)^2 + (RP)^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

de modo que

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \tag{2}$$

Motivados pelo padrão das Fórmulas (1) e (2), apresentamos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1 Se $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ for um vetor em R^n, então a ***norma*** de $\mathbf{v}$ (também denominada ***comprimento*** ou ***magnitude*** de $\mathbf{v}$) é denotada por $\|\mathbf{v}\|$ e definida pela fórmula

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots + v_n^2} \tag{3}$$

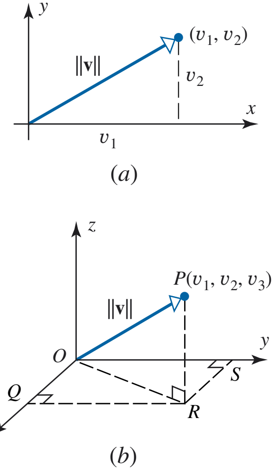


Figura 3.2.1

EXEMPLO 1 Calculando normas

Segue da Fórmula (2) que a norma do vetor $\mathbf{v} = (-3, 2, 1)$ em R^3 é

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

e segue da Fórmula (3) que a norma do vetor $\mathbf{v} = (2, -1, 3, -5)$ em R^4 é

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{39} \blacktriangleleft$$

Nosso primeiro teorema nesta seção generaliza ao R^n os três fatos familiares seguintes, relativos a vetores em R^2 e R^3.

- Distâncias são números não negativos.
- O vetor zero é o único vetor de comprimento zero.
- Multiplicar um vetor por um escalar multiplica seu comprimento pelo valor absoluto daquele escalar.

É importante reconhecer que só porque essas propriedades valem em R^2 e R^3, não há garantias de que também valham em R^n. Sua validade deve ser *demonstrada* usando as propriedades algébricas das ênuplas.

TEOREMA 3.2.1 *Se* $\mathbf{v}$ *for um vetor em* R^n *e* k *um escalar qualquer, então*

(*a*) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$

(*b*) $\|\mathbf{v}\| = 0$ *se, e só se,* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

(*c*) $\|k\mathbf{v}\| = |k|\,\|\mathbf{v}\|$

Provamos a parte (*c*) e deixamos (*a*) e (*b*) como exercícios.

Prova (c) Se $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, então $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n)$, portanto,

$$\begin{aligned}\|k\mathbf{v}\| &= \sqrt{(kv_1)^2 + (kv_2)^2 + \cdots + (kv_n)^2}\\ &= \sqrt{(k^2)(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)}\\ &= |k|\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}\\ &= |k|\|\mathbf{v}\| \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Vetores unitários

Um vetor de norma 1 é denominado ***vetor unitário***. Esses vetores são úteis para especificar uma direção quando o comprimento não for relevante para o problema em consideração. Podemos obter um vetor unitário numa direção desejada escolhendo qualquer vetor não nulo $\mathbf{v}$ nessa direção e multiplicando pelo recíproco de seu comprimento. Por exemplo, se $\mathbf{v}$ for um vetor de comprimento 2 em R^2 ou R^3, então $\frac{1}{2}\mathbf{v}$ é um vetor unitário de mesma direção e sentido de $\mathbf{v}$. Mais geralmente, se $\mathbf{v}$ for um vetor não nulo qualquer em R^n, então

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} \tag{4}$$

ADVERTÊNCIA Às vezes, veremos a Fórmula (4) expressa como

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

Isso é simplesmente uma maneira mais compacta de escrever aquela fórmula, que *não* pretende dar a entender que **v** está sendo dividido por $\|\mathbf{v}\|$.

define um vetor unitário de mesma direção e sentido de **v**. Podemos confirmar que (4) é um vetor unitário aplicando a parte (*c*) do Teorema 3.2.1 com $k = 1/\|\mathbf{v}\|$ para obter

$$\|\mathbf{u}\| = \|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\| = k\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| = 1$$

O processo de multiplicar um vetor não nulo pelo recíproco de seu comprimento para obter um vetor unitário é denominado ***normalização*** de **v**.

▶ EXEMPLO 2 Normalizando um vetor

Encontre o vetor unitário **u** que tem a mesma direção e sentido de $\mathbf{v} = (2, 2, -1)$.

Solução O vetor **v** tem comprimento

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

Assim, por (4), temos

$$\mathbf{u} = \tfrac{1}{3}(2, 2, -1) = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}\right)$$

O leitor pode querer confirmar que $\|\mathbf{u}\| = 1$. ◀

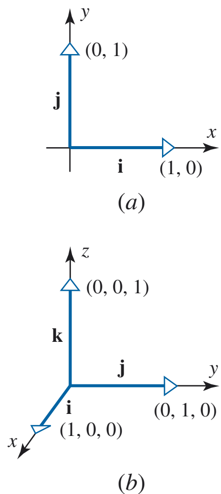
Os vetores unitários canônicos

Quando introduzimos um sistema de coordenadas retangulares em R^2 ou R^3, dizemos que os vetores unitários nas direções positivas dos eixos coordenados são os ***vetores unitários canônicos***. Em R^2, esses vetores são denotados por

$$\mathbf{i} = (1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{j} = (0, 1)$$

e, em R^3, são denotados por

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$



▲ **Figura 3.2.2**

(Figura 3.2.2). Cada vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ em R^2 e cada vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ em R^3 pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores unitários canônicos, escrevendo

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) = v_1(1, 0) + v_2(0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} \tag{5}$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} \tag{6}$$

Além disso, podemos generalizar essas fórmulas para R^n definindo os ***vetores unitários canônicos em*** $\boldsymbol{R^n}$

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1) \tag{7}$$

caso em que cada vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ em R^n pode ser expresso como

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n \tag{8}$$

▶ EXEMPLO 3 Combinação linear dos vetores unitários canônicos

$$(2, -3, 4) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$
$$(7, 3, -4, 5) = 7\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3 + 5\mathbf{e}_4$$ ◀

Distância em R^n

Se P_1 e P_2 forem pontos em R^2 ou R^3, então o comprimento do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ é igual à distância *d* entre os dois pontos (Figura 3.2.3). Especificamente, se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ forem pontos em R^2, então a Fórmula (4) da Seção 3.1 implica

$$d = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{9}$$

Essa é a conhecida fórmula da distância da Geometria Analítica. Analogamente, a distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ em R^3 é

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{10}$$

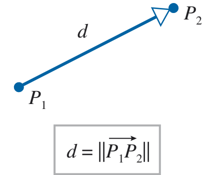


Figura 3.2.3

Motivados pelas Fórmulas (9) e (10), introduzimos a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 2 Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ forem pontos em R^n, então denotamos a ***distância*** entre **u** e **v** por $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, que definimos por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2} \tag{11}$$

Observamos na seção anterior que uma ênupla pode ser vista como vetor ou como um ponto em R^n. Na Definição 2, escolhemos descrevê-la como ponto, porque parece ser a interpretação mais natural.

▶ EXEMPLO 4 Calculando distância em R^n

Se

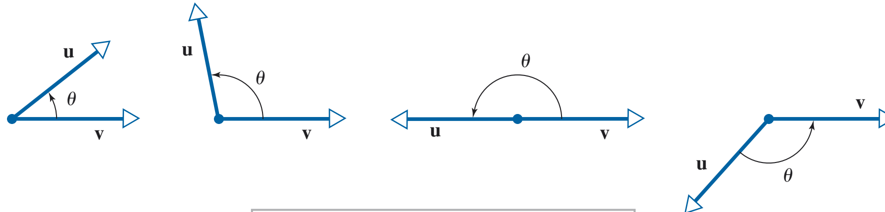
$$\mathbf{u} = (1, 3, -2, 7) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (0, 7, 2, 2)$$

então a distância entre **u** e **v** é

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(1-0)^2 + (3-7)^2 + (-2-2)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{58} \quad ◀$$

Produto escalar

Nosso próximo objetivo é definir alguma operação de multiplicação útil com vetores em R^2 e R^3 e então estender essa operação ao R^n. Para isso, precisamos, antes de mais nada, definir exatamente o que se entende por "ângulo" entre dois vetores em R^2 e R^3. Para isso, sejam **u** e **v** vetores não nulos em R^2 ou R^3 posicionados de tal forma que seus pontos iniciais coincidam. Definimos o ***ângulo entre* u *e* v** como o ângulo θ determinado por **u** e **v** que satisfaz as desigualdades $0 \le \theta \le \pi$ (Figura 3.2.4).



▶ Figura 3.2.4

DEFINIÇÃO 3 Se **u** e **v** forem vetores não nulos em R^2 ou R^3 e se θ for o ângulo entre **u** e **v**, então o ***produto escalar*** (também denominado ***produto interno euclidiano***) de **u** e **v** é denotado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e definido por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos\theta \tag{12}$$

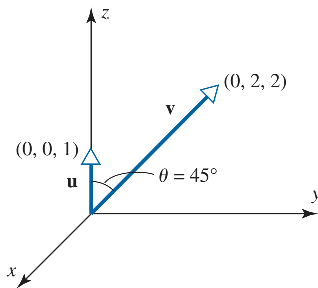
Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, definimos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ como sendo 0.

O sinal do produto escalar revela uma informação sobre o ângulo θ que pode ser obtida reescrevendo a Fórmula (12) como

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \tag{13}$$

Como $0 \le \theta \le \pi$, segue da Fórmula (13) e das propriedades da função cosseno estudadas na Trigonometria que

- θ é agudo se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$.
- θ é obtuso se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$.
- $\theta = \pi/2$ se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.



▲ **Figura 3.2.5**

▶ EXEMPLO 5 Produto escalar

Encontre o produto escalar dos vetores mostrados na Figura 3.2.5.

Solução Os comprimentos dos vetores são

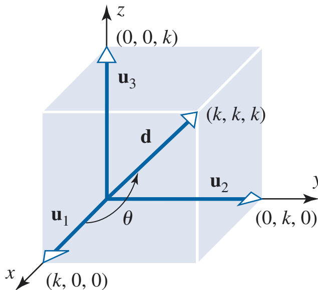
$$\|\mathbf{u}\| = 1 \quad \text{e} \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

e o cosseno do ângulo θ entre eles é

$$\cos(45°) = 1/\sqrt{2}$$

Assim, segue da Fórmula (12) que

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta = (1)(2\sqrt{2})(1/\sqrt{2}) = 2$$



▲ **Figura 3.2.6**

▶ EXEMPLO 6 Um problema de geometria resolvido com produto escalar

Encontre o ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas arestas.

Solução Seja k o comprimento de uma aresta e introduza um sistema de coordenadas retangulares conforme indicado na Figura 3.2.6. Denotando $\mathbf{u}_1 = (k, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, k, 0)$ e $\mathbf{u}_3 = (0, 0, k)$, então o vetor

$$\mathbf{d} = (k, k, k) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

é a diagonal do cubo. Segue da Fórmula (13) que o ângulo θ entre $\mathbf{d}$ e a aresta $\mathbf{u}_1$ satisfaz

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{d}}{\|\mathbf{u}_1\|\|\mathbf{d}\|} = \frac{k^2}{(k)(\sqrt{3k^2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

> Observe que o ângulo θ obtido no Exemplo 6 não envolve k. Por que isso é o esperado?

Com a ajuda de uma calculadora, obtemos

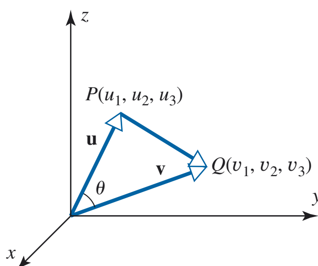
$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54{,}74° \quad ◀$$

O produto escalar em termos de componentes

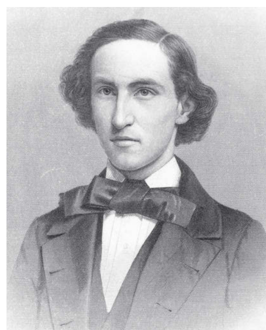
Para fins de cálculo de produtos, é desejável ter uma fórmula que expresse o produto escalar de dois vetores em termos de componentes. Vamos deduzir uma tal fórmula para vetores em R^3, sendo análoga a dedução para vetores em R^2.

Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dois vetores não nulos. Se o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ for θ, conforme indicado na Figura 3.2.7, então a lei dos cossenos resulta em

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta \tag{14}$$



▲ **Figura 3.2.7**



Josiah Willard Gibbs (1839–1903)

Nota histórica A notação de produto escalar foi introduzida pelo matemático e físico norte-americano J. Willard Gibbs num panfleto distribuído entre seus alunos da Universidade de Yale nos anos 1880. Originalmente, o produto era escrito como um ponto final na altura da linha, não centrado verticalmente como hoje em dia, sendo denominado *produto direto*. O panfleto de Gibbs acabou sendo incorporado num livro intitulado *Vector Analysis*, que foi publicado em 1901 por Gibbs com coautoria de um de seus alunos. Gibbs fez contribuições importantes na teoria dos campos de Termodinâmica e Eletromagnetismo e é geralmente considerado o maior físico norte-americano do século XIX.

[Imagem: The Granger Collection, New York]

Como $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, podemos reescrever (14) como

$$\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta = \tfrac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2)$$

ou

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \tfrac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2)$$

Substituindo

$$\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \qquad \|\mathbf{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

e

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}^2\| = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2$$

e, simplificando, obtemos

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \tag{15}$$

A fórmula companheira para vetores em R^2 é

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \tag{16}$$

Motivados pelo padrão nas Fórmulas (15) e (16), introduzimos a definição seguinte.

Embora tenhamos deduzido a Fórmula (15) e sua companheira bidimensional sob a hipótese de que **u** e **v** fossem não nulos, ocorre que essas fórmulas também são aplicáveis se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (verifique).

DEFINIÇÃO 4 Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ forem vetores em R^n, então o ***produto escalar*** (também denominado ***produto interno euclidiano***) de **u** e **v** é denotado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e definido por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 \cdots + u_nv_n \tag{17}$$

Em palavras, *para calcular o produto escalar (produto interno euclidiano), multiplicamos componentes correspondentes dos vetores e somamos os produtos resultantes.*

▶ EXEMPLO 7 Calculando produtos escalares usando componentes

(a) Use a Fórmula (15) para calcular o produto escalar dos vetores **u** e **v** do Exemplo 5.

(b) Calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ com os vetores em R^4

$$\mathbf{u} = (-1, 3, 5, 7), \quad \mathbf{v} = (-3, -4, 1, 0)$$

Solução (a) Em termo de componentes, temos $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 2, 2)$. Assim,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (0)(0) + (0)(2) + (1)(2) = 2$$

que confere com o resultado obtido no Exemplo 5.

Solução (b)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1)(-3) + (3)(-4) + (5)(1) + (7)(0) = -4 \quad ◀$$

Propriedades algébricas do produto escalar

No caso especial em que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ na Definição 4, obtemos a relação

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \tag{18}$$

Isso fornece a fórmula seguinte para expressar o comprimento de um vetor em termos do produto escalar.

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \tag{19}$$

O produto escalar tem muitas das mesmas propriedades algébricas do produto de números reais.

TEOREMA 3.2.2 *Se* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *forem vetores em* R^n *e se a for um escalar, então*

(*a*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ **[Simetria]**

(*b*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ **[Distributividade]**

(*c*) $a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$ **[Homogeneidade]**

(*d*) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, *sendo* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ *se, e só se,* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ **[Positividade]**

Vamos provar as partes (*c*) e (*d*) e deixar as outras provas como exercícios.

Prova (c) Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Então

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= a(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n) \\ &= (au_1)v_1 + (au_2)v_2 + \cdots + (au_n)v_n = (a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

Prova (d) O resultado segue das partes (*a*) e (*b*) do Teorema 3.2.1 e do fato de que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1v_1 + v_2v_2 + \cdots + v_nv_n = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \quad ◀$$

O próximo teorema fornece propriedades adicionais do produto escalar. As provas podem ser obtidas expressando os vetores em termos de componentes ou, então, usando propriedades algébricas estabelecidas no Teorema 3.2.2.

TEOREMA 3.2.3 *Se* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *forem vetores em* R^n *e se a for um escalar, então*

(*a*) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{0} = 0$

(*b*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

(*c*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

(*d*) $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

(*e*) $a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v})$

Mostremos como o Teorema 3.2.2 pode ser usado para provar a parte (*b*) sem passar para os componentes dos vetores. As outras provas são deixadas como exercícios.

Prova (b)

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) && \textbf{[Por simetria]} \\ &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} && \textbf{[Por distributividade]} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} && \textbf{[Por simetria]} \quad ◀ \end{aligned}$$

As Fórmulas (18) e (19), juntamente com os Teoremas 3.2.2 e 3.2.3, tornam possível usar técnicas algébricas familiares para trabalhar com expressões envolvendo o produto escalar.

▶ EXEMPLO 8 Calculando com produto escalar

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} - 2\mathbf{v}) \cdot (3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot (3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}) - 2\mathbf{v} \cdot (3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}) \\ &= 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - 6(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) - 8(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\ &= 3\|\mathbf{u}\|^2 - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - 8\|\mathbf{v}\|^2 \quad ◀ \end{aligned}$$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz e ângulos em R^n

Nosso próximo objetivo é estender ao R^n a noção de "ângulo" entre vetores não nulos **u** e **v**. Para isso, começamos com a fórmula

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right) \tag{20}$$

que já derivamos para vetores não nulos em R^2 e R^3. Como já definimos o produto escalar e a norma para vetores em R^n, poderia parecer que essa fórmula tem todos os ingredientes para servir como uma *definição* do ângulo θ ente dois vetores **u** e **v** em R^n. Contudo, há um problema: o arco cosseno da Fórmula (20) só está definido se seu argumento satisfizer as desigualdades

$$-1 \le \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \le 1 \tag{21}$$

Felizmente, essas desigualdades *são válidas* com quaisquer vetores não nulos em R^n, como consequência do resultado fundamental seguinte, conhecido como ***desigualdade de Cauchy-Schwarz***.

TEOREMA 3.2.4 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *e* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *forem vetores em* R^n, *então*

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \le \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \tag{22}$$

ou, em termos de componentes,

$$|u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n| \le (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)^{1/2}\,(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)^{1/2} \tag{23}$$

Omitimos a prova desse teorema porque, adiante neste texto, demonstraremos uma versão mais geral da qual esse será um caso particular. Nosso objetivo imediato é usar esse teorema para provar que as desigualdades (21) valem com vetores não nulos quaisquer em R^n. Uma vez conseguido isso, teremos estabelecido todos os resultados necessários para usar a Fórmula (20) como nossa *definição* de ângulo entre dois vetores não nulos **u** e **v** em R^n.

Para provar que as desigualdades em (21) valem com vetores não nulos quaisquer em R^n, dividimos ambos lados da Fórmula (22) pelo produto $\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$ para obter

$$\frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \le 1 \quad \text{ou, equivalentemente,} \left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right| \le 1$$

do que segue (21).



Hermann Amandus Schwarz (1843–1921)



Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804–1889)

Nota histórica A desigualdade de Cauchy-Schwarz homenageia o matemático francês Augustin Cauchy (ver página 109) e o matemático alemão Hermann Schwarz. Variações dessa desigualdade aparecem em muitas situações distintas e sob vários nomes. Dependendo do contexto em que a desigualdade ocorre, pode ser chamada de desigualdade de Cauchy, desigualdade de Schwarz ou, às vezes, até desigualdade de Bunyakovsky, em reconhecimento ao matemático russo que publicou sua versão da desigualdade em 1859, cerca de 25 anos antes de Schwarz.

[Imagens: Wikipedia]

Geometria em R^n

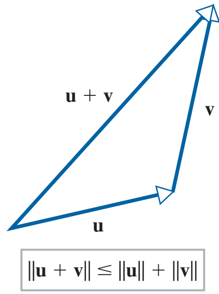


Figura 3.2.8

No início desta seção, estendemos ao R^n vários conceitos com a ideia de que resultados que podemos visualizar em R^2 e R^3 possam ser válidos também em R^n. Aqui temos dois teoremas fundamentais da Geometria Plana cuja validade se estende ao R^n.

- A soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é, pelo menos, igual ao comprimento do terceiro (Figura 3.2.8).
- A distância mais curta entre dois pontos é obtida com uma reta.

O teorema seguinte generaliza esses resultados para o R^n.

TEOREMA 3.2.5 *Se* **u**, **v** *e* **w** *forem vetores em* R^n, *então*

(*a*) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ **[Desigualdade triangular para vetores]**

(*b*) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u},\mathbf{w}) + d(\mathbf{w},\mathbf{v})$ **[Desigualdade triangular para distâncias]**

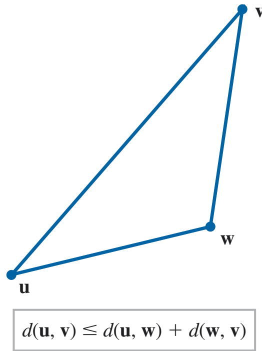


Figura 3.2.9

Prova (a)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2\\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| + \|\mathbf{v}\|^2 \quad \text{← Propriedade do valor absoluto}\\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \quad \text{← Desigualdade de Cauchy-Schwarz}\\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2\end{aligned}$$

Prova (b) Segue da parte (*a*) e da Fórmula (11) que

$$\begin{aligned}d(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \|(\mathbf{u}-\mathbf{w}) + (\mathbf{w}-\mathbf{v})\|\\ &\leq \|\mathbf{u}-\mathbf{w}\| + \|\mathbf{w}-\mathbf{v}\| = d(\mathbf{u},\mathbf{w}) + d(\mathbf{w},\mathbf{v}) \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Na Geometria Plana, prova-se que, em qualquer paralelogramo, a soma dos quadrados das diagonais é igual à soma dos quadrados dos quatro lados (Figura 3.2.10). O teorema seguinte generaliza esse resultado ao R^n.

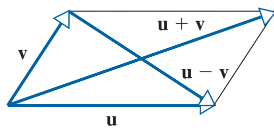


Figura 3.2.10

TEOREMA 3.2.6 Identidade do paralelogramo com vetores

Se **u** *e* **v** *forem vetores em* R^n, *então*

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\right) \tag{24}$$

Prova

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})\\ &= 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) + 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\\ &= 2\left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\right) \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Poderíamos enunciar e provar muitos outros teoremas da Geometria Plana que generalizam para o R^n, mas os que já vimos deveriam ser suficientes para convencer o leitor que o R^n não é tão diferente de R^2 e R^3, mesmo se não o conseguirmos visualizar diretamente. O próximo teorema estabelece uma relação fundamental entre o produto escalar e a normas em R^n.

TEOREMA 3.2.7 *Se* **u** *e* **v** *forem vetores em* R^n *com o produto escalar, então*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \tfrac{1}{4}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \tfrac{1}{4}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 \tag{25}$$

Prova

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2$$
$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2$$

do que (25) decorre facilmente. ◄

Observe que a Fórmula (25) expressa o produto escalar em termos de normas.

O produto escalar como multiplicação matricial

Há várias maneiras de expressar o produto escalar de vetores usando notação matricial. Essas fórmulas dependem de expressar os vetores como matrizes linha ou coluna. Aqui estão as possibilidades.

Tabela 1

Forma	Produto escalar	Exemplo	
u e **v** como matrizes coluna	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}$	$\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\-3\\5\end{bmatrix}$ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}5\\4\\0\end{bmatrix}$	$\mathbf{u}^T\mathbf{v} = [1 \quad -3 \quad 5]\begin{bmatrix}5\\4\\0\end{bmatrix} = -7$ $\mathbf{v}^T\mathbf{u} = [5 \quad 4 \quad 0]\begin{bmatrix}1\\-3\\5\end{bmatrix} = -7$
u como matriz linha e **v** como matriz coluna	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}^T$	$\mathbf{u} = [1 \quad -3 \quad 5]$ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}5\\4\\0\end{bmatrix}$	$\mathbf{u}\mathbf{v} = [1 \quad -3 \quad 5]\begin{bmatrix}5\\4\\0\end{bmatrix} = -7$ $\mathbf{v}^T\mathbf{u}^T = [5 \quad 4 \quad 0]\begin{bmatrix}1\\-3\\5\end{bmatrix} = -7$
u como matriz coluna e **v** como matriz linha	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{u}^T\mathbf{v}^T$	$\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\-3\\5\end{bmatrix}$ $\mathbf{v} = [5 \quad 4 \quad 0]$	$\mathbf{v}\mathbf{u} = [5 \quad 4 \quad 0]\begin{bmatrix}1\\-3\\5\end{bmatrix} = -7$ $\mathbf{u}^T\mathbf{v}^T = [1 \quad -3 \quad 5]\begin{bmatrix}5\\4\\0\end{bmatrix} = -7$
u e **v** como matrizes linha	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T = \mathbf{v}\mathbf{u}^T$	$\mathbf{u} = [1 \quad -3 \quad 5]$ $\mathbf{v} = [5 \quad 4 \quad 0]$	$\mathbf{u}\mathbf{v}^T = [1 \quad -3 \quad 5]\begin{bmatrix}5\\4\\0\end{bmatrix} = -7$ $\mathbf{v}\mathbf{u}^T = [5 \quad 4 \quad 0]\begin{bmatrix}1\\-3\\5\end{bmatrix} = -7$

Se A for uma matriz $n \times n$ e **u** e **v** forem matrizes $n \times 1$, então segue da primeira linha da Tabela 1 e das propriedades da transposta que

$$A\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}^T(A\mathbf{u}) = (\mathbf{v}^T A)\mathbf{u} = (A^T\mathbf{v})^T\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot A^T\mathbf{v}$$
$$\mathbf{u}\cdot A\mathbf{v} = (A\mathbf{v})^T\mathbf{u} = (\mathbf{v}^T A^T)\mathbf{u} = \mathbf{v}^T(A^T\mathbf{u}) = A^T\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$$

As fórmulas resultantes,

$$A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot A^T\mathbf{v} \quad (26)$$

$$\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = A^T\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad (27)$$

fornecem uma ligação importante entre a multiplicação por uma matriz A de tamanho $n \times n$ e a multiplicação por A^T.

▶ EXEMPLO 9 Verificando que $A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot A^T\mathbf{v}$

Suponha que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Então

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

do que obtemos

$$A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 7(-2) + 10(0) + 5(5) = 11$$
$$\mathbf{u} \cdot A^T\mathbf{v} = (-1)(-7) + 2(4) + 4(-1) = 11$$

Assim, vale $A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot A^T\mathbf{v}$, como garante a Fórmula (26). Deixamos para o leitor verificar que (27) também vale. ◀

A multiplicação matricial do ponto de vista do produto escalar

O produto escalar fornece uma outra maneira de pensar sobre a multiplicação matricial. Lembre que se $A = [a_{ij}]$ for uma matriz $m \times r$ e $B = [b_{ij}]$ uma matriz $r \times n$, então a ij-ésima entrada de AB é

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

que é o produto escalar do i-ésimo vetor linha

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{ir}]$$

de A com o j-ésimo vetor coluna de B.

$$\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{bmatrix}$$

Assim, se $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$ forem os vetores linha de A e $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ os vetores coluna de B, então podemos escrever o produto matricial AB como

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{c}_1 & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{c}_n \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{c}_1 & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{c}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{c}_1 & \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{c}_n \end{bmatrix} \quad (28)$$

Uma aplicação do produto escalar ao números do ISBN

Embora o sistema tenha sido alterado recentemente, a maioria dos livros publicados nos últimos 25 anos possui um indicativo numérico utilizado internacionalmente para a identificação de livros, que consiste em dez dígitos, denominado ISBN (das iniciais em inglês, ***International Standard Book Number***). Os nove primeiros dígitos desse número estão divididos em três grupos: o primeiro grupo representa o país ou grupo de países no qual se originou o livro, o segundo identifica a editora que o publicou, e o terceiro identifica o título do próprio livro. O décimo e último dígito, denominado ***dígito de verificação***, é calculado a partir dos nove primeiros e é utilizado para garantir que não haja erro numa transmissão eletrônica do ISBN, digamos, pela Internet.

Para explicar como isso é feito, considere os nove primeiros dígitos do ISBN como um vetor $\mathbf{b}$ de R^9 e seja $\mathbf{a}$ o vetor

$$\mathbf{a} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$$

Então o dígito de verificação c é calculado pelo procedimento seguinte.

1. Calcule o produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
2. Divida $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ por 11, produzindo um resto c, que é um inteiro entre 0 e 10, inclusive. O dígito de verificação é tomado como sendo c, com a ressalva de trocar 10 por X para evitar mais de um dígito.

Por exemplo, o ISBN do Novo Aurélio Século XXI é

85-209-1010-6

com um dígito de verificação igual a 6. Isso é consistente com os nove primeiros dígitos do ISBN, pois

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \cdot (8, 5, 2, 0, 9, 1, 0, 1, 0) = 83$$

Dividindo 83 por 11, obtemos um quociente de 7 e um resto de 6, de modo que o dígito de verificação é $c = 6$. Se uma loja de uma rede de livrarias encomendar o Aurélio por meio de um pedido transmitido eletronicamente ao depósito, então o depósito pode usar esse procedimento para verificar se o dígito de verificação é consistente com os nove primeiros dígitos transmitidos e, assim, reduzir a possibilidade de erro na remessa.

Revisão de conceitos

- Norma (ou comprimento ou magnitude) de um vetor
- Vetor unitário
- Vetor normalizado
- Vetores unitários canônicos
- Distância entre pontos em R^n
- Ângulo entre dos vetores em R^n
- Produto escalar (ou produto interno euclidiano) de dois vetores em R^n
- Desigualdade de Cauchy-Schwarz
- Desigualdade triangular
- Identidade do paralelogramo de vetores

Aptidões desenvolvidas

- Calcular a norma de um vetor em R^n.
- Determinar se um dado vetor em R^n é unitário.
- Normalizar um vetor não nulo.
- Determinar a distância entre dois vetores em R^n.
- Calcular o produto escalar de dois vetores em R^n.
- Calcular o ângulo entre dois vetores não nulos em R^n.
- Provar as propriedades básicas relativas a normas e produtos escalares (Teoremas 3.2.1–3.2.3 e 3.2.5–3.2.7).

Conjunto de exercícios 3.2

► Nos Exercícios 1–2, encontre a norma de $\mathbf{v}$, um vetor unitário de mesma direção e sentido de $\mathbf{v}$ e um vetor unitário de mesma direção e sentido oposto de $\mathbf{v}$. ◄

1. (a) $\mathbf{v} = (4, -3)$ (b) $\mathbf{v} = (2, 2, 2)$
(c) $\mathbf{v} = (1, 0, 2, 1, 3)$

2. (a) $\mathbf{v} = (-5, 12)$ (b) $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$
(c) $\mathbf{v} = (-2, 3, 3, -1)$

► Nos Exercícios 3–4, calcule a expressão dada com $\mathbf{u} = (2, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, -3, 4)$ e $\mathbf{w} = (3, 6, -4)$. ◄

3. (a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ (b) $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$
(c) $\|-2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}\|$ (d) $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$

4. (a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ (b) $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$
(c) $\|3\mathbf{v} - 3\mathbf{v}\|$ (d) $\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$

► Nos Exercícios 5–6, calcule a expressão dada com $\mathbf{u} = (-2, -1, 4, 5)$, $\mathbf{v} = (3, 1, -5, 7)$ e $\mathbf{w} = (-6, 2, 1, 1)$. ◄

5. (a) $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ (b) $\|3\mathbf{u}\| - 5\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$
(c) $\|-\|\mathbf{u}\|\mathbf{v}\|$

6. (a) $\|\mathbf{u}\| - 2\|\mathbf{v}\| - 3\|\mathbf{w}\|$ (b) $\|\mathbf{u}\| + \|-2\mathbf{v}\| + \|-3\mathbf{w}\|$
(c) $\|\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|\mathbf{w}\|$

7. Seja $\mathbf{v} = (-2, 3, 0, 6)$. Encontre todos os escalares k tais que $\|k\mathbf{v}\| = 5$.

8. Seja $\mathbf{v} = (1, 1, 2, -3, 1)$. Encontre todos os escalares k tais que $\|k\mathbf{v}\| = 4$.

▶ Nos Exercícios 9–10, encontre $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$. ◀

9. (a) $\mathbf{u} = (3, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (2, 2, -4)$

(b) $\mathbf{u} = (1, 1, 4, 6)$, $\mathbf{v} = (2, -2, 3, -2)$

10. (a) $\mathbf{u} = (1, 1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (-1, 0, 5, 1)$

(b) $\mathbf{u} = (2, -1, 1, 0, -2)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 2, 2, 1)$

▶ Nos Exercícios 11–12, encontre a distância euclidiana entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. ◀

11. (a) $\mathbf{u} = (3, 3, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 0, 4)$

(b) $\mathbf{u} = (0, -2, -1, 1)$, $\mathbf{v} = (-3, 2, 4, 4)$

(c) $\mathbf{u} = (3, -3, -2, 0, -3, 13, 5)$, $\mathbf{v} = (-4, 1, -1, 5, 0, -11, 4)$

12. (a) $\mathbf{u} = (1, 2, -3, 0)$, $\mathbf{v} = (5, 1, 2, -2)$

(b) $\mathbf{u} = (2, -1, -4, 1, 0, 6, -3, 1)$, $\mathbf{v} = (-2, -1, 0, 3, 7, 2, -5, 1)$

(c) $\mathbf{u} = (0, 1, 1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 0, -1, 3)$

13. Encontre o cosseno do ângulo entre os vetores de cada parte do Exercício 11 e decida se o ângulo encontrado é agudo, obtuso ou reto.

14. Encontre o cosseno do ângulo entre os vetores de cada parte do Exercício 12 e decida se o ângulo encontrado é agudo, obtuso ou reto.

15. Suponha que um vetor **a** do plano *xy* tenha um comprimento de 9 unidades e aponte na direção que faz um ângulo de 120° no sentido anti-horário a partir do eixo *x* positivo e que um vetor **b** daquele plano tenha um comprimento de 5 unidades e aponte na direção e sentido do eixo *y* positivo. Encontre $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

16. Suponha que um vetor **a** do plano *xy* aponte na direção que faz um ângulo de 47° no sentido anti-horário a partir do eixo *x* positivo e que um vetor **b** daquele plano aponte na direção que faz um ângulo de 43° no sentido anti-horário a partir do eixo *x* positivo. O que pode ser dito sobre o valor de $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$?

▶ Nos Exercícios 17–18, determine se a expressão faz sentido matemático. Se não fizer, explique. ◀

17. (a) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$ (b) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

(c) $\|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\|$ (d) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) - \|\mathbf{u}\|$

18. (a) $\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$ (b) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{w}$

(c) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) - k$ (d) $k\cdot\mathbf{u}$

19. Em cada parte, encontre um vetor de mesma direção e sentido do vetor.

(a) $(-4, -3)$ (b) $(1, 7)$

(c) $(-3, 2, \sqrt{3})$ (d) $(1, 2, 3, 4, 5)$

20. Em cada parte, encontre um vetor unitário de mesma direção e sentido oposto ao do vetor.

(a) $(-12, -5)$ (b) $(3, -3, -3)$

(c) $(-6, 8)$ (d) $(-3, 1, \sqrt{6}, 3)$

21. Enuncie um procedimento para encontrar um vetor de um comprimento especificado *m* que aponte na mesma direção e sentido de um vetor **v** dado.

22. Se $\|\mathbf{v}\| = 2$ e $\|\mathbf{w}\| = 3$, quais são os maiores e menores valores possíveis de $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$? Interprete seu resultado geometricamente.

23. Em cada parte, encontre o cosseno do ângulo θ entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

(a) $\mathbf{u} = (2, 3)$, $\mathbf{v} = (5, -7)$

(b) $\mathbf{u} = (-6, -2)$, $\mathbf{v} = (4, 0)$

(c) $\mathbf{u} = (1, -5, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 3, 3)$

(d) $\mathbf{u} = (-2, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 7, -4)$

24. Em cada parte, encontre a medida em radianos do ângulo θ (com $0 \le \theta \le \pi$) entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

(a) $(1, -7)$ e $(21, 3)$ (b) $(0, 2)$ e $(3, -3)$

(c) $(-1, 1, 0)$ e $(0, -1, 1)$ (d) $(1, -1, 0)$ e $(1, 0, 0)$

▶ Nos Exercícios 25–26, verifique a validade da desigualdade de Cauchy-Schwarz. ◀

25. (a) $\mathbf{u} = (3, 2)$, $\mathbf{v} = (4, -1)$

(b) $\mathbf{u} = (-3, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$

(c) $\mathbf{u} = (0, 2, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$

26. (a) $\mathbf{u} = (4, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$

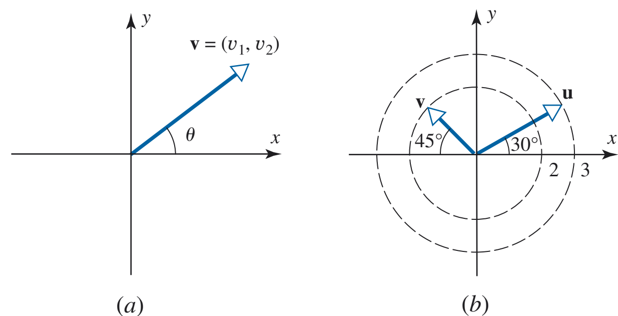
(b) $\mathbf{u} = (1, 2, 1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 1, 5, -2)$

(c) $\mathbf{u} = (1, 3, 5, 2, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 2, 4, 1, 3, 5)$

27. Sejam $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\mathbf{p} = (x, y, z)$. Descreva o conjunto de todos os pontos (x, y, z) para os quais $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\| = 1$.

28. (a) Mostre que os componentes do vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ na Figura Ex-28*a* são $v_1 = \|\mathbf{v}\|\cos\theta$ e $v_2 = \|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta$.

(b) Sejam **u** e **v** os vetores na Figura Ex-28*b*. Use o resultado da parte (a) para encontrar os componentes de $4\mathbf{u} - 5\mathbf{v}$.



▲ **Figura Ex-28**

29. Prove as partes (*a*) e (*b*) do Teorema 3.2.1.

30. Prove as partes (*a*) e (*c*) do Teorema 3.2.3.

31. Prove as partes (*d*) e (*e*) do Teorema 3.2.3.

32. A desigualdade triangular (Teorema 3.2.5*a*) é uma igualdade sob quais condições? Explique sua resposta geometricamente.

33. O que pode ser dito sobre dois vetores não nulos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ que satisfazem a equação $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$?

34. (a) Qual relação deve ser verificada para que o ponto $\mathbf{p} = (a, b, c)$ esteja equidistante da origem e do plano xz? Garanta que a relação enunciada seja válida para valores positivos e negativos de a, b e c.

(b) Qual relação deve ser verificada para que o ponto $\mathbf{p} = (a, b, c)$ esteja mais distante da origem do que do plano xz? Garanta que a relação enunciada seja válida para valores positivos e negativos de a, b e c.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(j), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se cada componente de um vetor em R^3 for duplicado, a norma desse vetor é duplicada.

(b) Em R^2, os vetores de norma 5 cujo ponto inicial esteja na origem têm ponto final num círculo de raio 5 centrado na origem.

(c) Cada vetor em R^n tem norma positiva.

(d) Se $\mathbf{v}$ for um vetor não nulo em R^n, existem exatamente dois vetores unitários paralelos a $\mathbf{v}$.

(e) Se $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = 1$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1$, então o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ mede $\pi/3$ radianos.

(f) Ambas expressões $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ e $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ fazem sentido e são iguais.

(g) Se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, então $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

(h) Se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, então $\mathbf{u} = 0$ ou $\mathbf{u} = 0$.

(i) Em R^2, se $\mathbf{u}$ estiver no primeiro quadrante e $\mathbf{v}$ no terceiro quadrante, então $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ não pode ser positivo.

(j) Dados quaisquer vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ em R^n, temos

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$$

3.3 Ortogonalidade

Na seção anterior, definimos a noção de "ângulo" entre vetores em R^n. Nesta seção, tratamos da noção de "perpendicularidade". Os vetores perpendiculares em R^n desempenham um papel importante numa grande variedade de aplicações.

Vetores ortogonais

Lembre que, na Fórmula (20) da seção anterior, definimos o ângulo θ entre dois vetores *não nulos* $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em R^n pela fórmula

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right)$$

Segue disso que $\theta = \pi/2$ se, e só se, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Assim, obtemos a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 1 Dizemos que dois vetores não nulos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em R^n são ***ortogonais*** (ou ***perpendiculares***) se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Também convencionamos que o vetor nulo em R^n é ortogonal a *cada* vetor em R^n. Um conjunto não vazio de vetores em R^n é denominado ***ortogonal*** se dois quaisquer de seus vetores forem ortogonais. Um conjunto ortogonal de vetores unitários é dito ***ortonormal***.

► **EXEMPLO 1 Vetores ortogonais**

(a) Mostre que $\mathbf{u} = (-2, 3, 1, 4)$ e $\mathbf{v} = (1, 2, 0, -1)$ são vetores ortogonais em R^4.

(b) Mostre que o conjunto $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ dos vetores unitários canônicos é um conjunto ortogonal em R^3.

Solução (a) Os vetores são ortogonais pois

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-2)(1) + (3)(2) + (1)(0) + (4)(-1) = 0$$

No Exemplo 1, não há necessidade de conferir que

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0$$

pois isso segue das contas feitas no exemplo e da propriedade de simetria do produto escalar.

Solução (*b*) Devemos mostrar que todos os pares de vetores distintos são ortogonais, ou seja,

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

Isso é geometricamente evidente (Figura 3.2.2), mas pode ser visto também pelas contas

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0$$
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = (1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$$
$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = (0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$$ ◀

Retas e planos determinados por pontos e normais

Aprende-se na Geometria Analítica que uma reta em R^2 é determinada de maneira única por sua inclinação e um de seus pontos, e que um plano em R^3 é determinado de maneira única por sua "inclinação" e um de seus pontos. Uma maneira de especificar essas inclinações é utilizar um vetor *não nulo* **n**, denominado ***normal***, que seja ortogonal à reta ou ao plano em questão. Por exemplo, a Figura 3.3.1 mostra a reta pelo ponto $P_0(x_0, y_0)$ de normal $\mathbf{n} = (a, b)$ e o plano pelo ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$. Tanto a reta quanto o plano são representados pela equação vetorial

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \tag{1}$$

em que P é um ponto arbitrário (x, y) da reta ou (x, y, z) do plano. O vetor $\overrightarrow{P_0P}$ pode ser dado em termos de componentes como

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0) \quad \textbf{[reta]}$$

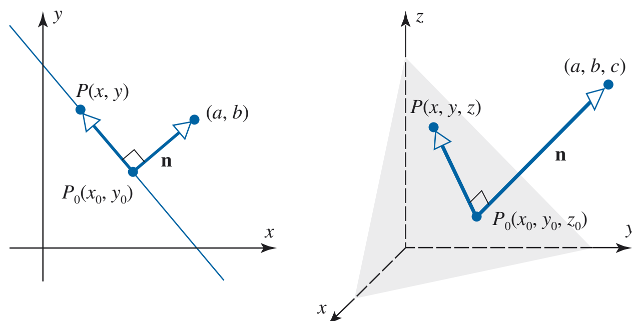
$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \quad \textbf{[plano]}$$

Assim, a Equação (1) pode ser escrita como

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad \textbf{[reta]} \tag{2}$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad \textbf{[plano]} \tag{3}$$

Essas equações são denominadas equações ***ponto-normal*** da reta e do plano.



▶ **Figura 3.3.1**

▶ EXEMPLO 2 Equações ponto-normal

Segue de (2) que, em R^2, a equação

$$6(x - 3) + (y + 7) = 0$$

representa a reta pelo ponto (3, −7) de normal $\mathbf{n} = (6, 1)$ e segue de (3) que, em R^3, a equação

$$4(x - 3) + 2y - 5(z - 7) = 0$$

representa um plano pelo ponto (3, 0, 7) de normal $\mathbf{n} = (4, 2, -5)$. ◀

Quando for conveniente, podemos multiplicar todos os termos nas Equações (2) e (3) e combinar as constantes. Isso leva ao resultado a seguir.

TEOREMA 3.3.1

(*a*) *Se a e b forem constantes não ambas nulas, então uma equação da forma*

$$ax + by + c = 0 \tag{4}$$

representa uma reta em R^2 *de normal* $\mathbf{n} = (a, b)$.

(*b*) *Se a, b e c forem constantes não todas nulas, então uma equação da forma*

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{5}$$

representa um plano em R^3 *de normal* $\mathbf{n} = (a, b, c)$.

▶ EXEMPLO 3 Vetores ortogonais a retas e planos pela origem

(a) A equação $ax + by = 0$ representa uma reta pela origem em R^2. Mostre que o vetor $\mathbf{n}_1 = (a, b)$ formado pelos coeficientes da equação é ortogonal à reta, ou seja, ortogonal a cada vetor ao longo da reta.

(b) A equação $ax + by + cz = 0$ representa um plano pela origem em R^3. Mostre que o vetor $\mathbf{n}_2 = (a, b, c)$ formado pelos coeficientes da equação é ortogonal ao plano, ou seja, ortogonal a cada vetor que fica no plano.

Solução Resolvemos ambos os problemas simultaneamente. As duas equações podem ser escritas como

$$(a, b) \cdot (x, y) = 0 \quad \text{e} \quad (a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0$$

ou, alternativamente, como

$$\mathbf{n}_1 \cdot (x, y) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{n}_2 \cdot (x, y, z) = 0$$

Essas equações mostram que $\mathbf{n}_1$ é ortogonal a cada vetor (x, y) na reta e que $\mathbf{n}_2$ é ortogonal a cada vetor (x, y, z) no plano (Figura 3.3.1). ◀

Vimos que

$$ax + by = 0 \quad \text{e} \quad ax + by + cz = 0$$

são ditas *equações homogêneas*. O Exemplo 3 ilustra que equações homogêneas em duas ou três incógnitas podem ser escritas na forma vetorial

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0 \tag{6}$$

em que $\mathbf{n}$ é o vetor de coeficientes e $\mathbf{x}$ é o vetor das incógnitas. Em R^2, isso é a ***forma vetorial de uma reta*** pela origem e, em R^3, é a ***forma vetorial de um plano*** pela origem.

Usando a Tabela 1 da Seção 3.2, de que outras maneiras podemos escrever (6) se $\mathbf{n}$ e $\mathbf{x}$ forem dados em forma matricial?

Projeções ortogonais

Em muitas aplicações, é necessário "decompor" um vetor **u** na soma de dois componentes, um deles sendo um múltiplo escalar de um vetor não nulo especificado **a** e o outro, perpendicular a **a**. Por exemplo, se **u** e **a** são vetores em R^2 posicionados com seus pontos iniciais coincidindo num ponto Q, podemos criar uma tal decomposição como segue (Figura 3.3.2).

- Baixamos uma perpendicular da ponta de **u** para a reta ao longo de **a**.
- Construímos o vetor $\mathbf{w}_1$ de Q ao pé da perpendicular.
- Construímos o vetor $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$.

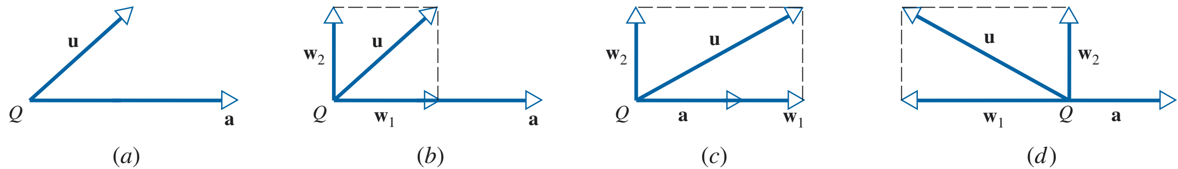


Figura 3.3.2 Nas partes (*b*) até (*d*), $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, em que $\mathbf{w}_1$ é paralelo a **a** e $\mathbf{w}_2$ é ortogonal a **a**.

Como

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + (\mathbf{u} - \mathbf{w}_1) = \mathbf{u}$$

obtivemos uma decomposição de **u** numa soma de dois vetores ortogonais, o primeiro deles sendo um múltiplo escalar de **a** e o segundo sendo ortogonal a **a**.

O próximo teorema mostra que o resultado precedente, que foi apresentado usando vetores em R^2, também é válido em R^n.

TEOREMA 3.3.2 Teorema da Projeção

Se **u** *e* **a** *forem vetores em* R^n *e se* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, *então* **u** *pode ser escrito de maneira única na forma* $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, *em que* $\mathbf{w}_1$ *é um múltiplo escalar de* **a** *e* $\mathbf{w}_2$ *é ortogonal a* **a**.

Prova Como o vetor $\mathbf{w}_1$ deve ser um múltiplo escalar de **a**, deve ter a forma

$$\mathbf{w}_1 = k\mathbf{a} \tag{7}$$

Nosso objetivo é encontrar um valor do escalar k e um vetor $\mathbf{w}_2$ que seja ortogonal a **a** e tal que

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \tag{8}$$

Podemos determinar k usando (7) para reescrever (8) como

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = k\mathbf{a} + \mathbf{w}_2$$

e então aplicar os Teoremas 3.2.2 e 3.2.3 para obter

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = (k\mathbf{a} + \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{a} = k\|\mathbf{a}\|^2 + (\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{a}) \tag{9}$$

Como $\mathbf{w}_2$ é ortogonal a **a**, a última parcela em (9) deve ser 0 e, portanto, k deve satisfazer a equação

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = k\|\mathbf{a}\|^2$$

da qual obtemos

$$k = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

como o único valor possível de k. A prova pode ser concluída reescrevendo (8) como

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = \mathbf{u} - k\mathbf{a} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$

e confirmando que $\mathbf{w}_2$ é ortogonal a $\mathbf{a}$, o que se faz mostrando que $\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{a} = 0$ (deixamos os detalhes para o leitor). ◀

Os vetores $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ no teorema da projeção têm nomes. O vetor $\mathbf{w}_1$ é denominado ***projeção ortogonal de u sobre a*** ou, então, ***componente vetorial de u ao longo de a*** e o vetor $\mathbf{w}_2$ é denominado ***componente vetorial de u ortogonal a a***. O vetor $\mathbf{w}_1$ costuma ser denotado pelo símbolo $\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$, caso em que segue de (8) que $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$. Resumindo, temos

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} \quad [\textit{componente vetorial de } \mathbf{u} \textit{ ao longo de } \mathbf{a}] \tag{10}$$

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} \quad [\textit{componente vetorial de } \mathbf{u} \textit{ ortogonal a } \mathbf{a}] \tag{11}$$

▶ EXEMPLO 4 Projeção ortogonal sobre uma reta

Encontre as projeções ortogonais dos vetores $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ sobre a reta L que faz um ângulo θ com o eixo x positivo em R^2.

Solução Conforme ilustrado na Figura 3.3.3, $\mathbf{a} = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$ é um vetor unitário ao longo de L, de modo que nosso primeiro problema é encontrar a projeção ortogonal de $\mathbf{e}_1$ sobre $\mathbf{a}$. Como

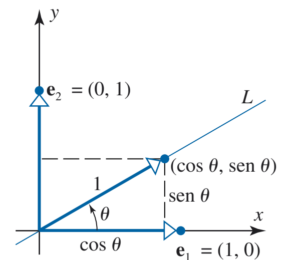
$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta} = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{a} = (1, 0)\cdot(\cos\theta, \text{sen}\,\theta) = \cos\theta$$

segue da Fórmula (10) que essa projeção é

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} = (\cos\theta)(\cos\theta, \text{sen}\,\theta) = (\cos^2\theta, \text{sen}\,\theta\cos\theta)$$

Analogamente, como $\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{a} = (0, 1)\cdot(\cos\theta, \text{sen}\,\theta) = \text{sen}\,\theta$, segue da Fórmula (10) que

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} = (\text{sen}\,\theta)(\cos\theta, \text{sen}\,\theta) = (\text{sen}\,\theta\cos\theta, \text{sen}^2\theta)$$



▲ Figura 3.3.3

▶ EXEMPLO 5 O componente vetorial de u ao longo de a

Sejam $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$ e $\mathbf{a} = (4, -1, 2)$. Encontre o componente vetorial de $\mathbf{u}$ ao longo de $\mathbf{a}$ e o componente vetorial de $\mathbf{u}$ ortogonal a $\mathbf{a}$.

Solução

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$$
$$\|\mathbf{a}\|^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21$$

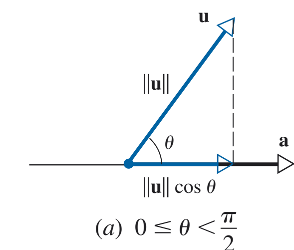
Assim, o componente vetorial de $\mathbf{u}$ ao longo de $\mathbf{a}$ é

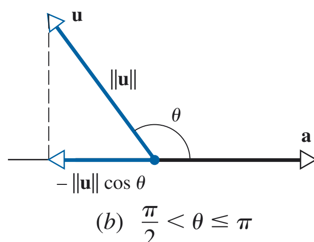
$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} = \tfrac{15}{21}(4, -1, 2) = \left(\tfrac{20}{7}, -\tfrac{5}{7}, \tfrac{10}{7}\right)$$

e o componente vetorial de $\mathbf{u}$ ortogonal a $\mathbf{a}$ é

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = (2, -1, 3) - \left(\tfrac{20}{7}, -\tfrac{5}{7}, \tfrac{10}{7}\right) = \left(-\tfrac{6}{7}, -\tfrac{2}{7}, \tfrac{11}{7}\right)$$

Para conferir, o leitor pode querer verificar que os vetores $\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$ e $\mathbf{a}$ são perpendiculares mostrando que seu produto escalar é zero. ◀





▲ **Figura 3.3.4**

Às vezes, estamos mais interessados na *norma* do componente vetorial de **u** ao longo de **a** do que no próprio componente vetorial. Uma fórmula para essa norma pode ser deduzida como segue.

$$\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\| = \left\|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}\right\| = \left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\right|\|\mathbf{a}\| = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|^2}\|\mathbf{a}\|$$

em que a segunda igualdade decorre da parte (*c*) do Teorema 3.2.1 e a terceira do fato de que $\|\mathbf{a}\|^2 > 0$. Assim,

$$\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\| = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|} \tag{12}$$

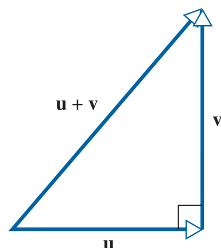
Se θ denota o ângulo entre **u** e **a**, então $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{a}\|\cos\theta$, de modo que (12) pode também ser escrito na forma

$$\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|\,|\cos\theta| \tag{13}$$

(Verifique.) Uma interpretação geométrica desse resultado é dada na Figura 3.3.4.

O teorema de Pitágoras

Na Seção 3.2, observamos que muitos teoremas sobre vetores em R^2 e R^3 também são válidos em R^n. Um outro exemplo disso é a generalização seguinte do Teorema de Pitágoras (Figura 3.3.5).



▲ **Figura 3.3.5**

TEOREMA 3.3.3 Teorema de Pitágoras em R^n

Se **u** *e* **v** *forem vetores ortogonais em R^n com o produto escalar, então*

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \tag{14}$$

Prova Como **u** e **v** são ortogonais, temos $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, do que segue que

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \quad ◀$$

▶ EXEMPLO 6 O teorema de Pitágoras em R^4

No Exemplo 1, mostramos que os vetores

$$\mathbf{u} = (-2, 3, 1, 4) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (1, 2, 0, -1)$$

são ortogonais. Verifique o teorema de Pitágoras com esses vetores.

Solução Deixamos para o leitor confirmar que

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (-1, 5, 1, 3)$$
$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = 36$$
$$\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = 30 + 6$$

Assim, $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$. ◀

OPCIONAL
Problemas de distância

Vejamos, agora, como usar projeções ortogonais para resolver os três problemas de distância seguintes.

Problema 1. Encontre a distância entre um ponto e uma reta em R^2.

Problema 2. Encontre a distância entre um ponto e um plano em R^3.

Problema 3. Encontre a distância entre dois planos paralelos em R^3.

O próximo teorema fornece um método para resolver os dois primeiros problemas. Como as provas das duas partes são análogas, provamos a parte (*b*), deixando a parte (*a*) como exercício.

TEOREMA 3.3.4

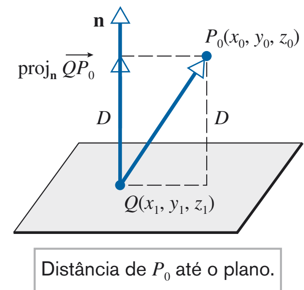
(*a*) *Em* R^2, *a distância D entre o ponto* $P_0(x_0, y_0)$ *e a reta* $ax + by + c = 0$ *é*

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{15}$$

(*b*) *Em* R^3, *a distância D entre o ponto* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *e o plano* $ax + by + cz + d = 0$ *é*

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{16}$$

Prova (b) Seja $Q(x_1, y_1, z_1)$ um ponto qualquer no plano e posicionemos a normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$ de tal forma que seu ponto inicial esteja em Q. Conforme ilustrado na Figura 3.3.6, a distância D é igual ao comprimento da projeção ortogonal $\overrightarrow{QP_0}$ sobre $\mathbf{n}$. Assim, segue da Fórmula (12) que



Distância de P_0 até o plano.

Figura 3.3.6

$$D = \|\text{proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{QP_0}\| = \frac{|\overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

No entanto,

$$\overrightarrow{QP_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$$

$$\overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)$$

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Assim,

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{17}$$

Como o ponto $Q(x_1, y_1, z_1)$ está no plano, suas coordenadas satisfazem a equação desse plano; logo,

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

ou

$$d = -ax_1 - by_1 - cz_1$$

Substituindo essa expressão em (17), obtemos (16). ◀

▶ EXEMPLO 7 Distância entre um ponto e um plano

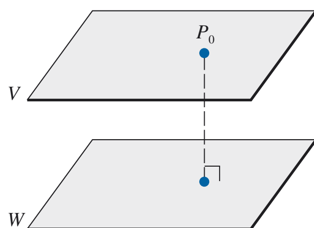
Encontre a distância D entre o ponto $(1, -4, -3)$ e o plano $2x - 3y + 6z = -1$.

Solução Como as fórmulas de distância no Teorema 3.3.4 exigem que as equações da reta e do plano estejam escritas com um zero do lado direito, começamos reescrevendo a equação do plano como

$$2x - 3y + 6z + 1 = 0$$

a partir do que obtemos

$$D = \frac{|2(1) + (-3)(-4) + 6(-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|-3|}{7} = \frac{3}{7}$$ ◀



▲ **Figura 3.3.7** A distância entre os planos paralelos V e W é igual à distância entre P_0 e W.

O terceiro problema de distância proposto é encontrar a distância entre dois planos paralelos em R^3. Conforme sugerido na Figura 3.3.7, a distância entre um plano V e um plano W pode ser obtida encontrando um ponto P_0 qualquer em um dos planos e calculando a distância entre esse ponto e o outro plano. Vejamos um exemplo.

▶ EXEMPLO 8 Distância entre planos paralelos

Os planos

$$x + 2y - 2z = 3 \quad \text{e} \quad 2x + 4y - 4z = 7$$

são paralelos porque suas normais, $(1, 2, -2)$ e $(2, 4, -4)$, são vetores paralelos. Encontre a distância entre esse planos

Solução Para encontrar a distância D entre os planos, podemos selecionar um ponto arbitrário em um dos planos e calcular sua distância ao outro plano. Tomando $y = z = 0$ na equação $x + 2y - 2z = 3$, obtemos o ponto $P_0(3, 0, 0)$ nesse plano. Usando (16), a distância entre P_0 e o plano $2x + 4y - 4z = 7$ é

$$D = \frac{|2(3) + 4(0) + (-4)(0) - 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{6} \quad ◀$$

Revisão de conceitos

- Vetores ortogonais (perpendiculares)
- Conjunto ortogonal de vetores
- Conjunto ortonormal de vetores
- Normal a uma reta
- Normal a um plano
- Equações ponto-normal
- Forma vetorial de uma reta
- Forma vetorial de um plano
- Projeção ortogonal de **u** sobre **a**
- Componente vetorial de **u** ao longo de **a**
- Componente vetorial de **u** ortogonal a **a**
- Teorema de Pitágoras

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se dois vetores são ortogonais.
- Determinar se um dado conjunto de vetores forma um conjunto ortogonal.
- Encontrar equações de retas (ou planos) usando um vetor normal e um ponto da reta (ou plano).
- Encontrar a forma vetorial de uma reta ou plano pela origem.
- Calcular o componente vetorial de **u** ao longo de **a** e ortogonal a **a**.
- Encontrar a distância entre um ponto e uma reta em R^2 ou R^3.
- Encontrar a distância entre dois planos paralelos em R^3.
- Encontrar a distância entre um ponto e um plano.

Conjunto de exercícios 3.3

▶ Nos Exercícios **1–2**, determine se **u** e **v** são vetores ortogonais. ◀

1. (a) $\mathbf{u} = (6, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (2, 0, -3)$
(b) $\mathbf{u} = (0, 0, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$
(c) $\mathbf{u} = (-6, 0, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 1, 6)$
(d) $\mathbf{u} = (2, 4, -8)$, $\mathbf{v} = (5, 3, 7)$

2. (a) $\mathbf{u} = (2, 3)$, $\mathbf{v} = (5, -7)$
(b) $\mathbf{u} = (-6, -2)$, $\mathbf{v} = (4, 0)$
(c) $\mathbf{u} = (1, -5, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 3, 3)$
(d) $\mathbf{u} = (-2, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 7, -4)$

▶ Nos Exercícios **3–4**, determine se os vetores formam um conjunto ortogonal. ◀

3. (a) $\mathbf{v}_1 = (2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 2)$
(b) $\mathbf{v}_1 = (-1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$
(c) $\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (-2, -5, 1)$
(d) $\mathbf{v}_1 = (-3, 4, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 5)$, $\mathbf{v}_3 = (4, -3, 0)$

4. (a) $\mathbf{v}_1 = (2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (-3, 2)$

(b) $\mathbf{v}_1 = (1, -2)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 1)$

(c) $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 1)$

(d) $\mathbf{v}_1 = (2, -2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, -2)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 2)$

5. Encontre um vetor unitário que seja ortogonal tanto a $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$ quanto a $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$.

6. (a) Mostre que $\mathbf{v} = (a, b)$ e $\mathbf{w} = (-b, a)$ são vetores ortogonais.

(b) Use o resultado na parte (a) para encontrar vetores que sejam ortogonais a $\mathbf{v} = (2, -3)$.

(c) Encontre dois vetores unitários ortogonais a $(-3, 4)$.

7. Verifique se os pontos $A(1, 1, 1)$, $B(-2, 0, 3)$ e $C(-3, -1, 1)$ formam os vértices de um triângulo retângulo. Explique sua resposta.

8. Repita o Exercício 7 com os pontos $A(3, 0, 2)$, $B(4, 3, 0)$ e $C(8, 1, -1)$.

▶ Nos Exercícios **9–12**, encontre uma forma ponto-normal da equação do plano que passa por P e tem $\mathbf{n}$ como normal. ◀

9. $P(-1, 3, -2)$; $\mathbf{n} = (-2, 1, -1)$

10. $P(1, 1, 4)$; $\mathbf{n} = (1, 9, 8)$ **11.** $P(2, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (0, 0, 2)$

12. $P(0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (1, 2, 3)$

▶ Nos Exercícios **13–16**, determine se os planos dados são paralelos. ◀

13. $4x - y + 2z = 5$ e $7x - 3y + 4z = 8$

14. $x - 4y - 3z - 2 = 0$ e $3x - 12y - 9z - 7 = 0$

15. $2y = 8x - 4z + 5$ e $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}y$

16. $(-4, 1, 2) \cdot (x, y, z) = 0$ e $(8, -2, -4) \cdot (x, y, z) = 0$

▶ Nos Exercícios **17–18**, determine se os planos são perpendiculares. ◀

17. $3x - y + z - 4 = 0$, $x + 2z = -1$

18. $x - 2y + 3z = 4$, $-2x + 5y + 4z = -1$

▶ Nos Exercícios **19–20**, encontre $\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\|$. ◀

19. (a) $\mathbf{u} = (1, -2)$, $\mathbf{a} = (-4, -3)$

(b) $\mathbf{u} = (3, 0, 4)$, $\mathbf{a} = (2, 3, 3)$

20. (a) $\mathbf{u} = (5, 6)$, $\mathbf{a} = (2, -1)$

(b) $\mathbf{u} = (3, -2, 6)$, $\mathbf{a} = (1, 2, -7)$

▶ Nos Exercícios **21–28**, encontre os componentes vetoriais de $\mathbf{u}$ ao longo de e ortogonal a $\mathbf{a}$. ◀

21. $\mathbf{u} = (6, 2)$, $\mathbf{a} = (3, -9)$ **22.** $\mathbf{u} = (-1, -2)$, $\mathbf{a} = (-2, 3)$

23. $\mathbf{u} = (3, 1, -7)$, $\mathbf{a} = (1, 0, 5)$

24. $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{a} = (4, 3, 8)$

25. $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{a} = (0, 2, -1)$

26. $\mathbf{u} = (2, 0, 1)$, $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$

27. $\mathbf{u} = (2, 1, 1, 2)$, $\mathbf{a} = (4, -4, 2, -2)$

28. $\mathbf{u} = (5, 0, -3, 7)$, $\mathbf{a} = (2, 1, -1, -1)$

▶ Nos Exercícios **29–32**, encontre a distância entre o ponto e a reta. ◀

29. $4x + 3y + 4 = 0$; $(-3, 1)$

30. $x - 3y + 2 = 0$; $(-1, 4)$

31. $y = -4x + 2$; $(2, -5)$

32. $3x + y = 5$; $(1, 8)$

▶ Nos Exercícios **33–36**, encontre a distância entre o ponto e o plano. ◀

33. $(3, 1, -2)$; $x + 2y - 2z = 4$

34. $(-1, -1, 2)$; $2x + 5y - 6z = 4$

35. $(-1, 2, 1)$; $2x + 3y - 4z = 1$

36. $(0, 3, -2)$; $x - y - z = 3$

▶ Nos Exercícios **37–40**, encontre a distância entre os planos paralelos. ◀

37. $2x - y - z = 5$ e $-4x + 2y + 2z = 12$

38. $3x - 4y + z = 1$ e $6x - 8y + 2z = 3$

39. $-4x + y - 3z = 0$ e $8x - 2y + 6z = 0$

40. $2x - y + z = 1$ e $2x - y + z = -1$

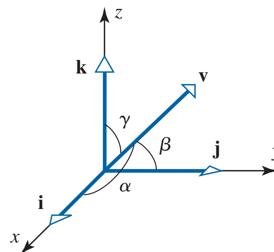
41. Sejam $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ os vetores unitários ao longo dos eixos x, y e z positivos de um sistema de coordenadas retangulares no espaço tridimensional. Se $\mathbf{v} = (a, b, c)$ é um vetor não nulo, então os ângulos α, β e γ entre $\mathbf{v}$ e os vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, respectivamente, são denominados ***ângulos diretores*** de $\mathbf{v}$ (Figura Ex-41), e os números α, γ e β são os ***cossenos diretores*** de $\mathbf{v}$.

(a) Mostre que $\cos\alpha = a/\|\mathbf{v}\|$.

(b) Encontre $\cos\beta$ e $\cos\gamma$.

(c) Mostre que $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\| = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

(d) Mostre que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.



◀ **Figura Ex-41**

42. Use o resultado do Exercício 41 para estimar, até o grau mais próximo, os ângulos que a diagonal de uma caixa de 10 cm × 15 cm × 25 cm faz com as arestas da caixa.

43. Mostre que se $\mathbf{v}$ for perpendicular a ambos $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, então $\mathbf{v}$ é ortogonal a $k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2$, com quaisquer escalares k_1 e k_2.

44. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores não nulos no espaço bi ou tridimensional e sejam $k = \|\mathbf{u}\|$ e $l = \|\mathbf{v}\|$. Mostre que o vetor $\mathbf{w} = l\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ bissecta o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

45. Prove a parte (*a*) do Teorema 3.3.4.

46. É possível ter

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{a}?$$

Explique seu raciocínio.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(g), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Os vetores $(3, -1, 2)$ e $(0, 0, 0)$ são ortogonais.

(b) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem vetores ortogonais, então dados quaisquer escalares não nulos r e s, os vetores $r\mathbf{u}$ e $s\mathbf{v}$ são ortogonais.

(c) A projeção ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{a}$ é perpendicular ao componente vetorial de $\mathbf{u}$ ortogonal a $\mathbf{a}$.

(d) Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ forem vetores ortogonais, então dado qualquer vetor não nulo $\mathbf{u}$, temos

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}(\text{proj}_{\mathbf{b}}(\mathbf{u})) = \mathbf{0}$$

(e) Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{u}$ forem vetores não nulos, temos

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}(\text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{u})) = \text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{u})$$

(f) Se a relação

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{v}$$

for válida com algum vetor não nulo $\mathbf{a}$, então $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

(g) Dados vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ quaisquer, vale

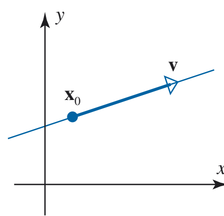
$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

3.4 A geometria de sistemas lineares

Nesta seção, utilizamos métodos paramétricos e vetoriais para estudar sistemas gerais de equações lineares. Nosso trabalho nos permitirá interpretar conjuntos de soluções de sistemas lineares em n incógnitas como objetos geométricos em R^n, da mesma forma que interpretamos conjuntos de soluções de sistemas lineares em duas e três incógnitas com pontos, retas e planos em R^2 e R^3.

Equações paramétricas e vetoriais de retas em R^2 e R^3

Na seção anterior, deduzimos as equações de retas e planos determinados por um ponto e um vetor normal. Contudo, há outras maneiras úteis de especificar retas e planos. Por exemplo, uma reta em R^2 ou R^3 é determinada de maneira única por um ponto $\mathbf{x}_0$ na reta e um vetor não nulo $\mathbf{v}$ paralelo à reta, e um plano em R^3 é determinado de maneira única por um ponto $\mathbf{x}_0$ no plano e dois vetores não nulos $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ paralelos ao plano. A melhor maneira de visualizar isso é transladar os vetores de tal modo que seus pontos iniciais sejam $\mathbf{x}_0$ (Figura 3.4.1).



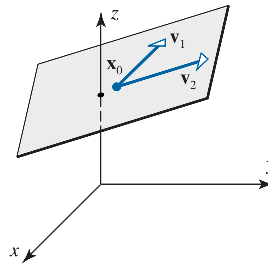


Figura 3.4.1

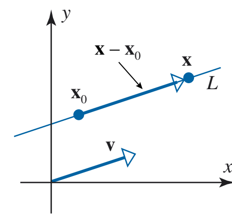


Figura 3.4.2

Comecemos com a dedução de uma equação para a reta L que contém o ponto $\mathbf{x}_0$ e é paralela a $\mathbf{v}$. Se $\mathbf{x}$ for um ponto qualquer dessa reta, então, conforme ilustrado na Figura 3.4.2, o vetor $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ será algum múltiplo escalar de $\mathbf{v}$, digamos,

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = t\mathbf{v} \quad \text{ou, equivalentemente, } \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$$

À medida que a variável t (denominada ***parâmetro***) varia de $-\infty$ a ∞, o ponto $\mathbf{x}$ percorre toda a reta L. Dessa forma, obtemos o resultado seguinte.

TEOREMA 3.4.1 *Seja L a reta em R^2 ou R^3 que contém o ponto $\mathbf{x}_0$ e é paralela ao vetor não nulo* $\mathbf{v}$. *Então, uma equação de L é dada por*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \tag{1}$$

Se $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, então a reta L passa pela origem, e a equação tem a forma

$$\mathbf{x} = t\mathbf{v} \tag{2}$$

Embora não esteja enunciado explicitamente, fica subentendido que, nas Fórmulas (1) e (2), o parâmetro t varia de $-\infty$ a ∞. Isso vale para todas as equações vetoriais e paramétricas deste texto, salvo menção contrária.

Equações paramétricas e vetoriais de planos em R^3

Passamos, agora, a deduzir uma equação do plano W que contém o ponto $\mathbf{x}_0$ e é paralelo aos vetores não paralelos $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Conforme indicado na Figura 3.4.3, se $\mathbf{x}$ for um ponto qualquer desse plano, então, formando múltiplos escalares convenientes de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, digamos, $t_1\mathbf{v}_1$ e $t_2\mathbf{v}_2$, podemos criar um paralelogramo de diagonal $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ e lados adjacentes $t_1\mathbf{v}_1$ e $t_2\mathbf{v}_2$. Assim, temos

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad x = x_0 + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2$$

À medida que as variáveis t_1 e t_2 (denominadas ***parâmetros***) variam de $-\infty$ a ∞, o ponto $\mathbf{x}$ percorre todo o plano W. Em suma, obtemos o resultado seguinte.

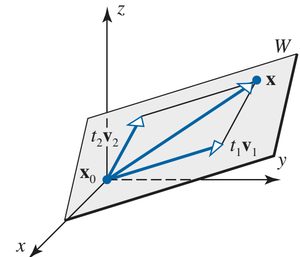


Figura 3.4.3

TEOREMA 3.4.2 *Seja W o plano em R^3 que contém o ponto $\mathbf{x}_0$ e é paralelo aos vetores não nulos $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Então, uma equação de W é dada por*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \tag{3}$$

Se $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, então o plano W passa pela origem e a equação tem a forma

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \tag{4}$$

Observação Observe que a reta por $\mathbf{x}_0$ representada pela Equação (1) é a translação por $\mathbf{x}_0$ da reta pela origem representada pela Equação (2), e que o plano por $\mathbf{x}_0$ representado pela Equação (3) é a translação por $\mathbf{x}_0$ do plano pela origem representada pela Equação (4) (Figura 3.4.4).

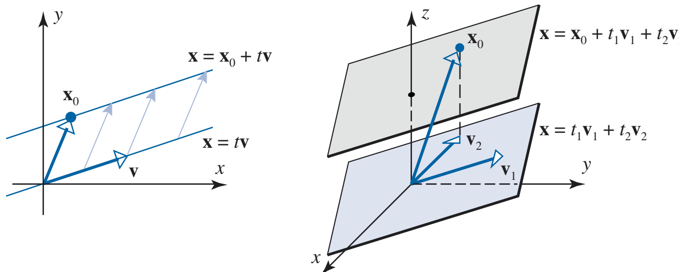


Figura 3.4.4

Motivados pelas Fórmulas (1) a (4), podemos estender as noções de reta e plano ao R^n por meio das definições seguintes.

DEFINIÇÃO 1 Se $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{v}$ forem vetores em R^n e se $\mathbf{v}$ for não nulo, então a equação

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \tag{5}$$

define a ***reta por $\mathbf{x}_0$ que é paralela a $\mathbf{v}$***. No caso especial em que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, dizemos que a reta ***passa pela origem***.

DEFINIÇÃO 2 Se $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ forem vetores em R^n e se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ forem não colineares, então a equação

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \tag{6}$$

define o ***plano por*** $\mathbf{x}_0$ ***que é paralelo a*** $\mathbf{v}_1$ ***e*** $\mathbf{v}_2$. No caso especial em que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, dizemos que o plano ***passa pela origem***.

As Equações (5) e (6) são denominadas ***formas vetoriais*** de uma reta e de um plano em R^n. Se os vetores nessas equações forem dados em termos de seus componentes, e os componentes correspondentes de cada lado forem igualados, obtemos as ***equações paramétricas*** da reta e do plano. Vejamos alguns exemplos.

▶ EXEMPLO 1 Equações vetoriais e paramétricas de retas em R^2 e R^3

(a) Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas da reta em R^2 que passa pela origem e é paralela ao vetor $\mathbf{v} = (-2, 3)$.

(b) Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas da reta em R^3 que passa pela origem e é paralela ao vetor $\mathbf{v} = (4, -5, 1)$.

(c) Use a equação vetorial obtida na parte (b) para encontrar dois ponto na reta que sejam distintos de P_0.

Solução (a) Segue de (5) com $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ que uma equação vetorial da reta é $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$. Tomando $\mathbf{x} = (x, y)$, essa equação pode ser expressa em forma vetorial como

$$(x, y) = t(-2, 3)$$

Igualando componentes correspondentes dos dois lados dessa equação, obtemos as equações paramétricas

$$x = -2t, \quad y = 3t$$

Solução (b) Segue de (5) que uma equação vetorial da reta é $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$. Tomando $\mathbf{x} = (x, y, z)$ e $\mathbf{x}_0 = (1, 2, -3)$, essa equação pode ser expressa em forma vetorial como

$$(x, y, z) = (1, 2, -3) + t(4, -5, 1) \tag{7}$$

Igualando componentes correspondentes dos dois lados dessa equação, obtemos as equações paramétricas

$$x = 1 + 4t, \quad y = 2 - 5t, \quad z = -3 + t$$

Solução (c) Um ponto da reta representada pela Equação (7) pode ser obtido pela substituição do parâmetro t por um valor numérico específico. Contudo, como $t = 0$ fornece $(x, y, z) = (1, 2, -3)$, que é o ponto P_0, esse valor de t não serve para nosso propósito. Tomando $t = 1$ produzimos o ponto $(5, -3, -2)$, e tomando $t = -1$ produzimos o ponto $(-3, 7, -4)$. Também poderíamos ter tomado qualquer outro valor distinto de t (exceto $t = 0$). ◀

▶ EXEMPLO 2 Equações vetoriais e paramétricas de um plano em R^3

Encontre equações vetoriais e paramétricas do plano $x - y + 2z = 5$.

Solução Primeiro encontramos as equações paramétricas. Isso pode ser feito resolvendo a equação para qualquer uma das variáveis em teremos das outras duas e então usando essas duas variáveis como parâmetros. Por exemplo, resolvendo para x em termos de y e z, obtemos

$$x = 5 + y - 2z \tag{8}$$

e então, usando y e z como parâmetros t_1 e t_2, respectivamente, obtemos as equações paramétricas

$$x = 5 + t_1 - 2t_2, \quad y = t_1, \quad z = t_2$$

Para obter uma equação vetorial do plano, reescrevemos essas equações paramétricas como

$$(x, y, z) = (5 + t_1 - 2t_2, t_1, t_2)$$

ou, equivalentemente,

$$(x, y, z) = (5, 0, 0) + t_1(1, 1, 0) + t_2(-2, 0, 1)$$

Poderíamos ter obtido equações paramétricas e vetoriais distintas no Exemplo 2 se tivéssemos resolvido (8) para y ou z em vez de x. Contudo, pode ser mostrado que, nos três casos, resulta o mesmo plano quando o parâmetro varia de $-\infty$ a ∞.

▶ EXEMPLO 3 Equações vetoriais e paramétricas de retas e planos em R^4

(a) Encontre equações vetoriais e paramétricas da reta pela origem em R^4 que é paralela ao vetor $\mathbf{v} = (5, -3, 6, 1)$.

(b) Encontre equações vetoriais e paramétricas do plano em R^4 que passa pelo ponto $\mathbf{x}_0 = (2, -1, 0, 3)$ e é paralelo a ambos vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 5, 2, -4)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, 7, -8, 6)$.

Solução (a) Tomando $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, a equação vetorial $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$ pode ser expressa como

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(5, -3, 6, 1)$$

Igualando componentes correspondentes, obtemos as equações paramétricas

$$x_1 = 5t, \quad x_2 = -3t, \quad x_3 = 6t, \quad x_4 = t$$

Solução (b) A equação vetorial $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2$ pode ser expressa como

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, -1, 0, 3) + t_1(1, 5, 2, -4) + t_2(0, 7, -8, 6)$$

que fornece as equações paramétricas

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + t_1 \\ x_2 &= -1 + 5t_1 + 7t_2 \\ x_3 &= 2t_1 - 8t_2 \\ x_4 &= 3 - 4t_1 + 6t_2 \end{aligned}$$ ◀

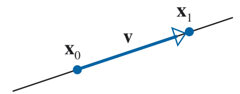
Retas por dois pontos em R^n

Se $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_1$ forem dois pontos distintos em R^n, então a reta determinada por esses pontos é paralela ao vetor $\mathbf{v} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ (Figura 3.4.5), de modo que segue de (5) que a reta pode ser expressa em forma vetorial por

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \qquad (9)$$

ou, equivalentemente, por

$$\mathbf{x} = (1 - t)\,\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}_1 \qquad (10)$$



▲ Figura 3.4.5

Essas equações são denominadas ***equações vetoriais com dois pontos*** de uma reta em R^n.

▶ EXEMPLO 4 Uma reta por dois pontos em R^2

Encontre equações vetoriais e paramétricas da reta em R^2 que passa pelos pontos $P(0, 7)$ e $Q(5, 0)$.

Solução Veremos adiante que não interessa qual ponto é tomado como sendo $\mathbf{x}_0$ e qual como sendo $\mathbf{x}_1$, de modo que escolhemos $\mathbf{x}_0 = (0, 7)$ e $\mathbf{x}_1 = (5, 0)$. Segue que $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = (5, -7)$ e, portanto, que

$$(x, y) = (0, 7) + t(5, -7) \qquad (11)$$

que pode ser reescrita em forma paramétrica como

$$x = 5t, \quad y = 7 - 7t$$

Se tivéssemos invertido nossa escolha e tomado $\mathbf{x}_0 = (5, 0)$ e $\mathbf{x}_1 = (0, 7)$, então as equações vetoriais resultantes teriam sido

$$(x, y) = (5, 0) + t(-5, 7) \tag{12}$$

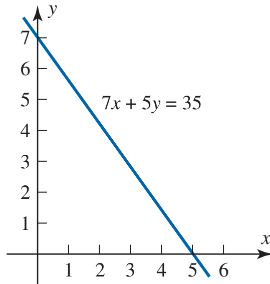


Figura 3.4.6

e as equações paramétricas

$$x = 5 - 5t, \quad y = 7t$$

(verifique). Embora (11) e (12) pareçam diferentes, ambas expressam a reta cujas equações em coordenadas retangulares é

$$7x + 5y = 35$$

(Figura 3.4.6). Isso pode ser constatado eliminando o parâmetro t das equações paramétricas (verifique). ◀

O ponto $\mathbf{x} = (x, y)$ nas Equações (9) e (10) traça toda uma reta em R^2 à medida que o parâmetro t varia no intervalo $(-\infty, \infty)$. Contudo, se restringirmos o parâmetro a variar de $t = 0$ até $t = 1$, então $\mathbf{x}$ não percorre a reta toda, mas só o *segmento de reta* que liga os pontos $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_1$. O ponto $\mathbf{x}$ começa em $\mathbf{x}_0$ com $t = 0$ e termina em $\mathbf{x}_1$ com $t = 1$. Em vista disso, apresentamos a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 3 Se $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_1$ forem vetores em R^n, então as equações

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \quad (0 \le t \le 1) \tag{13}$$

definem o ***segmento de reta de*** $\mathbf{x}_0$ ***até*** $\mathbf{x}_1$. Quando for conveniente, a Equação (13) pode ser reescrita como

$$\mathbf{x} = (1 - t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}_1 \quad (0 \le t \le 1) \tag{14}$$

▶ EXEMPLO 5 Um segmento de reta de um ponto até um outro ponto em R^2

Segue de (13) e (14) que o segmento de reta em R^2 de $\mathbf{x}_0 = (1, -3)$ até $\mathbf{x}_1 = (5, 6)$ pode ser representado tanto pela equação

$$\mathbf{x} = (1, -3) + t(4, 9) \quad (0 \le t \le 1)$$

quanto por

$$\mathbf{x} = (1 - t)(1, -3) + t(5, 6) \; (0 \le t \le 1)$$ ◀

Sistemas lineares usando produto escalar

Nosso próximo objetivo é mostrar como equações e sistemas lineares podem ser dados por produtos escalares. Isso nos levará a alguns resultados importantes sobre ortogonalidade e sistemas lineares.

Lembre que uma *equação linear* nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tem a forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ não todos nulos}) \tag{15}$$

e que a *equação homogênea* correspondente é

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ não todos nulos}) \tag{16}$$

Essas equações podem ser reescritas em forma vetorial considerando

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

caso em que a Fórmula (15) pode ser escrita como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b \tag{17}$$

e a Fórmula (16), como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0 \tag{18}$$

Exceto por uma mudança de notação de **n** para **a**, a Fórmula (18) é a extensão ao R^n da Fórmula (6) da Seção 3.3. Essa equação revela que *cada vetor solução* **x** *de uma equação homogênea é ortogonal ao vetor de coeficientes* **a**. Levando essa observação geométrica um passo adiante, considere o sistema homogêneo

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = 0 \end{array}$$

Denotando os vetores linha sucessivos da matriz de coeficientes por $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$, podemos reescrever esse sistema em forma de produto escalar como

$$\begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{array} \tag{19}$$

de onde podemos ver que cada vetor solução **x** é ortogonal a cada vetor linha da matriz de coeficientes. Resumindo, temos o resultado seguinte.

TEOREMA 3.4.3 *Se A for uma matriz $m \times n$, então o conjunto de soluções do sistema linear homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ consiste em todos vetores em R^n que são ortogonais a cada vetor linha de A.*

▶ EXEMPLO 6 Ortogonalidade de vetores linha e vetores solução

Mostramos, no Exemplo 6 da Seção 1.2, que a solução geral do sistema linear homogêneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = 0$$

que pode ser reescrita em forma vetorial como

$$\mathbf{x} = (-3r - 4s - 2t, r, -2s, s, t, 0)$$

De acordo com o Teorema 3.4.3, o vetor **x** deve ser ortogonal a cada um dos vetores linha

$$\begin{array}{l} \mathbf{r}_1 = (1, 3, -2, 0, 2, 0) \\ \mathbf{r}_2 = (2, 6, -5, -2, 4, -3) \\ \mathbf{r}_3 = (0, 0, 5, 10, 0, 15) \\ \mathbf{r}_4 = (2, 6, 0, 8, 4, 18) \end{array}$$

Verificamos que $\mathbf{x}$ é ortogonal a $\mathbf{r}_1$ e deixamos para o leitor verificar que $\mathbf{x}$ também é ortogonal aos outros três vetores linha. O produto escalar de $\mathbf{r}_1$ com $\mathbf{x}$ é

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{x} = 1(-3r - 4s - 2t) + 3(r) + (-2)(-2s) + 0(s) + 2(t) + 0(0) = 0$$

estabelecendo a ortogonalidade. ◀

A relação entre $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *e* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Concluímos esta seção explorando a relação entre as soluções de um sistema homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e as soluções (se houver) de um sistema linear não homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ com a mesma matriz de coeficientes. Esses dois sistemas são denominados ***correspondentes***.

Para motivar o resultado que procuramos, comparamos as soluções dos sistemas lineares correspondentes

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Mostramos, nos Exemplos 5 e 6 da Seção 1.2, que a solução geral desses sistemas lineares pode ser reescrita de forma paramétrica como

homogêneo ⟶ $x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = 0$

não homogêneo ⟶ $x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}$

que podemos reescrever em forma vetorial como

homogêneo ⟶ $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-3r - 4s - 2t, r, -2s, s, t, 0)$

não homogêneo ⟶ $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(-3r - 4s - 2t, r, -2s, s, t, \frac{1}{3}\right)$

Repartindo os vetores do lado direito e juntando os termos de mesmo parâmetro, podemos reescrever essas equações como

homogêneo ⟶ $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = r(-3, 1, 0, 0, 0) + s(-4, 0, -2, 1, 0, 0) + t(-2, 0, 0, 0, 1, 0)$ (20)

não homogêneo ⟶ $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = r(-3, 1, 0, 0, 0) + s(-4, 0, -2, 1, 0, 0)$
$+ t(-2, 0, 0, 0, 1, 0) + \left(0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{3}\right)$ (21)

As Fórmulas (20) e (21) revelam que cada solução do sistema não homogêneo pode ser obtida somando o vetor particular $\left(0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{3}\right)$ à solução correspondente do sistema homogêneo. Esse é um caso especial do resultado geral a seguir.

TEOREMA 3.4.4 *A solução geral de um sistema linear consistente* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *pode ser obtida somando uma solução específica qualquer de* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *à solução geral de* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Prova Sejam $\mathbf{x}_0$ uma solução específica qualquer de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, W o conjunto das soluções de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{x}_0 + W$ o conjunto de todos os vetores que resultam somando $\mathbf{x}_0$ a cada vetor em W. Precisamos mostrar que se $\mathbf{x}$ for um vetor em $\mathbf{x}_0 + W$, então $\mathbf{x}$ é solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e, reciprocamente, cada solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está no conjunto $\mathbf{x}_0 + W$.

Suponha, primeiro, que $\mathbf{x}$ seja um vetor em $\mathbf{x}_0 + W$. Isso implica que $\mathbf{x}$ pode ser escrito na forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{w}$, em que $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ e $A\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Assim,

$$A\mathbf{x} = A(\mathbf{x}_0 + \mathbf{w}) = A\mathbf{x}_0 + A\mathbf{w} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

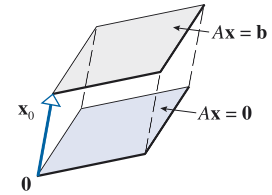
o que mostra que $\mathbf{x}$ é uma solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Reciprocamente, seja $\mathbf{x}$ uma solução qualquer de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Para mostrar que $\mathbf{x}$ está no conjunto $\mathbf{x}_0 + W$, devemos mostrar que $\mathbf{x}$ pode ser escrito da forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{w} \tag{22}$$

em que $\mathbf{w}$ está em W (ou seja, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$). Isso pode ser feito tomando $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Esse vetor obviamente satisfaz (22) e está em W, pois

$$A\mathbf{w} = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad ◀$$



▲ **Figura 3.4.7** O conjunto das soluções de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é a translação do espaço das soluções de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Observação O Teorema 3.4.4 tem uma interpretação geométrica útil ilustrada na Figura 3.4.7. Interpretando a adição vetorial como uma translação, como na Seção 3.1, o teorema afirma que se $\mathbf{x}_0$ for qualquer solução específica de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, então *todo* o conjunto das soluções de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser obtido transladando o conjunto das soluções de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pelo vetor $\mathbf{x}_0$.

Revisão de conceitos

- Parâmetros
- Equações paramétricas de retas
- Equações paramétricas de planos
- Equações vetoriais de dois pontos de uma reta
- Equações vetoriais de uma reta
- Equações vetoriais de um plano

Aptidões desenvolvidas

- Expressar as equações de retas em R^2 e R^3 usando equações vetoriais ou paramétricas.
- Expressar as equações de planos em R^n usando equações vetoriais ou paramétricas.
- Expressar a equação de uma reta contendo dois pontos em R^2 ou R^3 usando equações vetoriais ou paramétricas.
- Encontrar as equações de uma reta ou segmento de reta.
- Verificar a ortogonalidade dos vetores linha de um sistema de equações lineares e um vetor solução.
- Usar uma solução específica do sistema não homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e a solução geral do correspondente sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para obter a solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Conjunto de exercícios 3.4

▶ Nos Exercícios **1–4**, encontre equações vetoriais e paramétricas da reta contendo o ponto e paralela ao vetor. ◀

1. Ponto: $(-4, 1)$; vetor: $\mathbf{v} = (0,-8)$

2. Ponto: $(2, -1)$; vetor: $\mathbf{v} = (-4, -2)$

3. Ponto: $(0, 0, 0)$; vetor: $\mathbf{v} = (-3, 0, 1)$

4. Ponto: $(-9, 3, 4)$; vetor: $\mathbf{v} = (-1, 6, 0)$

▶ Nos Exercícios **5–8**, use a equação da reta dada para encontrar um ponto na reta e um vetor paralelo à reta. ◀

5. $\mathbf{x} = (3 - 5t, -6 - t)$

6. $(x, y, z) = (4t, 7, 4 + 3t)$

7. $\mathbf{x} = (1 - t)(4, 6) + t(-2, 0)$

8. $\mathbf{x} = (1 - t)(0, -5, 1)$

▶ Nos Exercícios **9–12**, encontre equações vetoriais e paramétricas do plano contendo o ponto e paralelo aos vetores. ◀

9. Ponto: $(-3, 1, 0)$; vetores: $\mathbf{v}_1 = (0, -3, 6)$ e $\mathbf{v}_2 = (-5, 1, 2)$

10. Ponto: $(0, 6, -2)$; vetores: $\mathbf{v}_1 = (0, 9, -1)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, -3, 0)$

11. Ponto: $(-1, 1, 4)$; vetores: $\mathbf{v}_1 = (6, -1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (-1, 3, 1)$

12. Ponto: $(0, 5, -4)$; vetores: $\mathbf{v}_1 = (0, 0, -5)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, -3, -2)$

▶ Nos Exercícios **13–14**, encontre equações vetoriais e paramétricas da reta em R^2 que passa pela origem e é ortogonal a $\mathbf{v}$. ◀

13. $\mathbf{v} = (-2, 3)$

14. $\mathbf{v} = (1, -4)$

▶ Nos Exercícios **15–16**, encontre equações vetoriais e paramétricas do plano em R^3 que passa pela origem e é ortogonal a $\mathbf{v}$. ◀

15. $\mathbf{v} = (4, 0, -5)$ [*Sugestão*: construa dois vetores não paralelos ortogonais a $\mathbf{v}$ em R^3.]

16. $\mathbf{v} = (3, 1, -6)$

▶ Nos Exercícios **17–20**, encontre a solução geral do sistema linear e confirme que os vetores linha da matriz de coeficientes são ortogonais aos vetores solução. ◀

17. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

20. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

21. (a) A equação $x + y + z = 1$ pode ser vista como um sistema linear de uma equação em três incógnitas. Expresse uma solução geral dessa equação como uma solução particular somada com uma solução geral do sistema homogêneo associado.

(b) Dê uma interpretação geométrica do resultado da parte (a).

22. (a) A equação $x + y = 1$ pode ser vista como um sistema linear de uma equação em duas incógnitas. Expresse uma solução geral dessa equação como uma solução particular somada com uma solução geral do sistema homogêneo associado.

(b) Dê uma interpretação geométrica do resultado da parte (a).

23. (a) Encontre um sistema linear homogêneo de duas equações em três incógnitas cujo espaço de soluções consista em todos os vetores em R^3 ortogonais a $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{b} = (-2, 3, 0)$.

(b) O espaço das soluções é que tipo de objeto geométrico?

(c) Encontre uma solução geral do sistema obtido na parte (a) e confirme a validade do Teorema 3.4.3.

24. (a) Encontre um sistema linear homogêneo de duas equações em três incógnitas cujo espaço de soluções consista em todos os vetores em R^3 ortogonais a $\mathbf{a} = (-3, 2, -1)$ e $\mathbf{b} = (0, -2, -2)$.

(b) O espaço das soluções é que tipo de objeto geométrico?

(c) Encontre uma solução geral do sistema obtido na parte (a) e confirme a validade do Teorema 3.4.3.

25. Considere os sistemas lineares

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre uma solução geral do sistema homogêneo.

(b) Confirme que $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$ é uma solução do sistema não homogêneo.

(c) Use os resultados das partes (a) e (b) para encontrar uma solução geral do sistema não homogêneo.

(d) Confira sua resposta na parte (c) resolvendo diretamente o sistema não homogêneo.

26. Considere os sistemas lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre uma solução geral do sistema homogêneo.

(b) Confirme que $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ é uma solução do sistema não homogêneo.

(c) Use os resultados das partes (a) e (b) para encontrar uma solução geral do sistema não homogêneo.

(d) Confira sua resposta na parte (c) resolvendo diretamente o sistema não homogêneo.

▶ Nos Exercícios 27–28, encontre uma solução geral do sistema e use essa solução para encontrar uma solução geral do sistema homogêneo associado e uma solução particular do sistema dado. ◀

27. $$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 2 & 5 \\ 9 & 12 & 3 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$$

28. $$\begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 & 6 \\ 6 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(f), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) A equação vetorial de uma reta pode ser determinada a partir de um ponto qualquer na reta e um vetor não nulo paralelo à reta.

(b) A equação vetorial de um plano pode ser determinada a partir de um ponto qualquer no plano e um vetor não nulo paralelo ao plano.

(c) Todos os pontos de uma reta pela origem em R^2 ou R^3 são múltiplos escalares de qualquer vetor não nulo na reta.

(d) Todos os vetores solução do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ são ortogonais aos vetores linha da matriz A se, e só se, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

(e) A solução geral do sistema linear não homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser obtida somando $\mathbf{b}$ à solução geral do sistema linear homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(f) Se $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ são duas soluções do sistema linear não homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, então $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ é uma solução do sistema linear homogêneo correspondente.

3.5 Produto vetorial

Nesta seção opcional, apresentamos as propriedades de vetores no espaço tridimensional que são importantes para físicos e engenheiros. Esta seção pode ser omitida, já que as demais não dependem deste conteúdo. Entre outras coisas, definimos uma operação que fornece uma maneira de construir um vetor no espaço tridimensional que seja perpendicular a dois dados vetores, e damos uma interpretação geométrica de determinantes 3 × 3.

Produto vetorial de vetores

Na Seção 3.2, definimos o produto escalar de dois vetores **u** e **v** no espaço de dimensão n. O resultado daquela operação é um *escalar*. Agora definiremos um tipo de multiplicação vetorial que produz um *vetor* como produto, mas que é aplicável somente a vetores do espaço tridimensional.

DEFINIÇÃO 1 Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ forem vetores no espaço tridimensional, então o ***produto vetorial*** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é o vetor definido por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2,\, u_3v_1 - u_1v_3,\, u_1v_2 - u_2v_1)$$

ou, em notação de determinante,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \tag{1}$$

Observação Em vez de memorizar (1), o leitor pode obter os componentes de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ como segue.

- Forme a matriz $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ de tamanho 2 × 3 cuja primeira linha contenha os componentes de **u** e cuja segunda linha contenha os componentes de **v**.
- Para obter o primeiro componente de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, omita a primeira coluna e tome o determinante; para obter o segundo componente, omita a segunda coluna e tome o negativo do determinante e, para obter o terceiro componente, omita a terceira coluna e tome o determinante.

▶ EXEMPLO 1 Calculando um produto vetorial

Encontre $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, sendo $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ e $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$.

Solução Usando (1) ou o mnemônico da observação precedente, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= (2, -7, -6) \end{aligned}$$ ◀

O teorema a seguir dá algumas relações importantes entre os produtos escalar e vetorial, e também mostra que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é ortogonal a ambos **u** e **v**.

Nota histórica A notação $A \times B$ do produto vetorial foi introduzida pelo físico e matemático norte-americano J. Willard Gibbs (ver página 134) numa série de notas de aula para seus alunos na Universidade de Yale. Essas notas apareceram publicadas pela primeira vez na segunda edição do livro *Vector Analysis*, de Edwin Wilson (1879-1964), um dos alunos de Gibbs. Originalmente, Gibbs se referia ao produto vetorial com "produto torcido."

TEOREMA 3.5.1 Relações entre os produtos escalar e vetorial

Se **u**, **v** *e* **w** *forem vetores do espaço tridimensional, então*

(*a*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ **(u × v é ortogonal a u)**

(*b*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ **(u × v é ortogonal a v)**

(*c*) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ **(Identidade de Lagrange)**

(*d*) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$ **(relação entre os produtos vetorial e escalar)**

(*e*) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$ **(relação entre os produtos vetorial e escalar)**

Prova (a) Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Então

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2 v_3 - v_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= u_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0\end{aligned}$$

Prova (b) Análoga a (*a*).

Prova (c) Como

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \tag{2}$$

e

$$\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \tag{3}$$

a prova pode ser concluída desenvolvendo os lados direitos de (2) e (3) e verificando sua igualdade.

Prova (d) e (e) Veja o Exercícios 38 e 39. ◀

▶ **EXEMPLO 2 u × u é perpendicular a u e a v**

Considere os vetores

$$\mathbf{u} = (1, 2, -2) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (3, 0, 1)$$

No Exemplo 1, mostramos que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2, -7, -6)$$

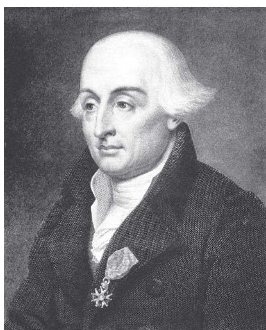
Como

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (1)(2) + (2)(-7) + (-2)(-6) = 0$$

e

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (3)(2) + (0)(-7) + (1)(-6) = 0$$

resulta que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é ortogonal a ambos **u** e **v**, conforme garante o Teorema 3.5.1. ◀



Joseph Louis Lagrange (1736–1813)

Nota histórica Joseph Louis Lagrange foi um matemático e astrônomo franco-italiano. Embora seu pai quisesse que ele se tornasse um advogado, Lagrange foi atraído para a Matemática e para a Astronomia depois de ler um trabalho do astrônomo Halley. Aos 16 anos, começou a estudar Matemática por conta própria e, aos 19, foi designado para um cargo de professor na Escola de Artilharia Real de Turim. No ano seguinte, ele resolveu alguns problemas famosos usando métodos novos que acabaram florescendo numa área da Matemática chamada *Cálculo das Variações*. Esses métodos e sua aplicação a problemas de Mecânica Celeste foram tão monumentais que, aos 25 anos, Lagrange era considerado por muitos de seus contemporâneos como o maior matemático vivo. Um dos trabalhos mais famosos de Lagrange é o tratado *Mécanique Analytique*, em que ele reduziu a teoria da Mecânica a umas poucas fórmulas gerais das quais todas as demais equações podiam ser deduzidas. Um grande admirador de Lagrange foi Napoleão, que o cobriu de honrarias. Apesar de sua fama, Lagrange foi um homem tímido e modesto. Quando morreu, foi enterrado com honras no Pantheon.

[Imagem: ©SSPL/The Image Works]

As principais propriedades aritméticas do produto vetorial estão enumeradas no próximo teorema.

TEOREMA 3.5.2 Propriedades do produto vetorial

Se **u**, **v** *e* **w** *forem quaisquer vetores do espaço tridimensional e a um escalar, então*

(*a*) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

(*b*) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$

(*c*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

(*d*) $a(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (a\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (a\mathbf{v})$

(*e*) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(*f*) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

As demonstrações seguem imediatamente da Fórmula (1) e das propriedades dos determinantes; por exemplo, a parte (*a*) pode ser demonstrada como segue.

Prova (a) A troca de **u** com **v** em (1) troca as linhas dos três determinantes no lado direito de (1) e, portanto, troca o sinal de cada componente do produto vetorial. Assim, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$. ◀

As provas das demais partes são deixadas como exercícios.

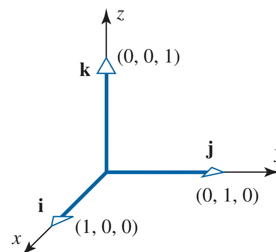
▶ EXEMPLO 3 Vetores unitários canônicos

Considere os vetores

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Cada um desses vetores tem comprimento 1 e está ao longo dos eixos coordenados (Figura 3.5.1). Conforme vimos na Seção 3.2, eles são denominados ***vetores unitários canônicos*** do espaço tridimensional. Cada vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ do espaço tridimensional pode ser expresso em termos de **i**, **j** e **k**, pois podemos escrever

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$



▲ **Figura 3.5.1** Os vetores unitários canônicos.

Por exemplo,

$$(2, -3, 4) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

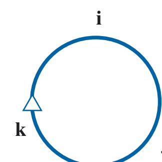
De (1), obtemos

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = \mathbf{k} \quad ◀$$

O leitor não deveria encontrar dificuldades para estabelecer os resultados seguintes.

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{array}$$

A Figura 3.5.2 é útil para lembrar desses resultados. Olhando para o diagrama, vemos que o produto vetorial de dois vetores consecutivos tomados no sentido horário é o vetor seguinte, e o produto vetorial de dois vetores consecutivos tomados no sentido anti-horário é o negativo do vetor seguinte.



▲ **Figura 3.5.2**

O produto vetorial em formato de determinante

Também vale a pena notar que um produto vetorial pode ser representado simbolicamente no formato

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} \quad (4)$$

Por exemplo, se $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ e $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$, então

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

o que confere com o resultado obtido no Exemplo 1.

ADVERTÊNCIA Não é verdade, em geral, que $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$. Por exemplo,

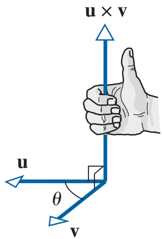
$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

e

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

de modo que

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) \neq (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j}$$



▲ **Figura 3.5.3**

Sabemos, do Teorema 3.5.1, que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é ortogonal a ambos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem vetores não nulos, pode ser mostrado que o sentido de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ pode ser determinado usando a "regra da mão direita" (Figura 3.5.3): seja θ o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e suponha que $\mathbf{u}$ seja girado pelo ângulo θ até coincidir com $\mathbf{v}$. Se os dedos da mão direita se fecharem apontando no sentido dessa rotação, então o polegar indica (aproximadamente) o sentido de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

É instrutivo treinar essa regra com os produtos

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

Interpretação geométrica do produto vetorial

Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem vetores no espaço tridimensional, então a norma de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tem uma interpretação geométrica útil. A identidade de Lagrange, dada no Teorema 3.5.1, afirma que

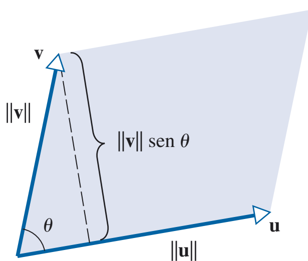
$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \quad (5)$$

Se θ denota o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, então $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta$, de modo que (5) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\cos^2\theta \\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\operatorname{sen}^2\theta \end{aligned}$$

Como $0 \leq \theta \leq \pi$, segue que $\operatorname{sen}\theta \geq 0$ e, portanto, isso pode ser reescrito como

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta \quad (6)$$



▲ **Figura 3.5.4**

Mas $\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta$ é a altura do paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ (Figura 3.5.4). Assim, por (6), a área A desse paralelogramo é dada por

$$A = (\text{base})(\text{altura}) = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

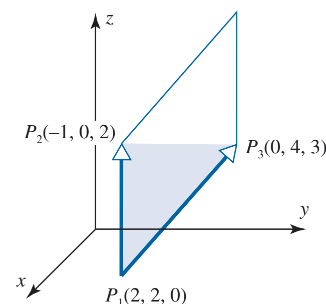
Esse resultado também é válido se **u** e **v** forem colineares, pois nesse caso o paralelogramo determinado por **u** e **v** terá área zero e, por (6), teremos $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, já que, nesse caso, $\theta = 0$. Assim, obtemos o teorema seguinte.

TEOREMA 3.5.3 Área de um paralelogramo

Se **u** *e* **v** *forem vetores do espaço tridimensional, então* $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ *é igual à área do paralelogramo determinado por* **u** *e* **v**.

▶ EXEMPLO 4 Área de um triângulo

Encontre a área do triângulo determinado pelos pontos $P_1(2, 2, 0)$, $P_2(-1, 0, 2)$ e $P_3(0, 4, 3)$.



▲ Figura 3.5.5

Solução A área A do triângulo é $\frac{1}{2}$ da área do paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ (Figura 3.5.5). Usando o método discutido no Exemplo 1da Seção 3.1, obtemos $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, -2, 2)$ e $\overrightarrow{P_1P_3} = (-2, 2, 3)$. Segue que

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-10, 5, -10)$$

(verifique) e, consequentemente, que

$$A = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \tfrac{1}{2}(15) = \tfrac{15}{2} \quad ◀$$

DEFINIÇÃO 2 Se **u**, **v** e **w** forem vetores do espaço tridimensional, dizemos que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

é o ***produto misto*** de **u**, **v** e **w**.

O produto misto de $\mathbf{u} \times (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ pode ser calculado a partir da fórmula

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{7}$$

Isso segue da Fórmula (4), pois

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \\
&= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_3 \\
&= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

▶ EXEMPLO 5 Calculando um produto misto

Calcule o produto misto $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ dos vetores

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

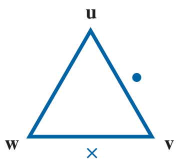
Solução Por (7),

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 60 + 4 - 15 = 49$$ ◀

Observação O símbolo $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ não faz sentido, porque não podemos formar o produto vetorial de um escalar com um vetor. Assim, não há ambiguidade em escrever $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ em vez de $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$. No entanto, por clareza, em geral, mantemos os parênteses.



▲ **Figura 3.5.6**

Segue de (7) que

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u})$$

pois os determinantes 3×3 que representam esses produtos podem ser obtidos um do outro por *duas* trocas de linhas. (Verifique.) Essas relações podem ser lembradas movendo os vetores **u**, **v** e **w** no sentido horário em torno dos vértices do triângulo da Figura 3.5.6.

Interpretação geométrica de determinantes

O próximo teorema fornece uma interpretação geométrica útil de determinantes 2×2 e 3×3.

TEOREMA 3.5.4

(*a*) *O valor absoluto do determinante*

$$\det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

é igual à área do paralelogramo no espaço bidimensional determinado pelos vetores $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *e* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. *(Ver Figura 3.5.7a.)*

(*b*) *O valor absoluto do determinante*

$$\det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

é igual ao volume do paralelepípedo no espaço tridimensional determinado pelos vetores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *e* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$. *(Ver Figura 3.5.7b.)*

Prova (a) A chave para essa prova é usar o Teorema 3.5.3. Contudo, esse teorema é aplicável a vetores no espaço tridimensional, enquanto $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ são vetores do espaço bidimensional. Para superar esse "problema de dimensão", veremos **u** e **v** como vetores do plano *xy* de um sistema de coordenadas *xyz* (Figura 3.5.7*c*), caso em que esses vetores são escritos como $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)$. Assim,

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} = \det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}\mathbf{k}$$

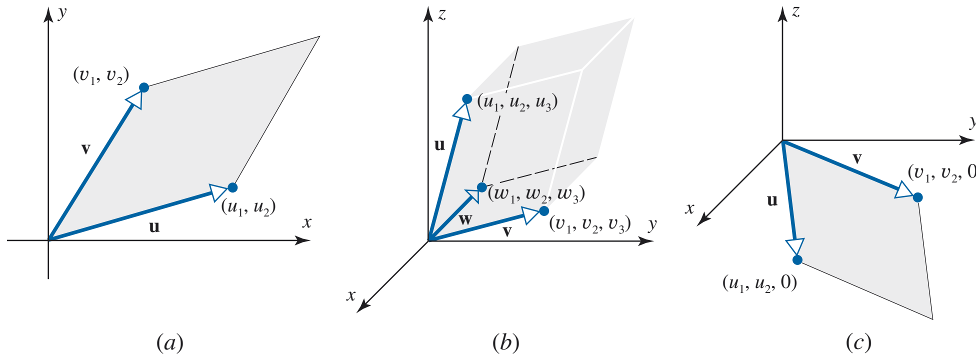


Figura 3.5.7

Decorre, agora, do Teorema 3.5.3 e do fato de que $\|\mathbf{k}\| = 1$, que a área A do paralelogramo determinado por **u** e **v** é

$$A = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \left\| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \mathbf{k} \right\| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right| \|\mathbf{k}\| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right|$$

completando a prova.

Prova (b) Conforme mostrado na Figura 3.5.8, tomamos o paralelogramo determinado por **v** e **w** como a base do paralelepípedo determinado por **u**, **v** e **w**. Segue do Teorema 3.5.3 que a área da base é $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$ e, conforme ilustrado na Figura 3.5.8, a altura h do paralelepípedo é o comprimento da projeção ortogonal de **u** sobre $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Logo, pela Fórmula (12) da Seção 3.3,

$$h = \|\text{proj}_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\mathbf{u}\| = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|}$$

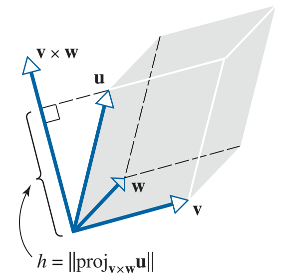


Figura 3.5.8

Segue que o volume V do paralelepípedo é

$$V = (\text{área da base}) \cdot \text{altura} = \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|} = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$$

e, portanto, por (7),

$$V = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right| \tag{8}$$

completando a prova. ◀

Observação Se V denotar o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores **u**, **v** e **w**, segue das Fórmulas (7) e (8) que

$$V = \begin{bmatrix} \text{volume do paralelepípedo} \\ \text{determinado por } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{w} \end{bmatrix} = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| \tag{9}$$

Desse resultado e da discussão que segue a Definição 3 da Seção 3.2, podemos concluir que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \pm V$$

em que os resultados + ou − dependem de **u** fazer um ângulo agudo ou obtuso com $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

A Fórmula (9) leva a um teste útil para verificar se três vetores dados ficam num mesmo plano ou não. Como três vetores não coplanares determinam um paralelepípedo

de volume positivo, decorre de (9) que $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = 0$ se, e só se, os vetores **u**, **v** e **w** estão num mesmo plano. Assim, temos o resultado seguinte.

TEOREMA 3.5.5 *Se os vetores* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *e* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ *tiverem o mesmo ponto inicial, então esses vetores são coplanares se, e só se,*

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Revisão de conceitos

- Produto vetorial de dois vetores
- Produto vetorial em forma de determinante
- Produto misto

Aptidões desenvolvidas

- Calcular o produto vetorial de dois vetores **u** e **v** em R^3.
- Conhecer as relações geométricas entre $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, **u** e **v**.
- Conhecer as propriedades do produto vetorial (listadas no Teorema 3.5.2).
- Calcular o produto misto de três vetores no espaço tridimensional.
- Conhecer a interpretação geométricas do produto misto.
- Calcular as áreas de triângulos e paralelogramos determinados por dois vetores ou três pontos nos espaços bi e tridimensional.
- Usar o produto misto para determinar se três vetores no espaço tridimensional são colineares ou não.

Conjunto de exercícios 3.5

▶ Nos Exercícios 1–2, sejam $\mathbf{u} = (3, 2, -1)$ e $\mathbf{v} = (0, 2, -3)$. Em cada parte, calcule o vetor indicado. ◀

1. (a) $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$

2. (a) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - 2\mathbf{w})$
(c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) - 2\mathbf{w}$

▶ Nos Exercícios 3–6, use o produto vetorial para encontrar um vetor que seja ortogonal a **u** e **v**. ◀

3. $\mathbf{u} = (-6, 4, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 1, 5)$

4. $\mathbf{u} = (1, 1, -2)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 2)$

5. $\mathbf{u} = (-2, 1, 5)$, $\mathbf{v} = (3, 0, -3)$

6. $\mathbf{u} = (3, 3, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 4, 2)$

▶ Nos Exercícios 7–10, encontre a área do paralelogramo determinado pelos vetores **u** e **v** dados. ◀

7. $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 3, 1)$

8. $\mathbf{u} = (3, -1, 4)$, $\mathbf{v} = (6, -2, 8)$

9. $\mathbf{u} = (2, 3, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, -2)$

10. $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 2, -5)$

▶ Nos Exercícios 11–12, encontre a área do paralelogramo com os vértices dados. ◀

11. $P_1(1, 2)$, $P_2(4, 4)$, $P_3(7, 5)$, $P_4(4, 3)$

12. $P_1(3, 2)$, $P_2(5, 4)$, $P_3(9, 4)$, $P_4(7, 2)$

▶ Nos Exercícios 13–14, encontre a área do triângulo com os vértices dados. ◀

13. $A\,(2, 0)$, $B\,(3, 4)$, $C\,(-1, 2)$

14. $A\,(1, 1)$, $B\,(2, 2)$, $C\,(3, -3)$

▶ Nos Exercícios 15–16, encontre a área do triângulo no espaço tridimensional com os vértices dados. ◀

15. $P_1(2, 6, -1)$, $P_2(1, 1, 1)$, $P_3(4, 6, 2)$

16. $P\,(1, -1, 2)$, $Q\,(0, 3, 4)$, $R\,(6, 1, 8)$

▶ Nos Exercícios 17–18, encontre o volume do paralelepípedo de arestas **u**, **v** e **w**. ◀

17. $\mathbf{u} = (2, -6, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 4, -2)$, $\mathbf{w} = (2, 2, -4)$

18. $\mathbf{u} = (3, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 5, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 2, 4)$

▶ Nos Exercícios 19–20, determine se **u**, **v** e **w** são coplanares desde que posicionados com seus pontos iniciais coincidindo. ◀

19. $\mathbf{u} = (-1, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 0, -2)$, $\mathbf{w} = (5, -4, 0)$

20. $\mathbf{u} = (5, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (4, -1, 1)$, $\mathbf{w} = (1, -1, 0)$

▶ Nos Exercícios 21–24, calcule o produto misto $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. ◀

21. $\mathbf{u} = (-2, 0, 6)$, $\mathbf{v} = (1, -3, 1)$, $\mathbf{w} = (-5, -1, 1)$

22. $\mathbf{u} = (-1, 2, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 4, -2)$, $\mathbf{w} = (-1, 2, 5)$

23. $\mathbf{u} = (a, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, b, 0)$, $\mathbf{w} = (0, 0, c)$

24. $\mathbf{u} = (3, -1, 6)$, $\mathbf{v} = (2, 4, 3)$, $\mathbf{w} = (5, -1, 2)$

▶ Nos Exercícios 25–26, em cada parte calcule a expressão, supondo que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 3$. ◀

25. (a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$ (b) $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}$ (c) $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

26. (a) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ (b) $(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$ (c) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{w})$

27. (a) Obtenha a área do triângulo de vértices $A(1, 0, 1)$, $B(0, 2, 3)$ e $C(2, 0, 1)$.

(b) Use o resultado da parte (a) para encontrar a altura do vértice C ao lado AB.

28. Use o produto vetorial para encontrar o seno do ângulo entre os vetores $\mathbf{u} = (2, 3, -6)$ e $\mathbf{v} = (2, 3, 6)$.

29. Simplifique $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

30. Sejam $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ e $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$. Mostre que

$$(\mathbf{a} + \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

31. Sejam **u**, **v** e **w** vetores não nulos com o mesmo ponto inicial no espaço tridimensional, mas tais que dois quaisquer não são colineares. Mostre que

(a) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ está no plano determinado por **v** e **w**.

(b) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ está no plano determinado por **u** e **v**.

32. Em cada parte, prove a identidade.

(a) $(\mathbf{u} + k\mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$

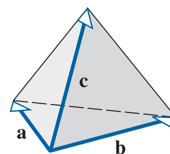
(b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{z}) = -(\mathbf{u} \times \mathbf{z}) \cdot \mathbf{v}$

33. Prove: Se **a**, **b**, **c** e **d** estão num mesmo plano, então $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{0}$.

34. Prove: Se θ for o ângulo entre **u** e **v** e se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$, então $\operatorname{tg} \theta = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| / (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.

35. Mostre que se **u**, **v** e **w** forem vetores em R^3 que não são dois a dois colineares, então $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ está no plano determinado por **v** e **w**.

36. É um teorema da Geometria Sólida que o volume de um tetraedro é dado por $\frac{1}{3}$ (área da base) · (altura). Use esse resultado para provar que o volume de um tetraedro cujos lados são os vetores **a**, **b** e **c** é $\frac{1}{6}|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$ (ver figura).



◀ **Figura Ex-36**

37. Em cada parte, use o resultado do Exercício 36 para encontrar o volume do tetraedro de vértices P, Q, R e S.

(a) $P(-1, 2, 0)$, $Q(2, 1, -3)$, $R(1, 1, 1)$, $S(3, -2, 3)$

(b) $P(0, 0, 0)$, $Q(1, 2, -1)$, $R(3, 4, 0)$, $S(-1, -3, 4)$

38. Prove a parte (*d*) do Teorema 3.5.1. [*Sugestão*: prove o resultado primeiro no caso $\mathbf{w} = \mathbf{i} = (1, 0, 0)$, depois no caso $\mathbf{w} = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$ e, por último, no caso $\mathbf{w} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Finalmente, prove no caso de um vetor arbitrário $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ escrevendo $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$.]

39. Prove a parte (*e*) do Teorema 3.5.1. [*Sugestão*: aplique a parte (*a*) do Teorema 3.5.2 ao resultado da parte (*d*) do Teorema 3.5.1.]

40. Prove

(a) a parte (*b*) do Teorema 3.5.2.

(b) a parte (*c*) do Teorema 3.5.2.

(c) a parte (*d*) do Teorema 3.5.2.

(d) a parte (*e*) do Teorema 3.5.2.

(e) a parte (*f*) do Teorema 3.5.2.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(f), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) O produto vetorial de dois vetores não nulos **u** e **v** é um vetor não nulo se, e só se, **u** e **v** não forem paralelos.

(b) Um vetor normal a um plano pode ser obtido tomando o produto vetorial de dois vetores não nulos e não colineares que estão no plano.

(c) O produto misto de **u**, **v** e **w** determina um vetor cujo comprimento é igual ao volume do paralelepípedo determinado por **u**, **v** e **w**.

(d) Se **u** e **v** forem vetores do espaço tridimensional, então $\|\mathbf{v} \times \mathbf{u}\|$ é igual à área do paralelogramo determinado por **u** e **v**.

(e) Dados vetores **u**, **v** e **w** quaisquer do espaço tridimensional, os vetores $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ e $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ são iguais.

(f) Se **u**, **v** e **w** forem vetores em R^3, com **u** não nulo e $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, então $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

Capítulo 3 Exercícios suplementares

1. Sejam $\mathbf{u} = (-2, 0, 4)$, $\mathbf{v} = (3, -1, 6)$ e $\mathbf{w} = (2, -5, -5)$. Calcule

(a) $3\mathbf{v} - 2\mathbf{u}$ (b) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\|$

(c) a distância ente $-3\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} + 5\mathbf{w}$.

(d) $\text{proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{u}$ (e) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

(f) $(-5\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w})$

2. Repita o Exercício 1 com os vetores $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = -\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

3. Repita as partes (a)–(d) do Exercício 1 com os vetores $\mathbf{u} = (-2, 6, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (-3, 0, 8, 0)$ e $\mathbf{w} = (9, 1, -6, -6)$.

4. Repita as partes (a)–(d) do Exercício 1 com os vetores $\mathbf{u} = (0, 5, 0, -1, -2)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 6, -2, 0)$ e $\mathbf{w} = (-4, -1, 4, 0, 2)$

▶ Nos Exercícios 5–6, determine se o conjunto de vetores dado é ortogonal. Se for, normalize cada vetor para formar um conjunto ortonormal. ◀

5. $(-32, -1, 19)$, $(3, -1, 5)$, $(1, 6, 2)$

6. $(-2, 0, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, -5, 2)$

7. (a) Que tipo de objeto geométrico é o conjunto de todos os vetores em R^2 ortogonais a um vetor não nulo?

(b) Que tipo de objeto geométrico é o conjunto de todos os vetores em R^3 ortogonais a um vetor não nulo?

(c) Que tipo de objeto geométrico é o conjunto de todos os vetores em R^2 ortogonais a dois vetores não colineares?

(d) Que tipo de objeto geométrico é o conjunto de todos os vetores em R^3 ortogonais a dois vetores não colineares?

8. Mostre que $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $\mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ são vetores ortonormais e encontre um terceiro vetor $\mathbf{v}_3$ com o qual o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é ortonormal.

9. *Verdadeiro ou falso*: se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem vetores não nulos tais que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$, então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais.

10. *Verdadeiro ou falso*: se $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, então $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

11. Considere os pontos $P(3, -1, 4)$, $Q(6, 0, 2)$ e $R(5, 1, 1)$. Encontre o ponto S em R^3 cujo primeiro componente seja -1 e tal que $\overrightarrow{PQ}$ seja paralelo a $\overrightarrow{RS}$.

12. Considere os pontos $P(-3, 1, 0, 6)$, $Q(0, 5, 1, -2)$ e $R(-4, 1, 4, 0)$. Encontre o ponto S em R^4 cujo terceiro componente seja 6 e tal que $\overrightarrow{PQ}$ seja paralelo a $\overrightarrow{RS}$.

13. Usando os pontos do Exercício 11, encontre o cosseno do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$.

14. Usando os pontos do Exercício 12, encontre o cosseno do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$.

15. Encontre a distância entre o ponto $P(-3, 1, 3)$ e o plano $5x + z = 3y - 4$.

16. Mostre que os planos $3x - y + 6z = 7$ e $-6x + 2y - 12z = 1$ são paralelos e encontre a distância entre eles.

▶ Nos Exercícios 17–22, encontre equações vetoriais e paramétricas da reta ou plano dados. ◀

17. O plano em R^3 que contém os pontos $P(-2, 1, 3)$, e $Q(-1, -1, 1)$ e $R(3, 0, -2)$.

18. A reta em R^3 que contém o ponto $P(-1, 6, 0)$ e é ortogonal ao plano $4x - z = 5$.

19. A reta em R^2 que é paralela ao vetor $\mathbf{v} = (8, -1)$ e contém o ponto $P(0, -3)$.

20. O plano em R^3 que contém o ponto $P(-2, 1, 0)$ e é paralelo ao plano $-8x + 6y - z = 4$.

21. A reta em R^2 de equação $y = 3x - 5$.

22. O plano em R^3 de equação $2x - 6y + 3z = 5$.

▶ Nos Exercícios 23–25, encontre uma equação ponto-normal do plano dado. ◀

23. O plano representado pela equação vetorial $(x, y, z) = (-1, 5, 6) + t_1(0, -1, 3) + t_2(2, -1, 0)$.

24. O plano que contém o ponto $P(-5, 1, 0)$ e é ortogonal à reta de equações paramétricas $x = 3 - 5t$, $y = 2t$ e $z = 7$.

25. O plano que passa pelos pontos $P(9, 0, 4)$, $Q(-1, 4, 3)$ e $R(0, 6, -2)$.

26. Suponha que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ sejam dois conjuntos de vetores tais que $\mathbf{v}_i$ e $\mathbf{w}_j$ são ortogonais, com quaisquer i e j. Prove que se a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 são escalares quaisquer, então os vetores $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{w} = b_1\mathbf{w}_1 + b_2\mathbf{w}_2$ são ortogonais.

27. Prove que se dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em R^2 forem ortogonais a um terceiro vetor não nulo $\mathbf{w}$ em R^2, então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são múltiplos escalares um do outro.

28. Prove que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ se, e só se, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores paralelos.

29. Se A e B não forem ambos nulos, então a equação $Ax + By = 0$ representa uma reta pela origem em R^2. O que representa essa equação em R^3, se pensarmos nela como sendo $Ax + By + 0z = 0$? Explique.

CAPÍTULO 4

Espaços Vetoriais Arbitrários

CONTEÚDO DO CAPÍTULO

INTRODUÇÃO

Começamos nosso estudo de vetores visualizando-os como segmentos de reta orientados (setas). Depois estendemos essa ideia introduzindo sistemas de coordenadas retangulares, o que nos permitiu ver vetores como pares e ternos ordenados de números reais. Ao desenvolver as propriedades desses vetores, observamos que, em várias fórmulas, havia padrões que nos permitiram estender a noção de vetor a ênuplas de números reais. Mesmo que as ênuplas nos tenham levado para fora do mundo da "experiência visual", elas nos deram uma ferramenta valiosa para entender e estudar sistemas de equações lineares. Neste capítulo, estendemos o conceito de vetor mais uma vez, usando as propriedades algébricas mais importantes dos vetores em R^n como axiomas. Esses axiomas, quando satisfeitos por um conjunto de objetos, nos permitirão pensar nesses objetos como vetores.

4.1 Espaços vetoriais reais

Nesta seção, estendemos o conceito de vetor usando as propriedades básicas de vetores em R^n como axiomas; se esses axiomas forem satisfeitos por algum conjunto de objetos, teremos a garantia de que esses objetos se comportam como vetores conhecidos.

Axiomas de espaço vetorial

A próxima definição consiste em dez axiomas, oito dos quais são propriedades de vetores em R^n que foram enunciados no Teorema 3.1.1. É importante lembrar que não se *demonstra* axiomas; os axiomas são hipóteses que servem como ponto de partida para provar teoremas.

Os escalares de um espaço vetorial podem ser números reais ou complexos. Os espaços vetoriais com escalares reais são ditos ***espaços vetoriais reais***, e aqueles com escalares complexos são ditos ***espaços vetoriais complexos***. Por enquanto, todos os nossos espaços vetoriais são exclusivamente reais. Os espaços vetoriais complexos serão considerados mais tarde.

DEFINIÇÃO 1 Seja V um conjunto não vazio qualquer de objetos no qual estejam definidas duas operações, a adição e a multiplicação por escalares. Por ***adição*** entendemos uma regra que associa a cada par de objetos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V um objeto $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, denominado ***soma*** de $\mathbf{u}$ com $\mathbf{v}$; por ***multiplicação por escalar*** entendemos uma regra que associa a cada escalar a e cada objeto $\mathbf{u}$ em V um objeto $a\mathbf{u}$, denominado ***múltiplo escalar*** de $\mathbf{u}$ por a. Se os axiomas seguintes forem satisfeitos por todos os objetos $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ em V e quaisquer escalares a e b, diremos que V é um ***espaço vetorial*** e que os objetos de V são ***vetores***.

1. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são objetos em V, então $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é um objeto em V.
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
4. Existe um objeto $\mathbf{0}$ em V, denominado ***vetor nulo*** de V, ou ***vetor zero***, tal que $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$, com qualquer $\mathbf{u}$ em V.
5. Dado qualquer $\mathbf{u}$ em V, existe algum objeto $-\mathbf{u}$, denominado ***negativo*** de $\mathbf{u}$, tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
6. Se a for qualquer escalar e $\mathbf{u}$ um objeto em V, então $a\mathbf{u}$ é um objeto em V.
7. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
8. $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$
9. $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Observe que a definição de um espaço vetorial não especifica nem a natureza dos vetores, nem das operações. Qualquer tipo de objeto pode ser um vetor, e as operações de adição e multiplicação por escalar podem não ter relação alguma com as operações usuais em R^n. A única exigência é que os dez axiomas de espaço vetorial sejam satisfeitos. Nos exemplos seguintes, utilizamos quatro passos básicos para mostrar que um conjunto com duas operações é um espaço vetorial.

Para mostrar que um conjunto com duas operações é um espaço vetorial

Passo 1. Identifique o conjunto V de objetos que serão os vetores.

Passo 2. Identifique as operações de adição e multiplicação por escalar.

Passo 3. Verifique a validade dos Axiomas 1 e 6; ou seja, que a soma de dois vetores em V produz um vetor em V, e que a multiplicação de um vetor em V por um escalar também produz um vetor em V. O Axioma 1 é denominado ***fechamento na adição*** e o Axioma 6, ***fechamento no produto escalar***.

Passo 4. Confirme que valem os Axiomas 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 e 10.



Hermann Günther Grassmann (1809–1877)

Nota histórica A noção de "espaço vetorial abstrato" evoluiu ao longo de muitos anos e teve contribuições de várias pessoas. A ideia cristalizou-se com o trabalho do matemático alemão H. G. Grassmann, que publicou um artigo científico, em 1862, no qual considerava sistemas abstratos de elementos não especificados com os quais definiu operações formais de adição e multiplicação por escalar. O trabalho de Grassmann levantou controvérsias e alguns, inclusive Augustin Cauchy (ver página 137), questionaram sua originalidade.

[Imagem: ©Sueddeutsche Zeitung Photo/The Image Works]

Nosso primeiro exemplo é o mais simples de todos os espaços vetoriais, por conter somente um objeto. Como o Axioma 4 exige que cada espaço vetorial contenha um vetor zero, o objeto deverá ser esse vetor.

▶ EXEMPLO 1 O espaço vetorial nulo

Seja V um conjunto que consiste num único objeto, que denotamos $\mathbf{0}$, e definamos

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad a\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

com escalares a quaisquer. É fácil verificar que todos os axiomas de espaço vetorial estão satisfeitos. Dizemos que esse é o ***espaço vetorial nulo***. ◀

Nosso segundo exemplo é um dos mais importantes espaços vetoriais, o conhecido espaço R^n. Não deveria causar surpresa que as operações de R^n satisfazem os axiomas de espaço vetorial, pois esses axiomas tiveram por base as propriedades operacionais conhecidas de R^n.

▶ EXEMPLO 2 R^n é um espaço vetorial

Seja $V = R^n$ e defina as operações de espaço vetorial em V como as operações conhecidas de adição e multiplicação por escalar de ênuplas, ou seja,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$
$$a\mathbf{u} = (au_1, au_2, \ldots, au_n)$$

O conjunto $V = R^n$ é fechado na adição e na multiplicação por escalar, porque as operações que acabamos de definir produzem ênuplas, e essas operações satisfazem os Axiomas 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 e 10 por virtude do Teorema 3.1.1. ◀

Nosso próximo exemplo é uma generalização de R^n em que permitimos que os vetores tenham uma infinidade de componentes.

▶ EXEMPLO 3 O espaço vetorial das sequências infinitas de números reais

Seja V o conjunto de objetos da forma

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$$

em que $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ é uma sequência infinita de números reais. Definimos duas sequências infinitas como sendo *iguais* se seus componentes correspondentes forem iguais, e definimos a adição e a multiplicação por escalar por

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) + (v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n, \ldots) \\ a\mathbf{u} &= (au_1, au_2, \ldots, au_n, \ldots) \end{aligned}$$

Deixamos como um exercício confirmar que, com essas operações, V é um espaço vetorial. Denotamos esse espaço vetorial pelo símbolo R^∞. ◀

No próximo exemplo, nossos vetores são matrizes. Inicialmente, isso pode parecer um pouco confuso, porque matrizes são compostas por linhas e colunas que, por sua vez, são vetores (vetores linha e coluna). Contudo, aqui não nos interessamos por linhas ou colunas individuais, mas sim pela relação entre as propriedades das operações matriciais e as matrizes como um todo.

Note que a Equação (1) envolve *três* tipos diferentes de operações: a operação de adição de vetores, a operação de adição de matrizes e a operação de adição de números reais.

▶ EXEMPLO 4 O espaço vetorial das matrizes 2 × 2

Seja V o conjunto de todas as matrizes 2×2 com entradas reais e tomemos as operações de espaço vetorial em V como sendo as operações usuais de adição matricial e a multiplicação matricial por escalar, ou seja,

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$a\mathbf{u}=a\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} au_{11} & au_{12} \\ au_{21} & au_{22} \end{bmatrix}$$

O conjunto V é fechado na adição e na multiplicação por escalar, porque as operações matriciais usadas nessa definição produzem matrizes 2×2 como resultado final. Assim, resta confirmar que valem os Axiomas 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 e 10. Algumas destas são propriedades conhecidas de matrizes. Por exemplo, o Axioma 2 segue do Teorema 1.4.1*a*, pois

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$

Analogamente, os Axiomas 3, 7, 8 e 9 seguem das partes (*b*), (*h*) (*j*) e (*e*), respectivamente, daquele teorema (verifique). Para conferir, restam os Axiomas 4, 5 e 10.

Para confirmar que o Axioma 4 está satisfeito, devemos encontrar uma matriz $\mathbf{0}$ de tamanho 2×2 com a qual $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ com cada matriz 2×2 em V. Podemos fazer isso tomando

$$\mathbf{0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com essa definição,

$$\mathbf{0}+\mathbf{u}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\mathbf{u}$$

e, analogamente, $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$. Para verificar que o Axioma 5 vale, devemos mostrar que cada objeto $\mathbf{u}$ em V tem um negativo $-\mathbf{u}$ em V tal que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$ e $(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}$. Isso pode ser feito definindo o negativo de $\mathbf{u}$ como

$$-\mathbf{u}=\begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}$$

Com essa definição,

$$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

e, analogamente, $(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}$. Finalmente, o Axioma 10 é válido porque

$$1\mathbf{u}=1\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\mathbf{u}$$

▶ EXEMPLO 5 O espaço vetorial das matrizes *m* × *n*

O Exemplo 4 é um caso especial de uma classe mais geral de espaços vetoriais. O leitor não deveria encontrar dificuldades em adaptar as argumentações daquele exemplo para mostrar que o conjunto V de todas as matrizes $m \times n$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição matricial e multiplicação matricial por escalar. Denotamos esse espaço vetorial pelo símbolo M_{mn}. Assim, por exemplo, o espaço vetorial no Exemplo 4 é denotado por M_{22}.

▶ EXEMPLO 6 O espaço vetorial das funções reais

Seja V o conjunto das funções reais que estão definidas em cada x do intervalo $(-\infty, \infty)$. Se $\mathbf{f} = f(x)$ e $\mathbf{g} = g(x)$ forem duas funções em V e se a for um escalar qualquer, definimos as operações de adição e multiplicação por escalar por

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = f(x) + g(x) \tag{2}$$

$$(a\mathbf{f})(x) = af(x) \tag{3}$$

Uma maneira de pensar nessas operações é interpretar os números $f(x)$ e $g(x)$ como "componentes" de $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ no ponto x, caso em que as Equações (2) e (3) afirmam que duas funções são somadas somando os componentes correspondentes, e que uma função é multiplicada por um escalar multiplicando cada componente por esse escalar, exatamente como em R^n e R^∞. Essa ideia está ilustrada nas partes (*a*) e (*b*) da Figura 4.1.1. O conjunto V com essas operações é denotado pelo símbolo $F(-\infty, \infty)$. Podemos provar que isso é um espaço vetorial como segue.

Axiomas 1 e 6: Esses axiomas de fechamento exigem que, tomando duas funções quaisquer que estejam definidas em cada x do intervalo $(-\infty, \infty)$, a soma e qualquer múltiplo escalar dessas funções também estarão definidos em cada x do intervalo $(-\infty, \infty)$. Isso decorre das Fórmulas (2) e (3).

Axioma 4: Esse axioma exige que exista alguma função $\mathbf{0}$ em $F(-\infty, \infty)$ que, somada com qualquer outra função $\mathbf{f}$ em $F(-\infty, \infty)$, produza $\mathbf{f}$ de volta como resultado. A função cujo valor é zero em cada ponto x do intervalo $(-\infty, \infty)$ tem essa propriedade. Geometricamente, o gráfico da função $\mathbf{0}$ é a reta que coincide com o eixo x.

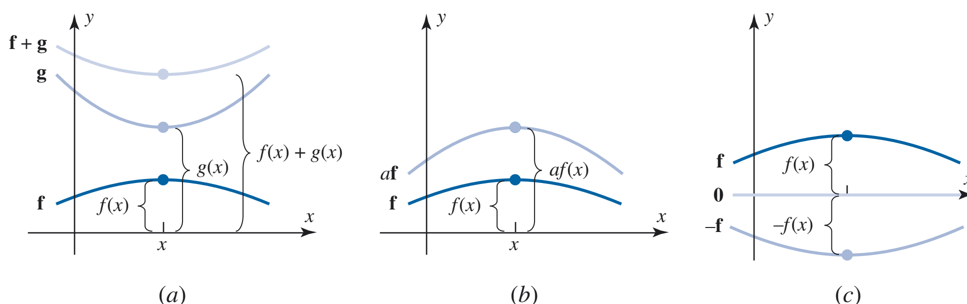
Axioma 5: Esse axioma exige que, dada qualquer função $\mathbf{f}$ em $F(-\infty, \infty)$, exista alguma função $-\mathbf{f}$ em $F(-\infty, \infty)$ que, somada à função $\mathbf{f}$, produza a função $\mathbf{0}$. A função definida por $-\mathbf{f}(x) = -f(x)$ tem essa propriedade. O gráfico de $-\mathbf{f}$ pode ser obtido refletindo o gráfico de $\mathbf{f}$ em torno do eixo x (Figura 4.1.1*c*).

Axiomas 2, 3, 7, 8, 9, 10: A validade de cada um desses axiomas segue de propriedades dos números reais. Por exemplo, se $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ forem funções em $F(-\infty, \infty)$, então o Axioma 2 exige que $\mathbf{f} + \mathbf{g} = \mathbf{g} + \mathbf{f}$. Isso segue de

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x) = \mathbf{g}(x) + \mathbf{f}(x) = (\mathbf{g} + \mathbf{f})(x)$$

em que a primeira e a última igualdades decorrem de (2), e a igualdade central é uma propriedade dos números reais. A prova das demais partes é deixada como exercício. ◀

No Exemplo 6, as funções estão definidas em todo o intervalo $(-\infty, \infty)$. Contudo, os argumentos usados naquele exemplo são aplicáveis igualmente em todos os subintervalos de $(-\infty, \infty)$, como algum intervalo fechado $[a, b]$ ou algum intervalo aberto (a, b). Denotaremos os espaços vetoriais das funções definidas nesses intervalos por $F[a, b]$ e $F(a, b)$, respectivamente.



▲ **Figura 4.1.1**

É importante reconhecer que não podemos impor quaisquer duas operações em qualquer conjunto V e esperar que os axiomas de espaço vetorial estejam satisfeitos. Por exemplo, se V for o conjunto das ênuplas de componentes positivos e se usarmos as operações padrão de R^n, então V não é fechado na multiplicação por escalar, porque se $\mathbf{u}$ for uma ênupla não nula em V, então $(-1)\mathbf{u}$ tem pelo menos um componente negativo e,

portanto, não está em V. Um exemplo menos óbvio é o seguinte, em que somente um dos axiomas de espaço vetorial deixa de valer.

▶ EXEMPLO 7 Um conjunto que não é um espaço vetorial

Seja $V = R^2$ e defina as operações de adição e multiplicação por escalar como segue: se $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, defina

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

e se a for um número real qualquer, defina

$$a\mathbf{u} = (au_1, 0)$$

Por exemplo, se $\mathbf{u} = (2, 4)$, $\mathbf{v} = (-3, 5)$ e $a = 7$, então

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2 + (-3), 4 + 5) = (-1, 9)$$
$$a\mathbf{u} = 7\mathbf{u} = (7 \cdot 2, 0) = (14, 0)$$

A adição é a operação de adição padrão em R^2, mas a operação de multiplicação por escalar não é. Nos exercícios, pedimos para o leitor mostrar que os nove primeiros axiomas de espaço vetorial estão satisfeitos. No entanto, existem certos vetores com os quais o Axioma 10 falha. Por exemplo, se $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ for tal que $u_2 \neq 0$, então

$$1\mathbf{u} = 1(u_1, u_2) = (1 \cdot u_1, 0) = (u_1, 0) \neq \mathbf{u}$$

Assim, V não é um espaço vetorial com as operações fornecidas. ◀

Nosso exemplo final é um espaço vetorial incomum, que incluímos para mostrar a variedade permitida pelo conceito de espaço vetorial. Como os objetos desse espaço são números reais, é importante prestar atenção se a operação pretendida é a do espaço vetorial ou a operação usual dos números reais.

▶ EXEMPLO 8 Um espaço vetorial incomum

Seja V o conjunto dos números reais positivos e defina as operações de V por

$u + v = uv$ **[A adição vetorial é a multiplicação numérica]**

$au = u^a$ **[A multiplicação por escalar é a exponenciação numérica]**

Assim, por exemplo, $1 + 1 = 1$ e $(2)(1) = 1^2 = 1$. Muito estranho, mas mesmo assim o conjunto V com essas operações satisfaz os 10 axiomas de espaço vetorial e é, portanto, um espaço vetorial. Confirmamos os Axiomas 4, 5 e 7, deixando os demais como exercício.

- Axioma 4 – O vetor zero nesse espaço é o número 1 (ou seja, $\mathbf{0} = 1$), pois

$$u + 1 = u \cdot 1 = u$$

- Axioma 5 – O negativo de um vetor u é seu recíproco (ou seja, $-u = 1/u$), pois

$$u + \frac{1}{u} = u\left(\frac{1}{u}\right) = 1\ (= \mathbf{0})$$

- Axioma 7 – Temos $a(u + v) = (uv)^a = u^a v^a = (au) + (av)$. ◀

Algumas propriedades de vetores

O seguinte é o nosso primeiro teorema sobre espaços vetoriais arbitrários. Como pode ser observado, a prova é muito formal, sendo cada passo justificado por algum axioma de

espaço vetorial ou alguma propriedade conhecida de números reais. Não haverá muitas provas estritamente formais como esta neste texto, mas a incluímos para reforçar a ideia de que todas as propriedades conhecidas de vetores podem ser deduzidas dos axiomas de espaço vetorial.

TEOREMA 4.1.1 *Sejam V um espaço vetorial,* **u** *um vetor em V e a um escalar. Então*

(*a*) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$

(*b*) $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$

(*c*) $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$

(*d*) *Se* $a\mathbf{u} = \mathbf{0}$, *então* $a = 0$ *ou* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Provamos as partes (*a*) e (*c*) e deixamos a prova das demais partes como exercícios.

Prova (a) Podemos escrever

$$\begin{aligned} 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u} &= (0+0)\mathbf{u} && \textbf{[Axioma 8]} \\ &= 0\mathbf{u} && \textbf{[Propriedade do número 0]} \end{aligned}$$

Pelo Axioma 5, o vetor $0\mathbf{u}$ tem um negativo, $-0\mathbf{u}$. Somando esse negativo a ambos os lados acima, resulta

$$[0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}] + (-0\mathbf{u}) = 0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u})$$

ou

$$\begin{aligned} 0\mathbf{u} + [0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u})] &= 0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u}) && \textbf{[Axioma 3]} \\ 0\mathbf{u} + \mathbf{0} &= \mathbf{0} && \textbf{[Axioma 5]} \\ 0\mathbf{u} &= \mathbf{0} && \textbf{[Axioma 4]} \end{aligned}$$

Prova (c) Para mostrar que $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$, devemos mostrar que $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Para ver isso, observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} &= 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} && \textbf{[Axioma 10]} \\ &= (1 + (-1))\mathbf{u} && \textbf{[Axioma 8]} \\ &= 0\mathbf{u} && \textbf{[Propriedade de números]} \\ &= \mathbf{0} && \textbf{[Parte (a) desse teorema]} \end{aligned}$$ ◀

Uma observação final

Esta seção do texto é muito importante para o plano geral da Álgebra Linear, por estabelecer um elo comum entre objetos matemáticos tão distintos como vetores geométricos, vetores em R^n, sequência infinitas, matrizes e funções reais, para mencionar alguns poucos. Como consequência, sempre que descobrirmos um novo teorema sobre espaços vetoriais arbitrários, ao mesmo tempo estaremos descobrindo um novo teorema sobre vetores geométricos, vetores em R^n, sequência infinitas, matrizes e funções reais, bem como qualquer outros novos tipos de vetores que possamos descobrir.

Para ilustrar essa ideia, considere o que o resultado aparentemente inocente dado na parte (*a*) do Teorema 4.1.1 diz sobre o espaço vetorial no Exemplo 8. Lembrando que os vetores daquele espaço são números reais positivos, que a multiplicação por escalar significa exponenciação numérica e que o vetor nulo é 1, a equação

$$0\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

é uma afirmação do fato de que se u for um número real positivo, então

$$u^0 = 1$$

Revisão de conceitos

- Espaço vetorial
- Fechamento na adição
- Fechamento na multiplicação por escalar
- Exemplos de espaços vetoriais

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se um dado conjunto com duas operações é um espaço vetorial.
- Mostrar que um conjunto com duas operações não é um espaço vetorial provando que pelo menos um dos axiomas falha.

Conjunto de exercícios 4.1

1. Seja V o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e considere as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ por

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2),\ a\mathbf{u} = (0, au_2)$$

(a) Calcule $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $a\mathbf{u}$, com $\mathbf{u} = (-1, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 4)$ e $a = 3$.

(b) Explique por que V é fechado na adição e multiplicação por escalar.

(c) Como a adição de V é a operação de adição padrão de R^2, certos axiomas de espaço vetorial valem para V por valerem em R^2. Quais são esses axiomas?

(d) Mostre que valem os Axiomas 7, 8 e 9.

(e) Mostre que o Axioma 10 falha e que, portanto, V não é um espaço vetorial com as operações dadas.

2. Seja V o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e considere as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ por

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1 + 1, u_2 + v_2 + 1), \quad a\mathbf{u} = (au_1, au_2)$$

(a) Calcule $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $a\mathbf{u}$, com $\mathbf{u} = (0, 4)$, $\mathbf{v} = (1, -3)$ e $a = 2$.

(b) Mostre que $(0, 0) \neq \mathbf{0}$.

(c) Mostre que $(-1,-1) = \mathbf{0}$.

(d) Mostre que vale o Axioma 5 fornecendo um par ordenado $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, com $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$.

(e) Encontre dois axiomas de espaço vetorial que não sejam válidos.

► Nos Exercícios **3–12**, determine se o conjunto equipado com as operações dadas é um espaço vetorial. Para os que não são espaços vetoriais, identifique os axiomas que falham. ◄

3. O conjunto de todos os números reais com as operações padrão de adição e multiplicação.

4. O conjunto de todos os pares de números reais da forma $(x, 0)$ com as operações padrão de R^2.

5. O conjunto de todos os pares de números reais da forma (x, y), em que $x \geq 0$, com as operações padrão de R^2.

6. O conjunto de todas as ênuplas de números reais da forma $(x, x, \ldots, x)$ com as operações padrão de R^n.

7. O conjunto de todos os ternos de números reais com a operação padrão de adição, mas com multiplicação por escalar definida por

$$a(x, y, z) = (a^2x, a^2y, a^2z)$$

8. O conjunto de todas as matrizes 2×2 invertíveis com as operações matriciais padrão de adição e multiplicação por escalar.

9. O conjunto de todas as matrizes 2×2 da forma

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

com as operações matriciais padrão de adição e multiplicação por escalar.

10. O conjunto de todas as funções reais f definidas em cada ponto da reta real e tais que $f(1) = 0$, com as operações do Exemplo 6.

11. O conjunto de todos os pares de números reais da forma $(1, x)$ com as operações

$$(1, y) + (1, y') = (1, y + y') \quad \text{e} \quad a(1, y) = (1, ay)$$

12. O conjunto de todos os polinômios da forma $a_0 + a_1x$ com as operações

$$(a_0 + a_1x) + (b_0 + b_1x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x$$

e

$$k(a_0 + a_1x) = (ka_0) + (ka_1)x$$

13. Verifique os Axiomas 3, 7, 8 e 9 com o espaço vetorial dado no Exemplo 4.

14. Verifique os Axiomas 1, 2, 3, 7, 8, 9 e 10 com o espaço vetorial dado no Exemplo 6.

15. Com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas no Exemplo 7, mostre que $V = R^2$ satisfaz os Axiomas de 1 até 9.

16. Verifique os Axiomas 1, 2, 3, 6, 8, 9 e 10 com o espaço vetorial dado no Exemplo 8.

17. Mostre que o conjunto de todos os pontos em R^2 que estão numa reta é um espaço vetorial em relação às operações padrão de adição e multiplicação por escalar se, e só se, a reta passa pela origem.

18. Mostre que o conjunto de todos os pontos em R^3 que estão num plano é um espaço vetorial em relação às operações padrão de adição e multiplicação por escalar se, e só se, o plano passa pela origem.

▶ Nos Exercícios **19–21**, prove que o conjunto com as operações dadas é um espaço vetorial. ◀

19. O conjunto $V = \{\mathbf{0}\}$ com as operações de adição e multiplicação por escalar dadas no Exemplo 1.

20. O conjunto de todas as sequências infinitas de números reais com as operações de adição e multiplicação por escalar dadas no Exemplo 3.

21. O conjunto M_{mn} de todas as matrizes $m \times n$ com as operações padrão de adição e multiplicação por escalar.

22. Prove a parte (*d*) do Teorema 4.1.1.

23. O argumento a seguir prova que se **u**, **v** e **w** forem vetores num espaço vetorial V tais que $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, então $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ (a ***lei de cancelamento*** para a adição vetorial). Conforme exemplificado, justifique ao passos dados preenchendo as lacunas.

$\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$	Hipótese
$(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + (-\mathbf{w}) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + (-\mathbf{w})$	Somar $-\mathbf{w}$ a ambos lados
$\mathbf{u} + [\mathbf{w} + (-\mathbf{w})] = \mathbf{v} + [\mathbf{w} + (-\mathbf{w})]$	________
$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{v} + \mathbf{0}$	________
$\mathbf{u} = \mathbf{v}$	________

24. Seja **v** um vetor qualquer num espaço vetorial. Prove que $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

25. O argumento a seguir prova em sete passos a parte (*b*) do Teorema 4.1.1. Justifique cada passo afirmando que é verdadeiro por hipótese ou especificando qual dos dez axiomas de espaço vetorial é aplicável.

Hipótese: sejam **u** um vetor qualquer num espaço vetorial, **0** o vetor nulo de V e a um escalar.

Conclusão: então $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Prova:

(1) $a\mathbf{0} + a\mathbf{u} = a(\mathbf{0} + \mathbf{u})$

(2) $= a\mathbf{u}$

(3) Como $a\mathbf{u}$ está em V, $-a\mathbf{u}$ está em V.

(4) Portanto, $(a\mathbf{0} + a\mathbf{u}) + (-a\mathbf{u}) = a\mathbf{u} + (-a\mathbf{u})$.

(5) $a\mathbf{0} + (a\mathbf{u} + (-a\mathbf{u})) = a\mathbf{u} + (-a\mathbf{u})$

(6) $a\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$

(7) $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$

26. Seja **v** um vetor qualquer num espaço vetorial. Prove que $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$.

27. Prove: se **u** for um vetor num espaço vetorial V e a um escalar tais que $a\mathbf{u} = \mathbf{0}$, então ou $a = 0$ ou $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. [*Sugestão*: mostre que se $a\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $a \neq 0$, então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. O resultado segue, então, como uma consequência lógica.]

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Um vetor é um segmento de reta orientado (seta).

(b) Um vetor é uma ênupla de números reais.

(c) Um vetor é um elemento qualquer num espaço vetorial.

(d) Existe um espaço vetorial consistindo em exatamente dois vetores distintos.

(e) O conjunto de polinômios de grau exatamente 1 é um espaço vetorial com as operações definidas no Exemplo 12.

4.2 Subespaços

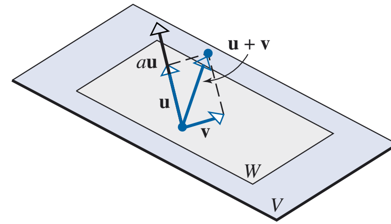
É possível para um espaço vetorial estar contido num outro espaço vetorial. Nesta seção, discutimos como reconhecer tais espaços vetoriais e apresentamos uma variedade de exemplos que serão utilizados mais adiante.

Começamos com alguma terminologia.

DEFINIÇÃO 1 Um subconjunto W de um espaço vetorial V é denominado ***subespaço*** de V se W for um espaço vetorial por si só com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V.

Em geral, devemos verificar os dez axiomas de espaço vetorial para mostrar que um conjunto W com duas operações forma um espaço vetorial. No entanto, se W for parte de um espaço vetorial V conhecido, então certos axiomas não precisam ser verificados, pois eles são "herdados" de V. Por exemplo, *não* é necessário conferir que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ vale em W, pois isso vale para todos os vetores de V, inclusive os de W. Por outro lado, *é* ne-

cessário verificar que W é fechado na adição e multiplicação por escalar, já que é possível que a soma de dois vetores em W ou a multiplicação de um vetor em W por algum escalar produza um vetor em V que esteja fora de W (Figura 4.2.1).



▶ **Figura 4.2.1** Os vetores **u** e **v** estão em W, mas os vetores $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $a\mathbf{u}$ não estão.

Os axiomas que não são herdados por W são

Axioma 1 – Fechamento na adição

Axioma 4 – Existência de vetor zero em W

Axioma 5 – Existência de negativo em W para cada vetor em W

Axioma 6 – Fechamento na multiplicação por escalar

de modo que esses devem ser verificados para provar que W é um subespaço de V. Contudo, segue do teorema seguinte que se os Axiomas 1 e 6 valerem em W, então os Axiomas 4 e 5 valem em W como uma consequência e, portanto, não precisam ser verificados.

TEOREMA 4.2.1 *Se W for um conjunto de um ou mais vetores num espaço vetorial V, então W é um subespaço de V se, e só se, as condições seguintes forem válidas.*

(*a*) *Se* **u** *e* **v** *forem vetores em W, então* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ *está em W.*

(*b*) *Se a for um escalar qualquer e* **u** *algum vetor de W, então a***u** *está em W.*

Prova Se W for um subespaço de V, então todos os axiomas de espaço vetorial são satisfeitos, inclusive os Axiomas 1 e 6, que são exatamente as condições (*a*) e (*b*).

Reciprocamente, suponha que valham as condições (*a*) e (*b*). Como estas são os Axiomas 1 e 6 e como os Axiomas 2, 3, 7, 8, 9 e 10 são herdados de V, basta mostrar que os Axiomas 4 e 5 valem em W. Para isso, seja **u** um vetor qualquer em W. Da condição (*b*) segue que, dado qualquer escalar a, o vetor $a\mathbf{u}$ está em W. Em particular, $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ estão em W, mostrando que os Axiomas 4 e 5 valem em W. ◀

Em palavras, o Teorema 4.2.1 afirma que W é um subespaço de V se, e só se, for fechado na adição e na multiplicação por escalar.

Observe que cada espaço vetorial tem pelo menos dois subespaços, ele mesmo e seu subespaço nulo.

▶ EXEMPLO 1 O subespaço zero

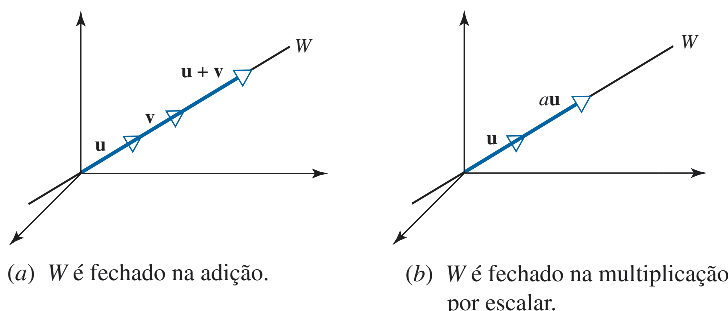
Se V for um espaço vetorial qualquer e se $W = \{\mathbf{0}\}$ for o subespaço de V que consiste somente no vetor nulo, então W é fechado na adição e na multiplicação por escalar, já que

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad a\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

com qualquer escalar a. Dizemos que W é o ***subespaço zero*** ou ***nulo*** de V.

▶ EXEMPLO 2 Retas pela origem são subespaços em R^2 e R^3

Se W for uma reta pela origem de R^2 ou R^3, então a soma de dois vetores na reta W ou a multiplicação de um vetor na reta W por algum escalar produz um outro vetor na reta W, de modo que W é fechado na adição e na multiplicação por escalar (ver Figura 4.2.2 para uma ilustração em R^3).



(*a*) W é fechado na adição.

(*b*) W é fechado na multiplicação por escalar.

Figura 4.2.2

▶ EXEMPLO 3 Planos pela origem são subespaços de R^3

Se **u** e **v** forem vetores num plano W pela origem de R^3, então é geometricamente evidente que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $a\mathbf{u}$ também estarão nesse mesmo plano W, com qualquer escalar a (Figura 4.2.3). Assim, W é fechado na adição e na multiplicação por escalar. ◀

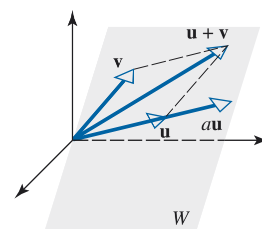


Figura 4.2.3 Ambos os vetores $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $a\mathbf{u}$ estão no mesmo plano de **u** e **v**.

A Tabela 1 seguinte dá uma lista de subespaços de R^2 e R^3 que encontramos até aqui. Adiante veremos que esses são os únicos subespaços de R^2 e R^3.

Tabela 1

Subespaços de R^2	Subespaços de R^3
• $\{\mathbf{0}\}$ • Retas pela origem • R^2	• $\{\mathbf{0}\}$ • Retas pela origem • Planos pela origem • R^3

▶ EXEMPLO 4 Um subconjunto de R^2 que não é um subespaço

Seja W o conjunto de todos os pontos (x, y) em R^2 tais que $x \geq 0$ e $y \geq 0$ (a região destacada na Figura 4.2.4). Esse conjunto não é um subespaço de R^2, pois não é fechado na multiplicação por escalar. Por exemplo, $\mathbf{v} = (1, 1)$ é um vetor em W, mas $(-1)\mathbf{v} = (-1, -1)$ não é.

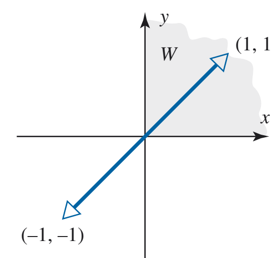


Figura 4.2.4 W não é fechado na multiplicação por escalar.

▶ EXEMPLO 5 Subespaços de M_{nn}

Pelo Teorema 1.7.2, sabemos que a soma de duas matrizes $n \times n$ simétricas é simétrica, e que um múltiplo escalar de uma matriz $n \times n$ simétrica é simétrica. Assim, o conjunto de todas as matrizes simétricas $n \times n$ é um subespaço de M_{nn}. Analogamente, o conjunto das matrizes triangulares superiores, triangulares inferiores e diagonais são subespaços de M_{nn}.

▶ EXEMPLO 6 Um subespaço de M_{nn} que não é um subespaço

O conjunto das matrizes $n \times n$ invertíveis não é um subespaço de M_{nn}, falhando duas vezes, por não ser fechado na adição nem na multiplicação por escalar. Ilustramos isso com um exemplo em M_{22} que pode ser adaptado facilmente a M_{nn}. Considere as matrizes

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

A matriz $0U$ é a matriz 2×2 nula e, portanto, não é invertível, e a matriz $U + V$ tem uma coluna de zeros, portanto, tampouco é invertível.

REQUER CÁLCULO

▶ EXEMPLO 7 O subespaço $C(-\infty, \infty)$

Existe um teorema no Cálculo que afirma que a soma de funções contínuas é contínua, e que uma constante vezes uma função contínua é contínua. Enunciado na linguagem de espaços vetoriais, o conjunto das funções contínuas em $(-\infty, \infty)$ é um subespaço de $F(-\infty, \infty)$. Denotamos esse subespaço por $C(-\infty, \infty)$.

REQUER CÁLCULO

▶ EXEMPLO 8 Funções com derivada contínua

Dizemos que uma função com derivada contínua é *continuamente derivável*. Existe um teorema no Cálculo que afirma que a soma de duas funções continuamente deriváveis é continuamente derivável, e que uma constante vezes uma função continuamente derivável é continuamente derivável. Assim, as funções que são continuamente deriváveis em $(-\infty, \infty)$ formam um subespaço de $F(-\infty, \infty)$. Denotamos esse espaço por $C^1(-\infty, \infty)$, sendo que o expoente 1 enfatiza que a *primeira* derivada é contínua. Levando isso um passo adiante, o conjunto das funções com derivadas até ordem m contínuas em $(-\infty, \infty)$ é um subespaço de $F(-\infty, \infty)$, bem como é um subespaço o conjunto das funções com derivadas de todas as ordens contínuas em $(-\infty, \infty)$. Denotamos esses espaços por $C^m(-\infty, \infty)$ e $C^\infty(-\infty, \infty)$, respectivamente.

▶ EXEMPLO 9 O subespaço de todos os polinômios

Lembre que um ***polinômio*** é uma função que pode ser expressa na forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \tag{1}$$

com $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constantes. É evidente que a soma de dois polinômios é um polinômio e que uma constante vezes um polinômio é um polinômio. Assim, o conjunto de todos os polinômios é fechado na adição e na multiplicação por escalar e é, portanto, um subespaço de $F(-\infty, \infty)$. Denotamos esse espaço por P_∞.

Neste texto, consideramos todas as constantes como sendo polinômios de grau zero. Observe, no entanto, que alguns autores não associam um grau à constante 0.

▶ EXEMPLO 10 O subespaço dos polinômios de grau $\leq n$

Lembre que o ***grau*** de um polinômio é a maior potência da variável que ocorre com coeficiente não nulo. Assim, por exemplo, se $a_n \neq 0$ na Fórmula (1), esse polinômio tem grau n. *Não* é verdade que o conjunto dos polinômios de grau positivo n seja um subespaço de $F(-\infty, \infty)$, porque esse conjunto não é fechado na adição. Por exemplo, ambos os polinômios

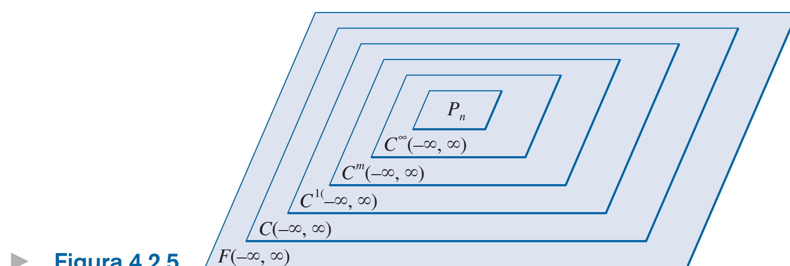
$$1 + 2x + 3x^2 \quad \text{e} \quad 5 + 7x - 3x^2$$

têm grau 2, mas sua soma tem grau 1. No entanto, o que *é* verdade é que, fixado qualquer inteiro não negativo n, os polinômios de grau *menor do que ou igual a n* formam um subespaço de $F(-\infty, \infty)$, que denotamos por P_n. ◀

A hierarquia de espaços de funções

Prova-se em Cálculo que os polinômios são funções contínuas que têm derivadas contínuas de todas as ordens em $(-\infty, \infty)$. Assim, segue que P_∞ é um subespaço, não só de $F(-\infty, \infty)$, como observamos no Exemplo 9, mas também um subespaço de $C^\infty(-\infty, \infty)$. Deixamos para o leitor verificar que os espaços vetoriais discutidos nos Exemplos 7 a 10 estão "aninhados" um no outro, conforme ilustrado na Figura 4.2.5.

Observação Nos nossos exemplos anteriores, e conforme ilustrado na Figura 4.2.5, consideramos somente funções definidas em todos os pontos do intervalo $(-\infty, \infty)$. Às vezes, queremos considerar funções que estão definidas somente em algum subintervalo de $(-\infty, \infty)$, digamos, o intervalo fechado $[a, b]$, ou o intervalo aberto (a, b). Nesses casos, adaptamos a notação correspondentemente. Por exemplo, $C[a, b]$ é o espaço das funções contínuas de $[a, b]$ e $C(a, b)$ é o espaço das funções contínuas de (a, b).



▶ **Figura 4.2.5**

Construindo subespaços

O teorema a seguir fornece uma maneira útil de criar novos subespaços a partir de subespaços conhecidos.

TEOREMA 4.2.2 *Se $W_1, W_2, \ldots, W_r$ forem subespaços de um espaço vetorial V, então a interseção desses subespaços também será um subespaço de V.*

Prova Seja W a interseção dos subespaços $W_1, W_2, \ldots, W_r$. Esse conjunto não é vazio porque, como cada um desses subespaços contém o vetor nulo de V, também sua interseção tem o vetor nulo. Assim, falta mostrar que W é fechado na adição e na multiplicação por escalar.

Para provar o fechamento na adição, sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores em W. Como W é a interseção de $W_1, W_2, \ldots, W_r$, segue que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ também estão em cada um desses subespaços. Como esses subespaços são fechados na adição, todos contêm o vetor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e, portanto, sua interseção W também contém esse vetor. Isso prova que W é fechado na adição. Deixamos para o leitor provar que W é fechado na multiplicação por escalar. ◀

Observe que o primeiro passo na demonstração do Teorema 4.22. foi estabelecer que W continha, pelo menos, um vetor. Isso é importante, pois, caso contrário, toda a argumentação subsequente poderia estar logicamente correta, mas desprovida de sentido.

Às vezes, queremos encontrar o "menor" subespaço de um espaço vetorial V que contenha todos os vetores de algum conjunto que nos interesse. Para conseguir isso, é conveniente apresentar a seguinte definição, que é uma generalização da Definição 4 da Seção 3.1.

DEFINIÇÃO 2 Dizemos que um vetor $\mathbf{w}$ num espaço vetorial V é uma ***combinação linear*** dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ em V se $\mathbf{w}$ puder ser expresso na forma

$$\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_r\mathbf{v}_r \tag{2}$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_r$ são escalares. Esses escalares são denominados ***coeficientes*** da combinação linear.

Se $r = 1$, então a Fórmula (2) tem a forma $\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1$, caso em que a combinação linear é só um múltiplo escalar de $\mathbf{v}_1$.

TEOREMA 4.2.3 *Seja $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r\}$ um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V.*

(*a*) *O conjunto W de todas as combinações lineares possíveis de vetores em S é um subespaço de V.*

(*b*) *O conjunto W da parte (a) é o "menor" subespaço de V que contém todos os vetores de S, no sentido de que qualquer outro subespaço de V que contenha todos aqueles vetores contém W.*

Prova (a) Seja W o conjunto de todas as combinações lineares possíveis de vetores em S. Devemos mostrar que W é fechado na adição e na multiplicação por escalar. Para provar o fechamento na adição, sejam

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_r\mathbf{w}_r \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2 + \cdots + k_r\mathbf{w}_r$$

dois vetores em W. Segue que sua soma pode ser escrita como

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + k_1)\mathbf{w}_1 + (c_2 + k_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (c_r + k_r)\mathbf{w}_r$$

que é uma combinação linear dos vetores em W. Assim, W é fechado na adição. Deixamos para o leitor provar que W também é fechado na multiplicação por escalar, sendo, portanto, um subespaço de V.

Prova (b) Seja W' um subespaço qualquer de V que contenha os vetores em S. Como W' é fechado na adição e na multiplicação por escalar, contém todas as combinações lineares de vetores em S e, portanto, contém W. ◄

A definição seguinte dá a notação e a terminologia relevantes relacionadas ao Teorema 4.2.3.

DEFINIÇÃO 3 Dizemos que o subespaço de um espaço vetorial V que é formado com todas as combinações lineares possíveis de vetores de um conjunto não vazio S é ***gerado*** por S, e dizemos que os vetores em S ***geram*** esse subespaço. Se $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r\}$, denotamos o gerado de S por

$$\text{ger}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r\} \quad \text{ou} \quad \text{ger}(S)$$

► EXEMPLO 11 Os vetores unitários canônicos geram R^n

Lembre que os vetores unitários canônicos em R^n são

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

Esses vetores geram R^n, pois cada vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ em R^n pode ser expresso como

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n$$

que é uma combinação linear de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Assim, por exemplo, os vetores

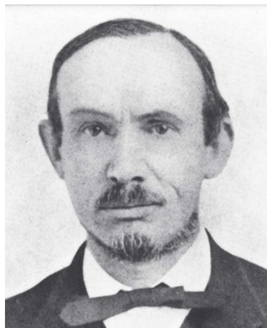
$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

geram R^3, pois cada vetor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ nesse espaço pode ser expresso como

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}.$$

► EXEMPLO 12 Uma visão geométrica de espaço gerado em R^2 e R^3

(a) Se $\mathbf{v}$ for um vetor não nulo em R^2 ou R^3 com ponto inicial na origem, então ger$\{\mathbf{v}\}$, que é o conjunto de todos os múltiplos escalares de $\mathbf{v}$, é a reta pela origem determina-



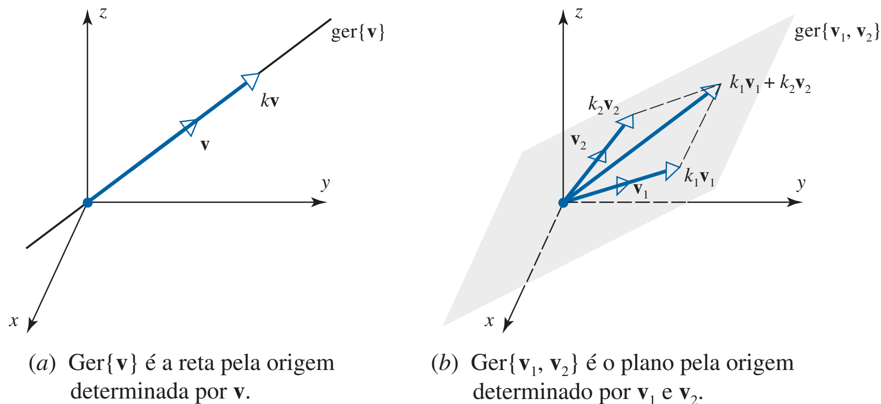
George William Hill (1838–1914)

Nota histórica Os termos *linearmente independente* e *linearmente dependente* foram introduzidos por Maxime Bôcher (ver página 7) em seu livro *Introduction to Higher Algebra*, publicado em 1907. O termo *combinação linear* é devido ao matemático norte-americano G. W. Hill, que o introduziu num artigo científico sobre movimento planetário, publicado em 1900. Hill foi um "eremita" que preferia trabalhar em sua casa, em West Nyack, no estado de Nova York, em vez do ambiente acadêmico, embora tenha tentado, por alguns anos, lecionar na Columbia University. É interessante saber que aparentemente ele devolveu seu salário de professor, indicando que não precisava do dinheiro e não queria ser incomodado cuidando dele. Embora tenha sido tecnicamente um matemático, Hill mostrava pouco interesse nos modernos desenvolvimentos dos matemáticos, e trabalhou quase que totalmente na teoria das órbitas planetárias.

[Imagem: Cortesia da American Mathematical Society]

da por **v**. Isso pode ser visualizado na Figura 4.2.6*a*, observando que o ponto final do vetor $k\mathbf{v}$ pode ser feito coincidir com qualquer ponto da reta escolhendo o valor de k de maneira apropriada.

(b) Se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ forem vetores não nulos em R^3 com pontos iniciais na origem, então ger$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, que consiste em todas as combinações lineares de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, é o plano pela origem determinado por esses dois vetores. Isso pode ser visualizado na Figura 4.2.6*b*, observando que o ponto final do vetor $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2$ pode ser feito coincidir com qualquer ponto do plano ajustando apropriadamente os escalares k_1 e k_2 para encompridar, encurtar ou reverter o sentido dos vetores $k_1\mathbf{v}_1$ e $k_2\mathbf{v}_2$.



▶ **Figura 4.2.6** (*a*) Ger$\{\mathbf{v}\}$ é a reta pela origem determinada por **v**. (*b*) Ger$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é o plano pela origem determinado por $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

▶ EXEMPLO 13 Um conjunto gerador para P_n

Os polinômios $1, x, x^2, \ldots, x^n$ geram o espaço vetorial P_n definido no Exemplo 10, pois cada polinômio $\mathbf{p}$ em P_n pode ser escrito como

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

que é uma combinação linear de $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Podemos denotar isso escrevendo

$$P_n = \text{ger}\{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \quad ◀$$

Os dois exemplos seguintes se referem a dois tipos de problema importantes.

- Dado um conjunto S de vetores em R^n e um vetor **v** em R^n, determine se **v** é uma combinação linear de vetores de S.
- Dado um conjunto S de vetores em R^n, determine se os vetores geram R^n.

▶ EXEMPLO 14 Combinações lineares

Considere os vetores $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ e $\mathbf{v} = (6, 4, 2)$. Mostre que $\mathbf{w} = (9, 2, 7)$ é uma combinação linear de **u** e **v** e que $\mathbf{w}' = (4, -1, 8)$ *não é* uma combinação linear de **u** e **v**.

Solução Para que **w** seja uma combinação linear de **u** e **v**, devem existir escalares k_1 e k_2 tais que $\mathbf{w} = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}$, ou seja,

$$(9, 2, 7) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

ou

$$(9, 2, 7) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

Igualando componentes correspondentes, obtemos

$$\begin{aligned} k_1 + 6k_2 &= 9 \\ 2k_1 + 4k_2 &= 2 \\ -k_1 + 2k_2 &= 7 \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema com eliminação gaussiana, obtemos $k_1 = -3$, $k_2 = 2$, de modo que

$$\mathbf{w} = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$$

Analogamente, para que $\mathbf{w}'$ seja uma combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, devem existir escalares k_1 e k_2 tais que $\mathbf{w}' = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}$, ou seja,

$$(4, -1, 8) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

ou

$$(4, -1, 8) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

Igualando componentes correspondentes, obtemos

$$\begin{aligned} k_1 + 6k_2 &= 4 \\ 2k_1 + 4k_2 &= -1 \\ -k_1 + 2k_2 &= 8 \end{aligned}$$

Esse sistema de equações é inconsistente (verifique), de modo que não existem tais escalares k_1 e k_2. Consequentemente, $\mathbf{w}'$ não é uma combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

► EXEMPLO 15 Testando o gerado

Determine se $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 3)$ geram o espaço vetorial R^3.

Solução Devemos determinar se um vetor arbitrário $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ em R^3 pode ser expresso como uma combinação linear

$$\mathbf{b} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$$

dos vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Escrevendo essa equação em termos dos componentes, temos

$$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1, 1, 2) + k_2(1, 0, 1) + k_3(2, 1, 3)$$

ou

$$(b_1, b_2, b_3) = (k_1 + k_2 + 2k_3, k_1 + k_3, 2k_1 + k_2 + 3k_3)$$

ou

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + 2k_3 &= b_1 \\ k_1 \phantom{{}+k_2} + k_3 &= b_2 \\ 2k_1 + k_2 + 3k_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Assim, nosso problema se reduz a determinar se esse sistema é consistente para quaisquer valores de b_1, b_2 e b_3. Uma maneira de verificar isso é usar as partes (*e*) e (*g*) do Teorema 2.3.8, que afirma que o sistema é consistente se, e só se, sua matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

tem um determinante não nulo. Mas isso *não* ocorre; deixamos para o leitor confirmar que $\det(A) = 0$, de modo que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ não geram R^3. ◄

Espaços de soluções de sistemas homogêneos

As soluções de um sistema linear homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de m equações em n incógnitas podem ser vistas como vetores em R^n. O teorema a seguir fornece uma visão útil da estrutura geométrica do conjunto de soluções.

TEOREMA 4.2.4 *As soluções de um sistema linear homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ em n incógnitas é um subespaço de R^n.*

Prova Seja W o conjunto de soluções do sistema. O conjunto W não é vazio porque contém pelo menos a solução trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Para mostrar que W é um subespaço de R^n, precisamos mostrar que é fechado na adição e na multiplicação por escalar. Para isso, sejam $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ dois vetores em W. Como esses vetores são soluções de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, temos

$$A\mathbf{x}_1 = 0 \quad \text{e} \quad A\mathbf{x}_2 = 0$$

Segue dessas equações e da propriedade distributiva da multiplicação matricial, que

$$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

de modo que W é fechado na adição. Analogamente, se k for um escalar qualquer, então

$$A(k\mathbf{x}_1) = kA\mathbf{x}_1 = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

de modo que W é fechado na multiplicação por escalar. ◀

Como o conjunto das soluções de um sistema homogêneo em n incógnitas realmente é um subespaço de R^n, é costume dizer que esse conjunto é o ***espaço solução*** do sistema.

▶ EXEMPLO 16 Espaços solução de sistemas homogêneos

Considere os sistemas lineares

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -8 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Solução

(a) Deixamos para o leitor verificar que as soluções são

$$x = 2s - 3t\,, \quad y = s, \quad z = t$$

do que segue que

$$x = 2y - 3z \quad \text{ou} \quad x - 2y + 3z = 0$$

Essa é a equação de um plano pela origem com vetor normal $\mathbf{n} = (1,-2, 3)$.

(b) Deixamos para o leitor verificar que as soluções são

$$x = -5t\,, \quad y = -t\,, \quad z = t$$

que são equações paramétricas da reta pela origem paralela ao vetor $\mathbf{v} = (-5, -1, 1)$.

(c) Deixamos para o leitor verificar que a única solução é $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, de modo que o espaço solução é $\{\mathbf{0}\}$.

(d) Esse sistema linear é satisfeito por quaisquer valores reais de x, y e z, de modo que o espaço solução é todo o R^3. ◀

Observação Enquanto o conjunto das soluções de cada sistema *homogêneo* de m equações em n incógnitas é um subespaço de R^n, *nunca* é verdade que o conjunto das soluções de um sistema *não homogêneo* de m equações em n incógnitas seja um subespaço de R^n. Há dois cenários possíveis: primeiro, o sistema pode não ter quaisquer soluções; e segundo, se houver soluções, então o conjunto de soluções não será fechado nem na adição, nem na multiplicação por escalar (Exercício 18).

Observação final

É importante reconhecer que os conjuntos geradores não são únicos. Por exemplo, qualquer vetor não nulo na reta da Figura 4.2.6*a* gera aquela reta, e quaisquer dois vetores não colineares no plano da Figura 4.2.6*b* geram aquele plano. O próximo teorema, cuja prova é deixada como exercício, enuncia condições sob as quais dois conjuntos de vetores geram o mesmo espaço.

TEOREMA 4.2.5 *Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ e $S' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ são conjuntos não vazios de vetores num espaço vetorial V, então*

$$\text{ger}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\} = \text{ger}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$$

se, e só se, cada vetor em S é uma combinação linear dos vetores em S′, e cada vetor em S′ é uma combinação linear dos vetores em S.

Revisão de conceitos

- Subespaço
- Subespaço nulo
- Exemplos de subespaços
- Combinação linear
- Gerado
- Espaço solução

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se um subconjunto de um espaço vetorial é um subespaço.
- Mostrar que um subconjunto de um espaço vetorial é um subespaço.
- Mostrar que um subconjunto não vazio de um espaço vetorial não é um subespaço demonstrando que o conjunto não é fechado na adição ou não é fechado na multiplicação por escalar.
- Dado um conjunto S de vetores em R^n e um vetor $\mathbf{v}$ em R^n, determinar se $\mathbf{v}$ é uma combinação linear dos vetores em S.
- Dado um conjunto S de vetores em R^n, determinar se os vetores em S geram R^n.
- Determinar se dois conjuntos não vazios de vetores num espaço vetorial V geram o mesmo subespaço de V.

Conjunto de exercícios 4.2

1. Use o Teorema 4.2.1 para determinar quais dos seguintes são subespaços de R^3.

(a) Todos os vetores da forma $(a, 0, 0)$.

(b) Todos os vetores da forma $(a, 1, 1)$.

(c) Todos os vetores da forma (a, b, c), com $b = a + c$.

(d) Todos os vetores da forma (a, b, c), com $b = a + c + 1$.

(e) Todos os vetores da forma $(a, b, 0)$.

2. Use o Teorema 4.2.1 para determinar quais dos seguintes são subespaços de M_{nn}.

(a) O conjunto de todas as matrizes $(a, 0, 0)$ diagonais.

(b) O conjunto de todas as matrizes A de tamanho $n \times n$ tais que $\det(A) = 0$.

(c) O conjunto de todas as matrizes A de tamanho $n \times n$ tais que $\text{tr}(A) = 0$.

(d) O conjunto de todas as matrizes $n \times n$ simétricas.

(e) O conjunto de todas as matrizes A de tamanho $n \times n$ tais que $A^T = -A$.

(f) O conjunto de todas as matrizes A de tamanho $n \times n$ com as quais $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ só tem a solução trivial.

(g) O conjunto de todas as matrizes A de tamanho $n \times n$ tais que $AB = BA$ com alguma matriz B fixada.

3. Use o Teorema 4.2.1 para determinar quais dos seguintes são subespaços de P_3.

(a) Todos os polinômios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ com $a_0 = 0$.

(b) Todos os polinômios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ com $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

(c) Todos os polinômios da forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ em que a_0, a_1, a_2 são inteiros.

(d) Todos os polinômios da forma $a_0 + a_1x$ em que a_0 e a_1 são números reais.

4. Quais dos seguintes são subespaços de $F(-\infty, \infty)$?

(a) Todas as funções f em $F(-\infty, \infty)$ tais que $f(0) = 0$.

(b) Todas as funções f em $F(-\infty, \infty)$ tais que $f(0) = 1$.

(c) Todas as funções f em $F(-\infty, \infty)$ tais que $f(-x) = f(x)$.

(d) Todos os polinômios de grau 2.

5. Quais dos seguintes são subespaços de R^∞?

(a) Todas as sequências $\mathbf{v}$ em R^∞ da forma $\mathbf{v} = (v, 0, v, 0, v, 0, \ldots)$.

(b) Todas as sequências $\mathbf{v}$ em R^∞ da forma $\mathbf{v} = (v, 1, v, 1, v, 1, \ldots)$.

(c) Todas as sequências $\mathbf{v}$ em R^∞ da forma $\mathbf{v} = (v, 2v, 4v, 8v, 16v, \ldots)$.

(d) Todas as sequências em R^∞ cujos componentes são nulos a partir de algum ponto.

6. Uma reta L pela origem em R^3 pode ser representada por equações paramétricas da forma $x = at$, $y = bt$ e $z = ct$. Use essas equações para mostrar que L é um subespaço de R^3, mostrando que se $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ forem pontos em L e k for um número real qualquer, então $k\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ também são pontos em L.

7. Quais dos seguintes são combinações lineares de $\mathbf{u} = (0, -2, 2)$ e $\mathbf{v} = (1, 3, -1)$?

(a) $(2, 2, 2)$ (b) $(3, 1, 5)$

(c) $(0, 4, 5)$ (d) $(0, 0, 0)$

8. Expresse os seguintes como combinações lineares de $\mathbf{u} = (2, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$ e $\mathbf{w} = (3, 2, 5)$.

(a) $(-9, -7, -15)$ (b) $(6, 11, 6)$

(c) $(0, 0, 0)$ (d) $(7, 8, 9)$

9. Quais dos seguintes são combinações lineares de

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}?$$

(a) $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

10. Em cada parte, expresse o vetor como uma combinação linear de $\mathbf{p}_1 = 2 + x + 4x^2$, $\mathbf{p}^2 = 1 - x + 3x^2$ e $\mathbf{p}_3 = 3 + 2x + 5x^2$.

(a) $-9 - 7x - 15x^2$ (b) $6 + 11x + 6x^2$

(c) 0 (d) $7 + 8x + 9x^2$

11. Em cada parte, determine se os vetores dados geram R^3.

(a) $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)$

(b) $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 1, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (8, -1, 8)$

(c) $\mathbf{v}_1 = (3, 1, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -3, 5)$, $\mathbf{v}_3 = (5, -2, 9)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 4, -1)$

(d) $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 6)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 4, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (4, 3, 1)$, $\mathbf{v}_4 = (3, 3, 1)$

12. Sejam $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (3, -1, 5, 2)$ e $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 2, 1)$. Em cada parte, decida se o vetor está em ger$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

(a) $(2, 3, -7, 3)$ (b) $(0, 0, 0, 0)$

(c) $(1, 1, 1, 1)$ (d) $(-4, 6, -13, 4)$

13. Determine se os polinômios dados geram P_2.

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x + 2x^2, \quad \mathbf{p}_2 = 3 + x,$$
$$\mathbf{p}_3 = 5 - x + 4x^2, \quad \mathbf{p}_4 = -2 - 2x + 2x^2$$

14. Sejam $\mathbf{f} = \cos^2 x$ e $\mathbf{g} = \operatorname{sen}^2 x$. Quais dos seguintes estão no espaço gerado por $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$?

(a) $\cos 2x$ (b) $3 + x^2$ (c) 1 (d) $\operatorname{sen} x$ (e) 0

15. Determine se o espaço solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é uma reta pela origem, um plano pela origem ou somente a origem. Se for um plano, obtenha uma equação desse plano; se for uma reta, obtenha equações paramétricas dessa reta.

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 6 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 11 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 3 & -9 & 3 \end{bmatrix}$

16. (***Requer Cálculo***) Mostre que os seguintes conjuntos de funções são subespaços de $F(-\infty, \infty)$.

(a) Todas as funções contínuas em $(-\infty, \infty)$.

(b) Todas as funções deriváveis em $(-\infty, \infty)$.

(c) Todas as funções deriváveis em $(-\infty, \infty)$ que satisfazem $\mathbf{f}' + 2\mathbf{f} = 0$.

17. (***Requer Cálculo***) Mostre que o conjunto das funções $\mathbf{f} = f(x)$ contínuas em $[a, b]$ tais que

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

é um subespaço de $C[a, b]$.

18. Mostre que os vetores solução de um sistema não homogêneo e consistente de m equações lineares em n incógnitas não formam um subespaço de R^n.

19. Prove o Teorema 4.2.5.

20. Use o Teorema 4.2.5 para mostrar que os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 6, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 4, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 2, 5)$, $\mathbf{w}_1 = (1, -2, -5)$ e $\mathbf{w}_2 = (0, 8, 9)$ geram o mesmo subespaço de R^3.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(k), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Cada subespaço de um espaço vetorial é, ele mesmo, um espaço vetorial.

(b) Cada espaço vetorial é um subespaço de si mesmo.

(c) Cada subconjunto de um espaço vetorial V que contenha o vetor zero de V é um subespaço de V.

(d) O conjunto R^2 é um subespaço de R^3.

(e) O conjunto das soluções de um sistema linear consistente $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de m equações em n incógnitas é um subespaço de R^n.

(f) O gerado de qualquer conjunto finito de vetores em um espaço vetorial é fechado na adição e na multiplicação por escalar.

(g) A interseção de dois subespaços quaisquer de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V.

(h) A união de dois subespaços quaisquer de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V.

(i) Dois subconjuntos de um espaço vetorial V que geram o mesmo subespaço de V devem ser iguais.

(j) O conjunto de matrizes $n \times n$ triangulares superiores é um subespaço do espaço vetorial de todas as matrizes $n \times n$.

(k) Os polinômios $x - 1$, $(x - 1)^2$ e $(x - 1)^3$ geram P^3.

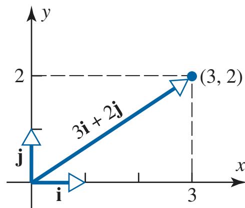
4.3 Independência linear

Nesta seção, consideramos o problema de decidir se os vetores de um dado conjunto estão inter-relacionados, no sentido de que um deles, ou mais, pode ser expresso como uma combinação linear dos outros. Isso é importante nas aplicações, porque a existência de tais relações muitas vezes indica que podem ocorrer certos tipos de complicações.

Vetores irrelevantes

Num sistema de coordenadas retangulares xy, cada vetor no plano pode ser expresso de exatamente uma maneira como combinação linear dos vetores unitários canônicos. Por exemplo, a única maneira de escrever o vetor $(3, 2)$ como uma combinação linear de $\mathbf{i} = (1, 0)$ e $\mathbf{j} = (0, 1)$ é

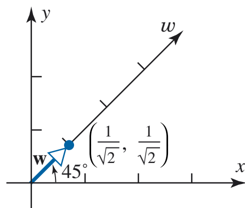
$$(3, 2) = 3(1, 0) + 2(0, 1) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \tag{1}$$



▲ **Figura 4.3.1**

(Figura 4.3.1). Entretanto, vejamos o que ocorre se introduzirmos um terceiro eixo coordenado que faz um ângulo de 45° com o eixo x. Denotemos esse eixo por w. Conforme ilustrado na Figura 4.3.2, o vetor unitário ao longo do eixo w é

$$\mathbf{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$



▲ **Figura 4.3.2**

Enquanto a Fórmula (1) mostra a única maneira de escrever o vetor $(3, 2)$ como uma combinação linear de $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, há uma infinidade de maneiras de escrever esse vetor como uma combinação linear de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{w}$. Três possibilidades são

$$(3, 2) = 3(1, 0) + 2(0, 1) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{w}$$

$$(3, 2) = 2(1, 0) + (0, 1) + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{w}$$

$$(3, 2) = 4(1, 0) + 3(0, 1) - \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{w}$$

Resumindo, ao introduzir um eixo supérfluo, criamos a complicação de ter múltiplas maneiras de associar coordenadas aos pontos do plano. O que torna o vetor $\mathbf{w}$ supérfluo é o fato de que ele pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, a saber,

$$\mathbf{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

Assim, uma das nossas tarefas nesta seção é desenvolver maneiras de descobrir se um vetor de um conjunto S é uma combinação linear dos demais vetores em S.

DEFINIÇÃO 1 Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ for um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V, então a equação vetorial

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

tem uma solução, pelo menos, a saber,

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \ldots, \quad k_r = 0$$

Dizemos que essa é a solução trivial. Se essa for a única solução, dizemos que S é um ***conjunto linearmente independente***. Se existem outras soluções além da trivial, dizemos que S é um ***conjunto linearmente dependente***.

Independência e dependência linear

Muitas vezes, utilizamos os termos linearmente independente e dependente com os próprios vetores em vez do conjunto.

▶ EXEMPLO 1 Independência linear dos vetores unitários canônicos em R^n

O conjunto linearmente independente mais básico de R^n é o conjunto dos vetores unitários canônicos

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

Para simplificar a notação, provemos a independência linear em R^3 de

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

A dependência ou independência linear desses vetores é determinada pela existência ou não de soluções não triviais da equação vetorial

$$k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k} = 0 \qquad (2)$$

Em termos de componentes, essa equação é

$$(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$$

de modo que $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Isso implica que (2) só tem a solução trivial e que, portanto, os vetores são linearmente independentes.

▶ EXEMPLO 2 Independência linear em R^3

Determine se os vetores

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

são linearmente independentes ou dependentes em R^3.

Solução A dependência ou independência linear desses vetores é determinada pela existência ou não de soluções não triviais da equação vetorial

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \qquad (3)$$

ou, equivalentemente, de

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

Igualando componentes correspondentes dos dois lados, obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

Assim, nosso problema reduz a determinar se esse sistema tem soluções não triviais. Há várias maneiras de fazer isso; uma possibilidade é simplesmente resolver o sistema, obtendo

$$k_1 = -\tfrac{1}{2}t, \quad k_2 = -\tfrac{1}{2}t, \quad k_2 = t$$

(omitimos os detalhes). Isso mostra que o sistema tem soluções não triviais e que, portanto, os vetores são linearmente dependentes. Um segundo método de obter o mesmo resultado é calcular o determinante da matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e usar as partes (*b*) e (*g*) do Teorema 2.3.8. Deixamos para o leitor verificar que $\det(A) = 0$, do que segue que (3) tem soluções não triviais, e os vetores são linearmente dependentes.

No Exemplo 2, qual é a relação que pode ser observada entre os componentes de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_2$ e as colunas da matriz de coeficientes A?

▶ EXEMPLO 3 Independência linear em R^4

Determine se os vetores

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 2, -1), \quad \mathbf{v}_2 = (4, 9, 9, -4), \quad \mathbf{v}_3 = (5, 8, 9, -5)$$

em R^4 são linearmente dependentes ou independentes.

Solução A dependência ou independência linear desses vetores é determinada pela existência ou não de soluções não triviais da equação vetorial

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

ou, equivalentemente, de

$$k_1(1, 2, 2, -1) + k_2(4, 9, 9, -4) + k_3(5, 8, 9, -5) = (0, 0, 0, 0)$$

Igualando os componentes correspondentes dos dois lados, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{aligned} k_1 + 4k_2 + 5k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 5k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 9k_3 &= 0 \\ -k_1 - 4k_2 - 5k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Deixamos para o leitor verificar que esse sistema só tem a solução trivial

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 0$$

do que podemos concluir que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, e $\mathbf{v}_3$ são linearmente independentes.

▶ EXEMPLO 4 Um conjunto linearmente independente importante em P_n

Mostre que os polinômios

$$1, \quad x, \quad x^2, \ldots, \quad x^n$$

formam um conjunto linearmente independente em P_n.

Solução Por conveniência, denotemos os polinômios por

$$\mathbf{p}_0 = 1, \quad \mathbf{p}_1 = x, \quad \mathbf{p}_2 = x^2, \ldots, \quad \mathbf{p}_n = x^n$$

Devemos mostrar que a equação vetorial

$$a_0\mathbf{p}_0 + a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + \cdots + a_n\mathbf{p}_n = 0 \tag{5}$$

tem somente a solução trivial

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

Mas (5) é equivalente à afirmação de que

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0 \tag{6}$$

com qualquer x em $(-\infty, \infty)$, portanto, devemos mostrar que isso vale se, e só se, cada coeficiente em (6) for nulo. Para isso, lembramos, da Álgebra, que um polinômio não nulo de grau n tem, no máximo, n raízes distintas. Dessa forma, cada coeficiente em (6) deve ser nulo, pois, caso contrário, o lado esquerdo da equação seria um polinômio não nulo com uma infinidade de raízes distintas. Assim, (5) só tem a solução trivial. ◀

O próximo exemplo mostra que o problema de determinar se um dado conjunto de vetores em P_n é linearmente dependente ou independente pode ser reduzido a determinar se um certo conjunto de vetores em R^n é linearmente dependente ou independente.

▶ EXEMPLO 5 Independência linear de polinômios

Determine se os polinômios

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x, \quad \mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2, \quad \mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2$$

são linearmente dependentes ou independentes em P_2.

Solução A dependência ou independência linear desses vetores é determinada pela existência ou não de soluções não triviais da equação vetorial

$$k_1\mathbf{p}_1 + k_2\mathbf{p}_2 + k_3\mathbf{p}_3 = \mathbf{0} \tag{7}$$

Essa equação pode ser rescrita como

$$k_1(1 - x) + k_2(5 + 3x - 2x^2) + k_3(1 + 3x - x^2) = 0 \tag{8}$$

ou, equivalentemente, como

$$(k_1 + 5k_2 + k_3) + (-k_1 + 3k_2 + 3k_3)x + (-2k_2 - k_3)x^2 = 0$$

Como essa equação deve ser satisfeita com qualquer x de $(-\infty, \infty)$, cada coeficiente deve ser zero (conforme explicado no exemplo precedente). Assim, a dependência ou independência linear dos polinômios dados depende de o sistema linear seguinte ter ou não solução não trivial.

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + k_3 &= 0 \\ -k_1 + 3k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_2 - k_3 &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

No Exemplo 5, qual é a relação que pode ser observada entre os coeficientes dos polinômios dados e os vetores colunas da matriz de coeficientes do sistema (9)?

Deixamos para o leitor mostrar que esse sistema tem alguma solução não trivial, ou resolvendo diretamente, ou mostrando que a matriz de coeficientes tem determinante nulo. Assim, o conjunto $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ é linearmente dependente. ◀

Uma interpretação alternativa da independência linear

Os termos *linearmente dependente* e *linearmente independente* pretendem indicar se os vetores de um dado conjunto estão inter-relacionados de alguma maneira. O próximo teorema, cuja demonstração adiamos para o final desta seção, torna essa ideia mais precisa.

TEOREMA 4.3.1 *Um conjunto S de dois ou mais vetores é*

(*a*) *linearmente dependente se, e só se, pelo menos um dos vetores de S pode ser expresso como uma combinação linear dos outros vetores em S.*

(*b*) *linearmente independente se, e só se, nenhum vetor em S pode ser expresso como uma combinação linear dos outros vetores em S.*

▶ EXEMPLO 6 De novo o Exemplo 1

No Exemplo 1, mostramos que os vetores unitários canônicos em R^n são linearmente independentes. Assim, segue do Teorema 4.3.1 que nenhum desses vetores pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores. Para ilustrar isso em R^3, suponha, por exemplo, que

$$\mathbf{k} = k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j}$$

ou, em termos de componentes, que

$$(0, 0, 1) = (k_1, k_2, 0)$$

Como essa equação não pode ser satisfeita com quaisquer valores de k_1 e k_2, não há como expressar **k** como uma combinação linear de **i** e **j**. Analogamente, **i** não pode ser expresso como uma combinação linear de **j** e **k**, e **j** não pode ser expresso como uma combinação linear de **i** e **k**.

▶ EXEMPLO 7 De novo o Exemplo 2

No Exemplo 2, vimos que os vetores

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

são linearmente dependentes. Assim, segue do Teorema 4.3.1 que pelo menos um desses vetores pode ser escrito como combinação linear dos outros dois. Deixamos para o leitor confirmar que esses vetores satisfazem a equação

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

do que decorre, por exemplo, que

$$\mathbf{v}_3 = \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_2 \quad ◀$$

Conjuntos de um ou dois vetores

O teorema a seguir se refere à dependência e à independência linear de conjuntos de um ou dois elementos e conjuntos que contenham o vetor nulo.

TEOREMA 4.3.2

(*a*) *Um conjunto finito que contenha* **0** *é linearmente dependente.*

(*b*) *Um conjunto de exatamente um vetor é linearmente independente se, e só se, esse vetor não é* **0**.

(*c*) *Um conjunto de exatamente dois vetores é linearmente independente se, e só se, nenhum dos dois vetores é um múltiplo escalar do outro.*



Józef Hoëné deWroński (1778–1853)

Nota histórica O matemático franco-polonês Józef Hoëné de Wroński nasceu como Józef Hoëné e adotou o nome de Wroński depois de casar. Sua vida foi repleta de controvérsia e conflito, que alguns atribuem a suas tendências psicopatas e a seu exagero na atribuição de importância a sua própria obra. Embora o trabalho de Wroński tenha sido ignorado como irrelevante por muito tempo, e grande parte realmente estivesse errada, algumas de suas ideias continham luminosidade escondida e sobreviveram. Entre outras coisas, Wroński projetou um veículo movido a lagarta para competir com trens (que nunca foi fabricado) e pesquisou o famoso problema da determinação da longitude em alto mar. Seus últimos anos foram vividos na pobreza.

[Imagem: Wikipedia]

Provamos a parte (*a*) e deixamos o resto como exercício.

Prova (a) Dados quaisquer vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, o conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{0}\}$ é linearmente dependente, pois a equação

$$0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_r + 1(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

expressa $\mathbf{0}$ como uma combinação linear dos vetores em S com coeficientes não todos nulos. ◀

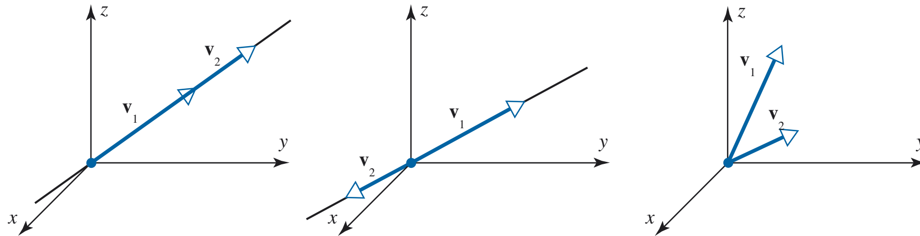
▶ EXEMPLO 8 Independência linear de duas funções

As funções $\mathbf{f}_1 = x$ e $\mathbf{f}_2 = \text{sen}\, x$ são vetores linearmente independentes em $F(-\infty, \infty)$, pois nenhuma das duas é um múltiplo escalar da outra. Por outro lado, as duas funções $\mathbf{g}_1 = \text{sen}\, 2x$ e $\mathbf{g}_2 = \text{sen}\, x \cos x$ são linearmente dependentes, pois a identidade trigonométrica $\text{sen}\, 2x = 2\, \text{sen}\, x \cos x$ revela que $\mathbf{g}_1$ e $\mathbf{g}_2$ são múltiplos escalares uma da outra. ◀

Uma interpretação geométrica da independência linear

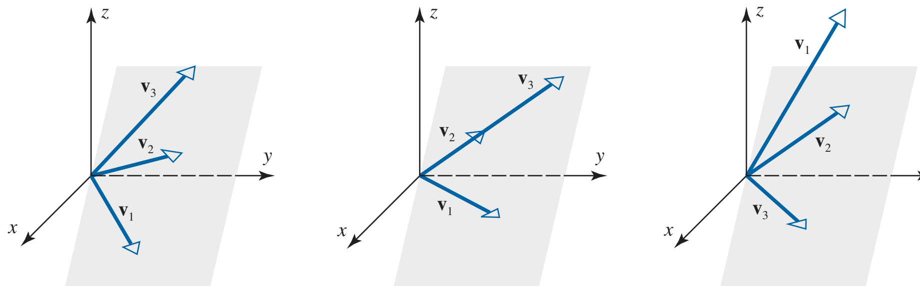
A independência linear tem a seguinte interpretação geométrica útil em R^2 e R^3.

- Dois vetores em R^2 ou R^3 são linearmente independentes se, e só se, os vetores não ficam numa mesma reta quando colocados com seus pontos iniciais na origem. Caso contrário, um deles seria um múltiplo escalar do outro (Figura 4.3.3).



▶ **Figura 4.3.3** (*a*) Linearmente dependentes (*b*) Linearmente dependentes (*c*) Linearmente independentes

- Três vetores em R^3 são linearmente independentes se, e só se, os vetores não ficam num mesmo plano quando colocados com seus pontos iniciais na origem. Caso contrário, pelo menos um deles seria uma combinação linear dos outros dois (Figura 4.3.4).



▶ **Figura 4.3.4** (*a*) Linearmente dependentes (*b*) Linearmente dependentes (*c*) Linearmente independentes

No início desta seção, observamos que um terceiro eixo coordenado em R^2 é supérfluo, mostrando que um vetor unitário ao longo de um eixo desses seria uma combinação linear dos vetores unitários ao longo dos eixos x e y. Aquele resultado é uma consequência do próximo teorema, que mostra que um conjunto linearmente independente em R^n pode conter, no máximo, n vetores.

TEOREMA 4.3.3 *Seja* $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ *um conjunto de vetores em* R^n. *Se* $r > n$, *então S é linearmente dependente.*

Prova Suponha que

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n})\\ \mathbf{v}_2 &= (v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n})\\ &\ \vdots\\ \mathbf{v}_r &= (v_{r1}, v_{r2}, \ldots, v_{rn})\end{aligned}$$

e considere a equação

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = 0$$

Segue do Teorema 4.3.3, por exemplo, que um conjunto em R^2 com mais de dois vetores é linearmente dependente, e um conjunto em R^3 com mais de três vetores é linearmente dependente.

Expressando ambos os lados dessa equação em termos dos componentes e igualando os componentes correspondentes, obtemos o sistema

$$\begin{aligned} v_{11}k_1 + v_{21}k_1 + \cdots + v_{r1}k_r &= 0\\ v_{12}k_1 + v_{22}k_1 + \cdots + v_{r2}k_r &= 0\\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\ \ \vdots\\ v_{1n}k_1 + v_{2n}k_1 + \cdots + v_{rn}k_r &= 0\end{aligned}$$

Isso é um sistema homogêneo de n equações nas r incógnitas $k_1, \ldots, k_r$. Como $r > n$, segue do Teorema 1.2.2 que o sistema tem soluções não triviais. Portanto, $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ é um conjunto linearmente dependente. ◀

REQUER CÁLCULO

Independência linear de funções

Às vezes, podemos deduzir a dependência linear de funções a partir de identidades conhecidas. Por exemplo, as funções

$$\mathbf{f}_1 = \operatorname{sen}^2 x, \quad \mathbf{f}_2 = \cos^2 x \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_3 = 5$$

formam um conjunto linearmente dependente em $F(-\infty, \infty)$, pois a equação

$$\begin{aligned}5\mathbf{f}_1 + 5\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 &= 5\operatorname{sen}^2 x + 5\cos^2 x - 5\\ &= 5(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) - 5 = \mathbf{0}\end{aligned}$$

expressa $\mathbf{0}$ como uma combinação linear de $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ e $\mathbf{f}_3$ com coeficientes não todos nulos.

Infelizmente, não existe um método *geral* que possa ser usado para determinar se um conjunto de funções é linearmente dependente ou independente. No entanto, existe um teorema que é útil para estabelecer a dependência linear em certas circunstâncias. A definição seguinte é útil para discutir esse teorema.

DEFINIÇÃO 2 Se $\mathbf{f}_1 = f_1(x), \mathbf{f}_2 = f_2(x), \ldots, \mathbf{f}_n = f_n(x)$ forem funções $n - 1$ vezes deriváveis no intervalo $(-\infty, \infty)$, então o determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x)\\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}$$

é denominado ***wronskiano*** de $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Suponha, por enquanto, que $\mathbf{f}_1 = f_1(x)$, $\mathbf{f}_2 = f_2(x), \ldots, \mathbf{f}_n = f_n(x)$ sejam vetores *linearmente dependentes* em $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$. Isso implica que, para certos valores dos coeficientes, a equação vetorial

$$k_1\mathbf{f}_1 + k_2\mathbf{f}_2 + \cdots + k_n\mathbf{f}_n = \mathbf{0}$$

tem alguma solução não trivial ou, equivalentemente, que a equação

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x) = 0$$

é satisfeita com qualquer x em $(-\infty, \infty)$. Usando essa equação juntamente com as equações obtidas por $n - 1$ sucessivas derivações, o resultado é o sistema linear

$$\begin{array}{llll} k_1 f_1(x) & + k_2 f_2(x) & + \cdots + k_n f_n(x) & = 0 \\ k_1 f_1'(x) & + k_2 f_2'(x) & + \cdots + k_n f_n'(x) & = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_1 f_1^{(n-1)}(x) & + k_2 f_2^{(n-1)}(x) & + \cdots + k_n f_n^{(n-1)}(x) & = 0 \end{array}$$

Assim, a dependência linear de $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ implica que o sistema linear

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

tem uma solução não trivial. Mas isso implica que o determinante da matriz de coeficientes de (10) é zero em cada um desses x. Como esse determinante é o wronskiano de $f_1, f_2, \ldots, f_n$, estabelecemos o seguinte resultado.

TEOREMA 4.3.4 *Se as funções* $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ *tiverem* $n - 1$ *derivadas contínuas no intervalo* $(-\infty, \infty)$, *e se o wronskiano dessas funções não for identicamente zero em* $(-\infty, \infty)$, *então essas funções formam um conjunto linearmente independente de vetores em* $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$.

No Exemplo 8, mostramos que x e sen x são funções linearmente independentes observando que nenhuma é um múltiplo escalar da outra. O próximo exemplo mostra como obter o mesmo resultado usando o wronskiano (se bem que, nesse caso particular, o procedimento é mais complicado).

▶ EXEMPLO 9 Independência linear usando o wronskiano

Use o wronskiano para mostrar que $\mathbf{f}_1 = x$ e $\mathbf{f}_2 = \operatorname{sen} x$ são linearmente independentes.

Solução O wronskiano é

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \operatorname{sen} x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = x\cos x - \operatorname{sen} x$$

Essa função não é identicamente zero no intervalo $(-\infty, \infty)$, porque, por exemplo,

$$W\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Assim, as funções são linearmente independentes.

ADVERTÊNCIA A recíproca do Teorema 4.3.4 é falsa. Se o wronskiano de $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ for identicamente zero em $(-\infty, \infty)$, então nada pode ser concluído sobre a independência linear de $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n\}$, podendo esse conjunto de vetores ser linearmente independente ou linearmente independente.

▶ EXEMPLO 10 Independência linear usando o wronskiano

Use o wronskiano para mostrar que $\mathbf{f}_1 = 1$, $\mathbf{f}_2 = e^x$ e $\mathbf{f}_3 = e^{2x}$ são linearmente independentes.

Solução O wronskiano é

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x}$$

Essa função obviamente não é identicamente zero em $(-\infty, \infty)$, portanto, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ e $\mathbf{f}_3$ formam um conjunto linearmente independente. ◀

OPCIONAL

Terminamos esta seção provando a parte (a) do Teorema 4.3.1. Deixamos a prova da parte (b) como exercício.

Prova do Teorema 4.3.1(a) Seja $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ um conjunto com dois ou mais vetores. Supondo que S seja linearmente dependente, existem escalares $k_1, k_2, \ldots, k_r$, não todos nulos, tais que

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \tag{11}$$

Para sermos específicos, suponha que $k_1 \neq 0$. Então (11) pode ser reescrita como

$$\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\mathbf{v}_2 + \cdots + \left(-\frac{k_r}{k_1}\right)\mathbf{v}_r$$

que expressa $\mathbf{v}_1$ como combinação linear dos outros vetores em S. Analogamente, se $k_j \neq 0$ em (11) com algum $j = 2, 3, \ldots, r$, então $\mathbf{v}_j$ pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores em S.

Reciprocamente, suponha que pelo menos um dos vetores em S possa ser expresso como uma combinação linear dos outros vetores. Para sermos específicos, suponha que

$$\mathbf{v}_1 = c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r$$

e, portanto,

$$\mathbf{v}_1 - c_2\mathbf{v}_2 - c_3\mathbf{v}_3 - \cdots - c_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Segue que S é linearmente dependente, pois a equação

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

é satisfeita por

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -c_2, \ldots, k_r = -c_r$$

que não são todos nulos. A prova é análoga no caso em que algum outro vetor, e não $\mathbf{v}_1$, puder ser escrito como combinação linear dos outros vetores de S. ◀

Revisão de conceitos

- Solução trivial
- Conjunto linearmente independente
- Conjunto linearmente dependente
- Wronskiano

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se um conjunto de vetores é linearmente dependente ou independente.
- Expressar um vetor em um conjunto linearmente dependente como uma combinação linear dos outros vetores no conjunto.
- Usar o wronskiano para mostrar que um conjunto de funções é linearmente independente.

Conjunto de exercícios 4.3

1. Explique por que o conjunto de vetores dado é linearmente independente. (Resolva o problema inspecionando o conjunto.)

(a) $\mathbf{u}_1 = (-1, 2, 4)$ e $\mathbf{u}_2 = (5, -10, -20)$ em R^3

(b) $\mathbf{u}_1 = (3, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (4, 5)$, $\mathbf{u}_3 = (-4, 7)$ em R^2

(c) $\mathbf{p}_1 = 3 - 2x + x^2$ e $\mathbf{p}_2 = 6 - 4x + 2x^2$ em P_2

(d) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ em M_{22}

2. Quais dos seguintes conjuntos de vetores em R^3 são linearmente dependentes?

(a) $(4, -1, 2), (-4, 10, 2)$

(b) $(-3, 0, 4), (5, -1, 2), (1, 1, 3)$

(c) $(8, -1, 3), (4, 0, 1)$

(d) $(-2, 0, 1), (3, 2, 5), (6, -1, 1), (7, 0, -2)$

3. Quais dos seguintes conjuntos de vetores em R^4 são linearmente dependentes?

(a) $(3, 8, 7, -3), (1, 5, 3, -1), (2, -1, 2, 6), (1, 4, 0, 3)$

(b) $(0, 0, 2, 2), (3, 3, 0, 0), (1, 1, 0, -1)$

(c) $(0, 3, -3, -6), (-2, 0, 0, -6), (0, -4, -2, -2), (0, -8, 4, -4)$

(d) $(3, 0, -3, 6), (0, 2, 3, 1), (0, -2, -2, 0), (-2, 1, 2, 1)$

4. Quais dos seguintes conjuntos de vetores em P_2 são linearmente dependentes?

(a) $2 - x + 4x^2, 3 + 6x + 2x^2, 2 + 10x - 4x^2$

(b) $3 + x + x^2, 2 - x + 5x^2, 4 - 3x^2$

(c) $6 - x^2, 1 + x + 4x^2$

(d) $1 + 3x + 3x^2, x + 4x^2, 5 + 6x + 3x^2, 7 + 2x - x^2$

5. Suponha que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sejam vetores em R^3 com pontos iniciais na origem. Em cada parte, determine se os três vetores estão num mesmo plano.

(a) $\mathbf{v}_1 = (2, -2, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (6, 1, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 0, -4)$

(b) $\mathbf{v}_1 = (-6, 7, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 2, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (4, -1, 2)$

6. Suponha que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sejam vetores em R^3 com pontos iniciais na origem. Em cada parte, determine se os três vetores estão num mesmo plano.

(a) $\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -4, -6)$, $\mathbf{v}_3 = (-3, 6, 0)$

(b) $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 2, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 7, -6)$

(c) $\mathbf{v}_1 = (4, 6, 8)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (-2, -3, -4)$

7. (a) Mostre que os três vetores $\mathbf{v}_1 = (0, 3, 1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (6, 0, 5, 1)$ e $\mathbf{v}_3 = (4, -7, 1, 3)$ formam um conjunto linearmente dependente em R^4.

(b) Expresse cada vetor na parte (a) como uma combinação linear dos outros dois.

8. (a) Mostre que os três vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, -1)$ e $\mathbf{v}_3 = (1, 3, 3, 3)$ formam um conjunto linearmente dependente em R^4.

(b) Expresse cada vetor na parte (a) como uma combinação linear dos outros dois.

9. Os vetores dados formam um conjunto linearmente dependente em R^3 com quais valores reais de λ?

$$\mathbf{v}_1 = \left(\lambda, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right), \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\tfrac{1}{2}, \lambda, -\tfrac{1}{2}\right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \lambda\right)$$

10. Mostre que se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ for um conjunto linearmente independente de vetores, então também o são $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1\}$, $\{\mathbf{v}_2\}$ e $\{\mathbf{v}_3\}$.

11. Mostre que se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ for um conjunto linearmente independente de vetores, então também o é qualquer subconjunto não vazio de S.

12. Mostre que se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ for um conjunto linearmente dependente de vetores num espaço vetorial V e se $\mathbf{v}_4$ for um vetor qualquer em V que não está em S, então $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ também é linearmente dependente.

13. Mostre que se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ for um conjunto linearmente dependente de vetores num espaço vetorial V e se $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ forem vetores quaisquer em V que não estão em S, então $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ também é linearmente dependente.

14. Mostre que qualquer conjunto com mais de três vetores em P_2 é linearmente dependente.

15. Mostre que se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ for um conjunto linearmente independente e $\mathbf{v}_3$ não pertencer a ger$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, então $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é linearmente independente.

16. Prove: dados quaisquer vetores **u**, **v** e **w** num espaço vetorial V, os vetores $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ e $\mathbf{w} - \mathbf{u}$ formam um conjunto linearmente dependente.

17. Prove: o espaço gerado por dois vetores em R^3 é uma reta pela origem, um plano pela origem, ou a própria origem.

18. Sob quais condições é um conjunto de um único vetor linearmente independente?

19. Os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ na parte (*a*) da figura dada são linearmente independentes? E os da parte (*b*)? Explique.

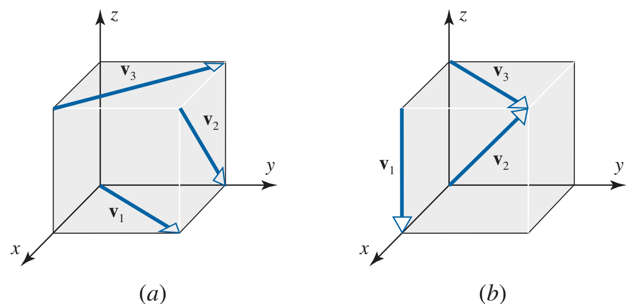


Figura Ex-19

20. Utilizando identidades apropriadas, onde necessário, determine quais dos conjuntos de vetores em $F(-\infty, \infty)$ dados são linearmente dependentes.

(a) $6, 3 \operatorname{sen}^2 x, 2 \cos^2 x$ (b) $x, \cos x$

(c) $1, \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x$ (d) $\cos 2x, \operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x$

(e) $(3 - x)^2, x^2 - 6x, 5$ (f) $0, \cos^3 \pi x, \operatorname{sen}^5 3\pi x$

21. As funções $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = \cos x$ são linearmente independentes em $F(-\infty, \infty)$ porque nenhuma das duas é um múltiplo escalar da outra. Confirme a independência linear usando o teste do wronskiano.

22. As funções $f_1(x) = \operatorname{sen} x$ e $f_2(x) = \cos x$ são linearmente independentes em $F(-\infty, \infty)$ porque nenhuma das duas é um múltiplo escalar da outra. Confirme a independência linear usando o teste do wronskiano.

23. (***Requer Cálculo***) Em cada parte, use o wronskiano para mostrar que o conjunto de vetores dado é linearmente independente.

(a) $1, x, e^x$ (b) $1, x, x^2$

24. Use o teste do wronskiano para mostrar que as funções $f_1(x) = e^x, f_2(x) = xe^x$ e $f_3(x) = x^2e^x$ são linearmente independentes em $F(-\infty, \infty)$.

25. Use o teste do wronskiano para mostrar que as funções $f_1(x) = \operatorname{sen} x, f_2(x) = \cos x$ e $f_3(x) = x \cos x$ são linearmente independentes em $F(-\infty, \infty)$.

26. Use a parte (*a*) do Teorema 4.3.1 para provar a parte (*b*).

27. Prove a parte (*b*) do Teorema 4.3.2.

28. (a) Mostramos no Exemplo 1 que os vetores mutuamente ortogonais **i**, **j** e **k** formam um conjunto linearmente independente de vetores em R^3. Será que qualquer conjunto de vetores mutuamente ortogonais em R^3 forma um conjunto linearmente independente? Justifique sua conclusão geometricamente.

(b) Justifique sua conclusão algebricamente. [*Sugestão*: use produto escalar.]

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(h), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Um conjunto que consiste num único vetor é linearmente dependente.

(b) Dado qualquer escalar k, o conjunto de vetores $\{\mathbf{v}, k\mathbf{v}\}$ é linearmente dependente.

(c) Cada conjunto linearmente dependente contém o vetor zero.

(d) Se o conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ for linearmente independente, então, dado qualquer escalar não nulo k, o conjunto $\{k\mathbf{v}_1, k\mathbf{v}_2, k\mathbf{v}_3\}$ também é linearmente dependente.

(e) Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ forem vetores não nulos linearmente dependentes, então pelo menos um vetor $\mathbf{v}_k$ é uma combinação linear única de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$.

(f) O conjunto das matrizes 2×2 que contém exatamente dois 1 e dois 0 é linearmente independente em M_{22}.

(g) Os três polinômios $(x - 1)(x + 2), x(x + 2)$, e $x(x - 1)$ são linearmente independentes.

(h) As funções f_1 e f_2 são linearmente dependentes se existirem um número real x e escalares k_1 e k_2 tais que $k_1f_1(x) + k_2f_2(x) = 0$.

4.4 Coordenadas e bases

Costumamos pensar numa reta como sendo unidimensional, num plano, como bidimensional e no espaço à nossa volta, como tridimensional. O objetivo principal desta e da próxima seções é tornar mais precisa essa noção intuitiva de dimensão. Nesta seção, discutimos sistemas de coordenadas em espaços vetoriais arbitrários e preparamos o terreno para uma definição precisa de dimensão na próxima seção.

Sistemas de coordenadas na Álgebra Linear

Na Geometria Analítica, aprendemos a usar sistemas de coordenadas *retangulares* para criar uma correspondência bijetora entre os pontos do espaço bidimensional e os pares ordenados de números reais, bem como entre os pontos do espaço tridimensional e os ternos ordenados de números reais (Figura 4.4.1). Embora os sistemas de coordenadas retangulares sejam comuns, eles não são essenciais. Por exemplo, a Figura 4.4.2 mostra sistemas de coordenadas nos espaços bi e tridimensionais em que os eixos coordenados não são mutuamente perpendiculares.

Na Álgebra Linear, costumamos especificar sistemas de coordenadas usando vetores em vez de eixos coordenados. Por exemplo, na Figura 4.4.3, recriamos os sistemas de coordenadas dados na Figura 4.4.2 usando vetores unitários para identificar os sentidos positivos nos eixos e, então, associando coordenadas a um ponto P usando os coeficientes escalares nas equações

$$\overrightarrow{OP} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OP} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3$$

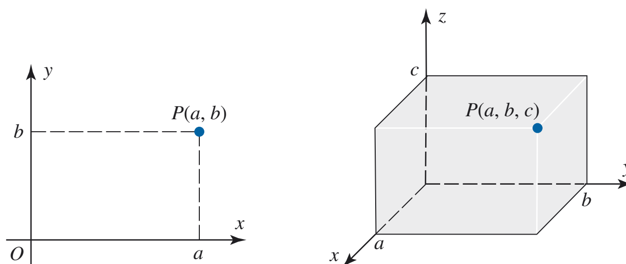


Figura 4.4.1

As coordenadas de P num sistema de coordenadas retangulares no espaço bidimensional

As coordenadas de P num sistema de coordenadas retangulares no espaço tridimensional

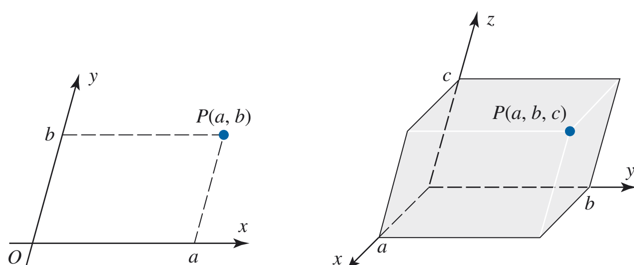


Figura 4.4.2

As coordenadas de P num sistema de coordenadas não retangulares no espaço bidimensional

As coordenadas de P num sistema de coordenadas não retangulares no espaço tridimensional

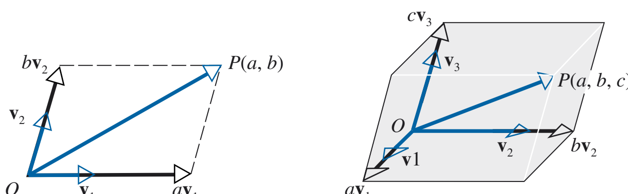


Figura 4.4.3

Ingredientes essenciais de qualquer sistema de coordenadas são as unidades de medição. Em problemas geométricos, tentamos utilizar a mesma unidade de medição em cada eixo para evitar a distorção do formato das figuras. Isso é menos importante naquelas aplicações em que as coordenadas representam quantidades físicas com unidades diversas (por exemplo, tempo em segundos num dos eixos e temperatura em graus Celsius num outro). Para acomodar esse nível de generalidade, deixamos de exigir que sejam *unitários* os vetores utilizados para identificar os sentidos positivos dos eixos e exigimos somente que sejam linearmente independentes. A esses vetores, nos referimos como sendo os "vetores de base" do sistema de coordenadas. Resumindo, são os sentidos dos vetores de base que estabelecem o sentido positivo nos eixos, e é seu comprimento que estabelece a escala, ou seja, o espaçamento entre os pontos inteiros nos eixos (Figura 4.4.4).

Bases de um espaço vetorial

A definição seguinte torna as ideias precedentes mais precisas e nos permite estender o conceito de sistema de coordenadas a espaços vetoriais arbitrários.

DEFINIÇÃO 1 Se V for um espaço vetorial qualquer e $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ for um conjunto finito de vetores em V, dizemos que S é uma ***base*** de V se valerem as duas condições a seguir.

(a) S é linearmente independente.

(b) S gera V.

Note que, na Definição 1, exigimos que bases tenham um número finito de vetores. Alguns autores dizem que isso é uma ***base finita***, mas essa terminologia não será utilizada aqui.

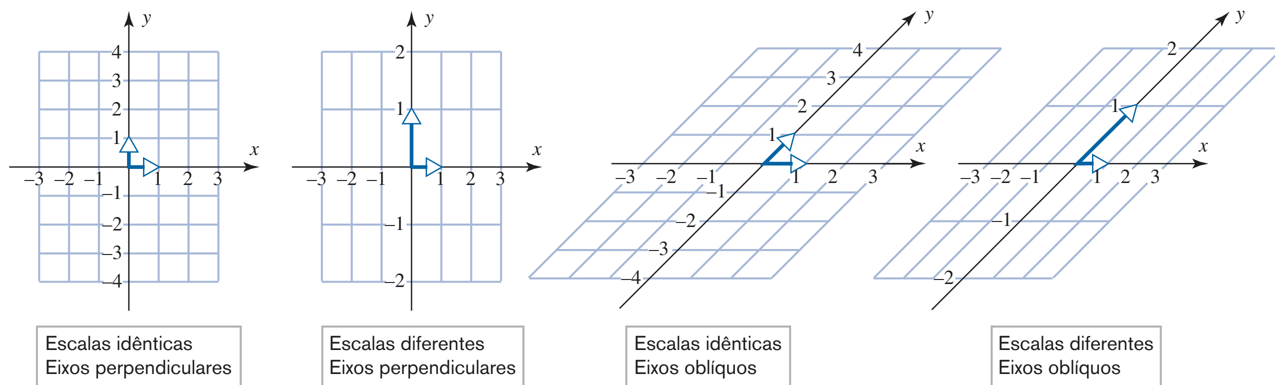


Figura 4.4.4

Pensando numa base como descrevendo um sistema de coordenadas para um espaço vetorial V, então a parte (a) da definição garante que não há inter-relações entre os vetores de base, e a parte (b) garante que há vetores de base em número suficiente para fornecer coordenadas para todos os vetores em V. Vejamos alguns exemplos.

▶ EXEMPLO 1 A base canônica de R^n

Vimos, no Exemplo 11 da Seção 4.2, que os vetores unitários canônicos

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

geram R^n e, pelo Exemplo 1 da Seção 4.3, sabemos que são linearmente independentes. Assim, esses vetores formam uma base de R^n que denominamos ***base canônica de R***^{n}. Em particular,

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

é a base canônica de R^3.

▶ EXEMPLO 2 A base canônica de P_n

Mostre que $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é uma base do espaço vetorial P_n dos polinômios de grau no máximo n.

Solução Devemos mostrar que os polinômios em S são linearmente independentes e que geram P_n. Denotemos esses polinômios por

$$\mathbf{p}_0 = 1, \quad \mathbf{p}_1 = x, \quad \mathbf{p}_2 = x^2, \ldots, \quad \mathbf{p}_n = x^n$$

Mostramos no Exemplo 13 da Seção 4.2, que esses vetores geram P_n e, no Exemplo 4 da Seção 4.3, que são linearmente independentes. Assim, esses vetores formam uma base de P_n que denominamos ***base canônica* de** P_n.

▶ EXEMPLO 3 Uma outra base de R^3

Mostre que os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$ formam uma base de R^3.

Solução Devemos mostrar que esses vetores são linearmente independentes e que geram R^3. Para mostrar a independência linear, devemos mostrar que a equação vetorial

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \tag{1}$$

só tem a solução trivial, e para provar que esses vetores geram R^3, devemos mostrar que cada vetor $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ de R^3 pode ser expresso como

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b} \tag{2}$$

Igualando componentes correspondentes dos dois lados, essas duas equações podem ser expressas como os sistemas lineares

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= 0 \\ c_1 \qquad + 4c_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= b_1 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= b_2 \\ c_1 \qquad + 4c_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{3}$$

(verifique). Assim, reduzimos o problema a mostrar que o sistema homogêneo (3) só tem a solução trivial, e que o sistema não homogêneo (5) é consistente com quaisquer valores de b_1, b_2 e b_3. Mas os dois sistemas (3) e (5) têm a mesma matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

de modo que segue das partes (*b*), (*e*) e (*g*) do Teorema 2.3.8 que podemos provar ambos resultados simultaneamente mostrando que $\det(A) \neq 0$. Deixamos para o leitor confirmar que $\det(A) = -1$, o que prova que os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ formam uma base de R^3.

▶ EXEMPLO 4 A base canônica de M_{mn}

Mostre que as matrizes

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

formam uma base do espaço vetorial M_{22} das matrizes 2×2.

Solução Devemos mostrar que as matrizes são linearmente independentes e que geram M_{22}. Para mostrar a independência linear, devemos mostrar que a equação vetorial

$$c_1M_1 + c_2M_2 + c_3M_3 + c_4M_4 = \mathbf{0} \tag{4}$$

só tem a solução trivial, em que $\mathbf{0}$ é a matriz nula 2×2, e para provar que essas matrizes geram M_{22}, devemos mostrar que cada matriz 2×2

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

pode ser expressa como

$$c_1M_1 + c_2M_2 + c_3M_3 + c_4M_4 = B \tag{5}$$

As formas matriciais das Equações (4) e (5) são

$$c_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$c_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

que podem ser reescritas como

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Como a primeira equação só tem a solução trivial

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$$

as matrizes são linearmente independentes e, como a segunda equação tem a solução

$$c_1 = a, \quad c_2 = b, \quad c_3 = c, \quad c_4 = d$$

essas matrizes geram M_{22}. Isso prova que as matrizes M_1, M_2, M_3, M_4 formam uma base de M_{22}. Mais geralmente, a ***base canônica*** de M_{mn} consiste nas mn matrizes distintas com uma única entrada 1 e todas as demais entradas iguais a zero. ◀

Alguns autores definem o conjunto vazio como sendo uma base do espaço vetorial nulo, mas aqui não faremos isso.

Não é verdade que todo espaço vetorial tenha uma base no sentido da Definição 1. O exemplo mais simples é o do espaço vetorial nulo, que não contém conjuntos linearmente independentes e, portanto, não tem base. O espaço vetorial do exemplo seguinte não tem base no sentido da Definição 1, porque não pode ser gerado por um número finito de vetores.

▶ EXEMPLO 5 Um espaço vetorial que não tem conjunto gerador finito

Mostre que o espaço vetorial P_∞ de todos os polinômios com coeficientes reais não tem conjunto gerador finito.

Solução Se existisse algum conjunto gerador finito, digamos, $S = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_r\}$, então os graus dos polinômios em S teriam um valor máximo, digamos, n. Isso, por sua vez, implicaria que qualquer combinação linear de polinômios em S teria grau n, no máximo. Assim, não haveria como expressar o polinômio x^{n+1} como uma combinação linear de polinômios em S, o que contradiria a hipótese de que os vetores de S geram P_∞. ◀

Por motivos que serão esclarecidos em breve, dizemos que um espaço vetorial que não pode ser gerado por um número finito de vetores é ***de dimensão infinita***, ao passo que um que pode é ***de dimensão finita***.

▶ EXEMPLO 6 Alguns espaços de dimensão finita e infinita

Nos Exemplos 1, 2 e 4, encontramos bases para R^n, P_n e M_{mn}, portanto, esses espaços vetoriais são de dimensão finita. Mostramos no Exemplo 5 que o espaço vetorial P_∞ não é gerado por um número finito de vetores e, portanto, é de dimensão infinita. Nos exercícios desta e da próxima seções, pedimos ao leitor mostrar que os espaços vetoriais R^∞, $F(-\infty, \infty)$, $C(-\infty, \infty)$, $C^m(-\infty, \infty)$ e $C^\infty(-\infty, \infty)$ têm dimensão infinita. ◀

Coordenadas em relação a uma base

No começo desta seção, estabelecemos uma analogia entre vetores de base e sistemas de coordenadas. Nosso próximo objetivo é precisar essa ideia definindo a noção de sistema de coordenadas em espaços vetoriais arbitrários. O teorema a seguir é nosso primeiro passo nessa direção.

TEOREMA 4.4.1 Unicidade da representação em base

Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *for uma base de um espaço vetorial V, então cada vetor em V pode ser expresso na forma* $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$ *de exatamente uma única maneira.*

Prova Como S gera V, segue da definição de conjunto gerador que cada vetor de V pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores em S. Para ver que só existe *uma* maneira de expressar um vetor como uma combinação linear dos vetores em S, suponha que um certo vetor $\mathbf{v}$ possa ser escrito como

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

e também como

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos

$$\mathbf{0} = (c_1 - k_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 - k_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n - k_n)\mathbf{v}_n$$

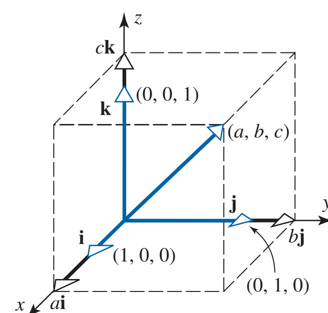
Como o lado direito dessa equação é uma combinação linear dos vetores em S, a independência linear de S implica

$$c_1 - k_1 = 0, \quad c_2 - k_2 = 0, \ldots, \quad c_n - k_n = 0$$

ou seja,

$$c_1 = k_1, \quad c_2 = k_2, \ldots, \quad c_n = k_n$$

Assim, as duas expressões para **v** são a mesma. ◀



▲ **Figura 4.4.5**

Agora dispomos de todos os ingredientes necessários para definir a noção de "coordenadas" num espaço vetorial arbitrário. Para motivar o conceito, observe que em R^3, por exemplo, as coordenadas (a, b, c) de um vetor **v** são precisamente os coeficientes na fórmula

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

que expressa **v** como uma combinação linear dos vetores canônicos de R^3 (ver Figura 4.4.5). A definição seguinte generaliza essa ideia.

Às vezes, é adequado escrever um vetor de coordenadas como uma matriz coluna, caso em que utilizamos colchetes em sua notação, como em

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Dizemos que $[\mathbf{v}]_S$ é a ***matriz de coordenadas*** e reservamos a terminologia ***vetor de coordenadas*** para os vetores $(\mathbf{v})_S$ escritos com vírgulas.

DEFINIÇÃO 2 Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, v_n\}$ for uma base de um espaço vetorial V e se

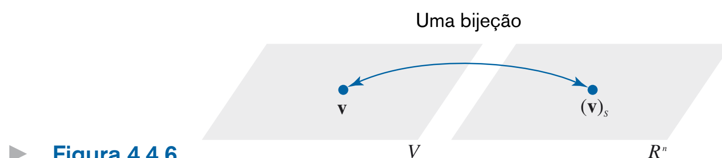
$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

é a expressão de um vetor **v** em termos da base S, então os escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são denominados ***coordenadas*** de **v** em relação à base S. O vetor $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ em R^n construído com essas coordenadas é denominado ***vetor de coordenadas de* v *em relação a S*** e é denotado por

$$(\mathbf{v})_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \tag{6}$$

Observação Lembre que dois *conjuntos* são considerados iguais se têm os mesmos elementos, mesmo se esses elementos estiverem escritos em alguma outra ordem. No entanto, se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ for um conjunto de *vetores de base*, então uma troca na ordem em que escrevemos os vetores trocaria a ordem das entradas em $(\mathbf{v})_S$, produzindo possivelmente um vetor de coordenadas diferente. Para evitar essa complicação, introduzimos a convenção de que, em qualquer discussão envolvendo uma base S, a ordem dos vetores em S permanece inalterada. Alguns autores dizem que um conjunto de vetores de base com essa restrição é uma ***base ordenada***. No entanto, aqui só utilizaremos essa terminologia quando a ênfase na ordem for necessária para o entendimento.

Observe que $(\mathbf{v})_S$ é um vetor em R^n, de modo que, uma vez fornecida uma base S de um espaço vetorial V, o Teorema 4.4.1 estabelece uma bijeção entre os vetores em V e os vetores em R^n (Figura 4.4.6).



▶ **Figura 4.4.6**

▶ EXEMPLO 7 Coordenadas em relação à base canônica de R^n

No caso especial em que $V = R^n$ e S for a *base canônica*, o vetor de coordenadas $(\mathbf{v})_S$ é igual ao vetor **v**,

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v})_S$$

Por exemplo, em R^3, a representação $\mathbf{v} = (a, b, c)$ de um vetor como combinação linear dos vetores na base canônica $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ é

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

de modo que o vetor de coordenadas em relação a essa base é $(\mathbf{v})_S = (a, b, c)$, que é igual ao vetor $\mathbf{v}$.

▶ EXEMPLO 8 Vetores de coordenadas em relação a bases canônicas

(a) Encontre o vetor de coordenadas do polinômio

$$\mathbf{p}(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$$

em relação à base canônica do espaço vetorial P_n.

(b) Encontre o vetor de coordenadas de

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

em relação à base canônica de M_{22}.

Solução (a) A fórmula dada de $\mathbf{p}(x)$ expressa esse polinômio como uma combinação linear dos vetores da base canônica $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Assim, o vetor de coordenadas de $\mathbf{p}$ em relação a S é

$$(\mathbf{p})_S = (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

Solução (b) Mostramos no Exemplo 4 que a representação de um vetor

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

como uma combinação linear dos vetores da base canônica é

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que o vetor de coordenadas de B em relação a S é

$$(B)_S = (a, b, c, d)$$

▶ EXEMPLO 9 Coordenadas em R^3

(a) Mostramos no Exemplo 3 que os vetores

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (2, 9, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$$

formam uma base de R^3. Encontre o vetor de coordenadas de $\mathbf{v} = (5, -1, 9)$ em relação à base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

(b) Encontre o vetor em R^3 cujo vetor de coordenadas em relação à base S é $(\mathbf{v})_S = (-1, 3, 2)$.

Solução (a) Para encontrar $(\mathbf{v})_S$, precisamos primeiro expressar $\mathbf{v}$ como uma combinação linear dos vetores em S, ou seja, precisamos encontrar valores de c_1, c_2 e c_3 tais que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

ou, em termos de componentes,

$$(5, -1, 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

Igualando os componentes correspondentes, obtemos

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= -1 \\ c_1 \qquad\quad + 4c_3 &= 9 \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 2$ (verifique). Portanto,

$$(\mathbf{v})_S = (1, -1, 2)$$

Solução (b) Usando a definição de $(\mathbf{v})_S$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (-1)\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 \\ &= (-1)(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) = (11, 31, 7) \end{aligned}$$ ◀

Revisão de conceitos

- Base
- Bases canônicas de R^n, P_n, M_{mn}
- Dimensão finita
- Dimensão infinita
- Coordenadas
- Vetor de coordenadas

Aptidões desenvolvidas

- Mostrar que um conjunto de vetores é uma base de um espaço vetorial.
- Encontrar as coordenadas de um vetor em relação a uma base.
- Encontrar o vetor de coordenadas de um vetor em relação a uma base.

Conjunto de exercícios 4.4

1. Em cada parte, explique em palavras por que os vetores dados *não são* uma base do espaço vetorial dado.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (2, 7)$ para R^2

(b) $\mathbf{u}_1 = (-1, 3, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (6, 1, 1)$ para R^3

(c) $\mathbf{p}_1 = 1 + x + x^2$, $\mathbf{p}_2 = x - 1$ para P_2

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$,

$D = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ para M_{22}

2. Quais dos conjuntos de vetores dados são bases de R^2?

(a) $\{(2, 1), (3, 0)\}$ (b) $\{(4, 1), (-7, -8)\}$

(c) $\{(0, 0), (1, 3)\}$ (d) $\{(3, 9), (-4, -12)\}$

3. Quais dos conjuntos de vetores dados são bases de R^3?

(a) $\{(1, 0, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 3)\}$

(b) $\{(3, 1, -4), (2, 5, 6), (1, 4, 8)\}$

(c) $\{(2, -3, 1), (4, 1, 1), (0, -7, 1)\}$

(d) $\{(1, 6, 4), (2, 4, -1), (-1, 2, 5)\}$

4. Quais dos conjuntos de vetores dados são bases de P_2?

(a) $1 - 3x + 2x^2$, $1 + x + 4x^2$, $1 - 7x$

(b) $4 + 6x + x^2$, $-1 + 4x + 2x^2$, $5 + 2x - x^2$

(c) $1 + x + x^2$, $x + x^2$, x^2

(d) $-4 + x + 3x^2$, $6 + 5x + 2x^2$, $8 + 4x + x^2$

5. Mostre que as matrizes dadas formam uma base de M_{22}.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Seja V o espaço gerado por $\mathbf{v}_1 = \cos^2 x$, $\mathbf{v}_2 = \operatorname{sen}^2 x$, $\mathbf{v}_3 = \cos 2x$.

(a) Mostre que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ não é uma base de V.

(b) Encontre uma base de V.

7. Em cada parte, encontre o vetor de coordenadas de $\mathbf{w}$ em relação à base $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de R^2.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$; $\mathbf{w} = (3, -7)$

(b) $\mathbf{u}_1 = (2, -4)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 8)$; $\mathbf{w} = (1, 1)$

(c) $\mathbf{u}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 2)$; $\mathbf{w} = (a, b)$

8. Em cada parte, encontre o vetor de coordenadas de $\mathbf{w}$ em relação à base $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de R^2.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1)$; $\mathbf{w} = (1, 0)$

(b) $\mathbf{u}_1 = (1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1)$; $\mathbf{w} = (0, 1)$

(c) $\mathbf{u}_1 = (1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1)$; $\mathbf{w} = (1, 1)$

9. Em cada parte, encontre o vetor de coordenadas de **v** em relação à base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

(a) $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$; $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 3)$

(b) $\mathbf{v} = (5, -12, 3)$; $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (-4, 5, 6)$, $\mathbf{v}_3 = (7, -8, 9)$

10. Em cada parte, encontre o vetor de coordenadas de **p** em relação à base $S = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$.

(a) $\mathbf{p} = 4 - 3x + x^2$; $\mathbf{p}_1 = 1$, $\mathbf{p}_2 = x$, $\mathbf{p}_3 = x^2$

(b) $\mathbf{p} = 2 - x + x^2$; $\mathbf{p}_1 = 1 + x$, $\mathbf{p}_2 = 1 + x^2$, $\mathbf{p}_3 = x + x^2$

11. Encontre o vetor de coordenadas de A em relação à base $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▶ Nos Exercícios **12–13**, mostre que $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ é uma base de M_{22} e expresse A como uma combinação linear dos vetores da base. ◀

12. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

13. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

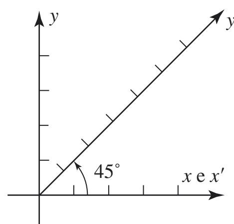
▶ Nos Exercícios **14–15**, mostre que $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ é uma base de P_2 e expresse **p** como uma combinação linear dos vetores da base. ◀

14. $\mathbf{p}_1 = 1 + 2x + x^2$, $\mathbf{p}_2 = 2 + 9x$, $\mathbf{p}_3 = 3 + 3x + 4x^2$; $\mathbf{p} = 2 + 17x - 3x^2$

15. $\mathbf{p}_1 = 1 + x + x^2$, $\mathbf{p}_2 = x + x^2$, $\mathbf{p}_3 = x^2$; $\mathbf{p} = 7 - x + 2x^2$

16. A figura dada mostra um sistema de coordenadas retangulares xy e um sistema de coordenadas $x'y'$ com eixos oblíquos. Supondo que em todos os eixos foram utilizadas escalas de uma unidade, encontre as coordenadas $x'y'$ dos pontos cujas coordenadas xy estão dadas.

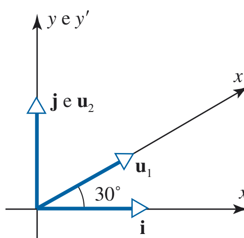
(a) $(1, 1)$ (b) $(1, 0)$ (c) $(0, 1)$ (d) (a, b)



◀ Figura Ex-16

17. A figura dada mostra um sistema de coordenadas retangulares xy determinado pelos vetores unitários **i** e **j** da base canônica e um sistema de coordenadas $x'y'$ determinado pelos vetores unitários **i** e **j** de uma outra base. Encontre as coordenadas $x'y'$ dos pontos cujas coordenadas xy estão dadas.

(a) $(\sqrt{3}, 1)$ (b) $(1, 0)$ (c) $(0, 1)$ (d) (a, b)



◀ Figura Ex-17

18. A base de M_{22} dada no Exemplo 4 consiste em matrizes não invertíveis. Será que existe alguma base de M_{22} consistindo em matrizes invertíveis? Justifique sua resposta.

19. Prove que R^∞ tem dimensão infinita.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se $V = \text{ger}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, então $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base de V.

(b) Cada subconjunto linearmente independente de um espaço vetorial V é uma base de V.

(c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ for uma base de um espaço vetorial V, então cada vetor em V pode ser expresso como uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

(d) O vetor de coordenadas de um vetor **x** em R^n em relação à base canônica de R^n é **x**.

(e) Cada base de P_4 contém pelo menos um polinômio de grau 3 ou menor.

4.5 Dimensão

Na seção anterior, mostramos que a base canônica de R^n tem n vetores e que, portanto, a base canônica de R^3 tem três vetores, a base canônica de R^2 tem dois vetores, e a base canônica de $R^1(= R)$ tem um vetor. Como pensamos no espaço como sendo tridimensional, um plano como bidimensional e uma reta como unidimensional, parece haver alguma relação entre o número de vetores em uma base e a dimensão do espaço vetorial. Nesta seção, desenvolvemos essa ideia.

Número de vetores em uma base

Nosso primeiro objetivo nesta seção é estabelecer o teorema fundamental que segue.

TEOREMA 4.5.1 *Todas as bases de um espaço vetorial de dimensão finita têm o mesmo número de vetores.*

Para provar esse teorema, vamos precisar do resultado preliminar seguinte, cuja prova é deixada para o final desta seção.

TEOREMA 4.5.2 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *uma base qualquer de V.*

(a) *Um conjunto com mais de n vetores é linearmente dependente.*

(b) *Um conjunto com menos de n vetores não gera V.*

Agora não é difícil ver por que vale o Teorema 4.5.1, pois, se

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

for uma base arbitrária de V, então a independência linear de S implica que qualquer conjunto em V com mais de n vetores é linearmente dependente, e qualquer conjunto em V com menos de n vetores não gera V. Assim, vemos que um conjunto em V não pode ser base a menos que tenha exatamente n vetores.

Notamos, na introdução desta seção, que para certos espaços vetoriais familiares, a noção intuitiva de dimensão coincide com o número de vetores numa base. A definição seguinte torna precisa essa ideia.

Alguns autores definem o conjunto vazio como sendo uma base do espaço vetorial nulo. Isso é consistente com a nossa definição de dimensão, pois o conjunto vazio não tem vetores, e o espaço vetorial nulo tem dimensão 0.

DEFINIÇÃO 1 A ***dimensão*** de um espaço vetorial de dimensão finita V é denotada por $\dim(V)$ e é definida como o número de vetores numa base de V. Além disso, definimos o espaço vetorial nulo como tendo dimensão zero.

▶ EXEMPLO 1 Dimensões de alguns espaços vetoriais familiares

$\dim(R^n) = n$ **A base canônica tem *n* vetores.**

$\dim(P_n) = n + 1$ **A base canônica tem *n* + 1 vetores.**

$\dim(M_{mn}) = mn$ **A base canônica tem *mn* vetores.**

Os engenheiros costumam usar o termo ***graus de liberdade*** como sinônimo de dimensão.

▶ EXEMPLO 2 Dimensão de ger(*S*)

Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ for um conjunto linearmente independente no espaço vetorial V, então S é automaticamente uma base de ger(S) (por quê?) e isso implica

$$\dim[\text{ger}(S)] = r$$

Em palavras, a dimensão do espaço gerado por algum conjunto linearmente independente de vetores é igual ao número de vetores naquele conjunto.

▶ EXEMPLO 3 Dimensão de um espaço solução

Encontre uma base e a dimensão do espaço solução do sistema homogêneo

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\quad + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad\quad - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Solução Deixamos para o leitor resolver esse sistema com eliminação de Gauss-Jordan e mostrar que sua solução geral é

$$x_1 = -s - t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = -t, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = t$$

que pode ser escrita em forma vetorial como

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-s - t, s, -t, 0, t)$$

ou, alternativamente, como

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = s(-1, 1, 0, 0, 0) + t(-1, 0, -1, 0, 1)$$

Isso mostra que os vetores $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0, 0, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, -1, 0, 1)$ geram o espaço solução. Como nenhum desses vetores é um múltiplo escalar do outro, também são linearmente independentes e, portanto, formam uma base do espaço solução. Assim, o espaço solução tem dimensão 2.

▶ EXEMPLO 4 Dimensão de um espaço solução

Encontre uma base e a dimensão do espaço solução do sistema homogêneo

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\quad + 2x_5 \qquad\quad &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= 0 \\ 5x_3 + 10x_4 \qquad\quad + 15x_6 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 \qquad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Solução No Exemplo 6 da Seção 1.2, vimos que a solução desse sistema é

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = 0$$

que pode ser escrita em forma vetorial como

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (-3r - 4s - 2t, r, -2s, s, t, 0)$$

ou, alternativamente, como

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = r(-3, 1, 0, 0, 0, 0) + s(-4, 0, -2, 1, 0, 0) + t(-2, 0, 0, 0, 1, 0)$$

Isso mostra que os vetores

$$\mathbf{v}_1 = (-3, 1, 0, 0, 0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (-4, 0, -2, 1, 0, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (-2, 0, 0, 0, 1, 0)$$

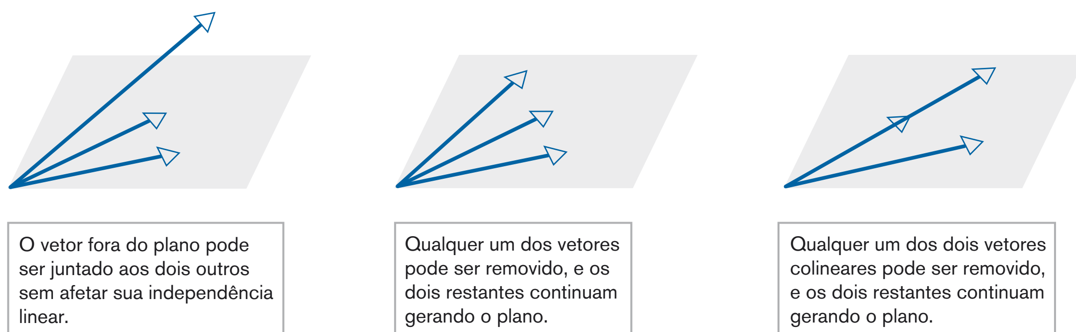
geram o espaço solução. Deixamos para o leitor verificar que esses vetores são linearmente independentes, mostrando que nenhum deles é combinação linear dos outros dois (mas veja a observação a seguir). Assim, o espaço solução tem dimensão 3. ◀

Observação Pode ser mostrado que, para sistemas homogêneos, o método do exemplo anterior sempre produz uma base do espaço solução do sistema. Omitimos a prova formal.

Alguns teoremas fundamentais

Dedicamos o restante desta seção a uma série de teoremas que revelam as inter-relações sutis entre os conceitos de independência linear, base e dimensão. Esses teoremas não são simples exercícios de matemática teórica; eles são essenciais para o entendimento de espaços vetoriais e das aplicações com eles construídas.

Começamos com um teorema (demonstrado no final desta seção) que trata do efeito sobre a independência linear de um conjunto não vazio de vetores e do espaço por ele gerado se um vetor for juntado a esse conjunto ou removido dele. Enunciado informalmente, começando com um conjunto linearmente independente S e juntando a S um vetor que não é uma combinação linear dos de S, então o conjunto aumentado ainda continua linearmente independente. Além disso, começando com um conjunto S de dois ou mais vetores no qual um dos vetores é uma combinação linear dos outros, então esse vetor pode ser removido de S sem afetar o gerado por S (Figura 4.5.1).



▲ **Figura 4.5.1**

TEOREMA 4.5.3 Teorema do mais/menos

Seja S um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V.

(*a*) *Se S for um conjunto linearmente independente e se* $\mathbf{v}$ *for um vetor em V que está fora do ger(S), então o conjunto $S \cup \{\mathbf{v}\}$ que resulta do acréscimo de* $\mathbf{v}$ *a S ainda é linearmente independente.*

(*b*) *Se* $\mathbf{v}$ *for um vetor em S que pode ser expresso como combinação linear dos outros vetores de S, e se $S - \{\mathbf{v}\}$ denotar o conjunto obtido removendo* $\mathbf{v}$ *de S, então S e $S - \{\mathbf{v}\}$ geram o mesmo espaço, ou seja,*

$$\text{ger}(S) = \text{ger}(S - \{\mathbf{v}\})$$

▶ **EXEMPLO 5 Aplicando o teorema mais/menos**

Mostre que $\mathbf{p}_1 = 1 - x^2$, $\mathbf{p}_2 = 2 - x^2$ e $\mathbf{p}_3 = x^3$ são vetores linearmente independentes.

Solução O conjunto $S = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$ é linearmente independente, pois nenhum de seus vetores é um múltiplo escalar do outro. Como o vetor $\mathbf{p}_3$ não pode ser expresso como combinação linear dos vetores em S (por quê?), pode ser juntado a S para produzir um conjunto linearmente independente $S' = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$. ◀

Em geral, para mostrar que um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base de um espaço vetorial V, devemos mostrar que os vetores são linearmente independentes e que geram V. No entanto, se soubermos que V tem dimensão n (de modo que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ tem o número correto de vetores de uma base), então basta verificar *ou* que são linearmente independentes *ou* que geram, pois, dessa forma, a outra condição é automaticamente satisfeita. Esse é o conteúdo do teorema a seguir.

TEOREMA 4.5.4 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e S um conjunto em V com exatamente n vetores. Então S é uma base de V se, e só se, S gera V ou S é linearmente independente.*

Prova Suponha que S tenha exatamente n vetores e que gere V. Para provar que S é uma base, devemos mostrar que S é um conjunto linearmente independente. Se esse não for o caso, então algum vetor $\mathbf{v}$ em S é uma combinação linear dos demais vetores. Removendo esse vetor de S, segue do Teorema 4.5.3*b* que o conjunto restante de $n - 1$ vetores ainda gera V. Mas isso é impossível, pois segue do Teorema 4.5.2*b* que nenhum conjunto com menos do que n vetores pode gerar um espaço vetorial de dimensão n. Assim, S é linearmente independente.

Suponha que S tenha exatamente n vetores e que seja um conjunto linearmente independente. Para provar que S é uma base, devemos mostrar que S gera V. Se esse não for o caso, então existe algum vetor $\mathbf{v}$ de V que não está no ger(S). Acrescentando esse vetor a S, segue do Teorema 4.5.3*a* que o conjunto resultante de $n + 1$ vetores ainda é linearmente independente. Mas isso é impossível, pois o Teorema 4.5.2*a* afirma que nenhum conjunto com mais de n vetores em um espaço vetorial de dimensão n pode ser linearmente independente. Assim, S gera V. ◀

▶ EXEMPLO 6 Base por inspeção

(a) Por inspeção, explique por que $\mathbf{v}_1 = (-3, 7)$ e $\mathbf{v}_2 = (5, 5)$ formam uma base de R^2.

(b) Por inspeção, explique por que $\mathbf{v}_1 = (2, 0, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 0, 7)$ e $\mathbf{v}_3 = (-1, 1, 4)$ formam uma base de R^3.

Solução (a) Como nenhum dos dois vetores é um múltiplo escalar do outro, os dois vetores formam um conjunto linearmente independente no espaço R^2 de dimensão 2 e, portanto, constituem uma base, pelo Teorema 4.5.4.

Solução (b) Os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ formam um conjunto linearmente independente no plano xz (por quê?). O vetor $\mathbf{v}_3$ está fora do plano xz, portanto, o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ também é linearmente independente. Como R^3 tem dimensão 3, o Teorema 4.4.5 implica que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base de R^3. ◀

O próximo teorema (cuja prova é adiada para o final desta seção) revela dois fatos importantes sobre os vetores num espaço vetorial de dimensão finita.

1. Cada conjunto gerador de um subespaço ou é uma base desse subespaço ou contém nele uma base.
2. Cada conjunto linearmente independente num subespaço ou é uma base desse subespaço ou pode ser estendido a uma base dele.

TEOREMA 4.5.5 *Seja S um conjunto finito de vetores num espaço vetorial V de dimensão finita.*

(*a*) *Se S gerar V, mas não for uma base de V, então S pode ser reduzido a uma base de V removendo vetores apropriados de S.*

(*b*) *Se S for um conjunto linearmente independente, mas não for uma base de V, então S pode ser ampliado a uma base de V acrescentando vetores apropriados a S.*

Concluímos esta seção com um teorema que relaciona a dimensão de um espaço vetorial com as dimensões de seus subespaços.

TEOREMA 4.5.6 *Se W for um subespaço de um espaço vetorial V de dimensão finita, então*

(*a*) *W tem dimensão finita.*

(*b*) $\dim(W) \leq \dim(V)$.

(*c*) $W = V$ *se, e só se,* $\dim(W) = \dim(V)$.

Prova (a) Deixamos a prova dessa parte como exercício.

Prova (b) A parte (*a*) mostra que *W* tem dimensão finita, de modo que possui uma base

$$S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$$

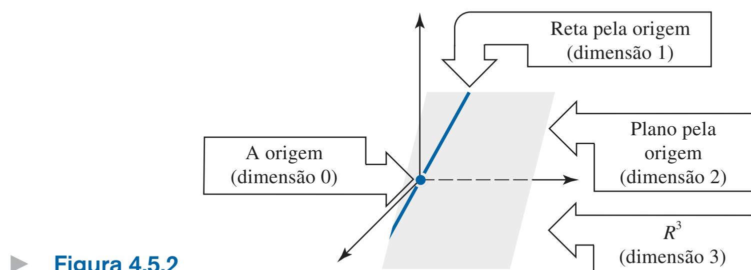
Ou *S* também é uma base de *V* ou não. Se for, então $\dim(V) = m$, o que significa que $\dim(V) = \dim(W)$. Se não for, como S é um conjunto linearmente independente, pode ser ampliado a uma base de *V* pela parte (*b*) do Teorema 4.5.5, o que implica que $\dim(W) < \dim(V)$. Assim, em ambos casos, mostramos que $\dim(W) \leq \dim(V)$.

Prova (c) Suponha que $\dim(W) = \dim(V)$ e que

$$S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$$

seja uma base de *W*. Se *S* não fosse também uma base de *V*, então, por ser linearmente independente, *S* poderia ser ampliado a uma base de *V* pela parte (*b*) do Teorema 4.5.5. Mas isso significaria que $\dim(V) > \dim(W)$, contradizendo nossa hipótese. Assim, *S* deve ser também uma base de *V*, o que significa que $W = V$. ◀

A Figura 4.5.2 ilustra as relações geométricas entre os subespaços de R^3 em ordem de dimensão crescente.



▶ **Figura 4.5.2**

Concluímos esta seção com as provas opcionais dos Teoremas 4.5.2, 4.5.3 e 4.5.5.

OPCIONAL

Prova do Teorema 4.5.2(a) Seja $S' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ um conjunto qualquer de *m* vetores em *V*, com $m > n$. Queremos mostrar que *S′* é linearmente dependente. Como $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base, cada $\mathbf{w}_i$ pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores em *S*, digamos,

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{v}_n \\
\mathbf{w}_2 &= a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{v}_n \\
&\ \ \vdots \\
\mathbf{w}_m &= a_{1m}\mathbf{v}_1 + a_{2m}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{nm}\mathbf{v}_n
\end{aligned} \tag{1}$$

Para mostrar que S' é linearmente dependente, devemos encontrar escalares $k_1, k_2, \ldots, k_m$ não todos zero, tais que

$$k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2 + \cdots + k_m\mathbf{w}_m = \mathbf{0} \tag{2}$$

Usando as equações em (1), podemos reescrever (2) como

$$\begin{aligned}(k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_ma_{1m})\mathbf{v}_1 \\ + (k_1a_{21} + k_2a_{22} + \cdots + k_ma_{2m})\mathbf{v}_2 \\ \ddots \\ + (k_1a_{n1} + k_2a_{n2} + \cdots + k_ma_{nm})\mathbf{v}_n = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Assim, pela independência linear de S, o problema de provar que S' é um conjunto linearmente independente se reduz a mostrar que existem escalares $k_1, k_2, \ldots, k_m$ não todos zero, que satisfaçam

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}k_1 & + & a_{12}k_2 & + \cdots + & a_{1m}k_m & = & 0 \\ a_{21}k_1 & + & a_{22}k_2 & + \cdots + & a_{2m}k_m & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}k_1 & + & a_{n2}k_2 & + \cdots + & a_{nm}k_m & = & 0 \end{array} \tag{3}$$

No entanto, (3) tem mais incógnitas do que equações, de modo que a prova está completa, pois o Teorema 1.2.2 garante a existência de soluções não triviais.

Prova do Teorema 4.5.2(b) Seja $S' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ um conjunto qualquer de m vetores em V, com $m < n$. Queremos mostrar que S' não gera V. Faremos isso mostrando que a suposição de que S' gere V leva a uma contradição da independência linear de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

Se S' gera V, então cada vetor em V é uma combinação linear dos vetores em S'. Em particular, cada vetor $\mathbf{v}_i$ da base é uma combinação linear dos vetores em S', digamos,

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{v}_1 & = & a_{11}\mathbf{w}_1 & + & a_{21}\mathbf{w}_2 & + \cdots + & a_{m1}\mathbf{w}_m \\ \mathbf{v}_2 & = & a_{12}\mathbf{w}_1 & + & a_{22}\mathbf{w}_2 & + \cdots + & a_{m2}\mathbf{w}_m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_n & = & a_{1n}\mathbf{w}_1 & + & a_{2n}\mathbf{w}_2 & + \cdots + & a_{mn}\mathbf{w}_m \end{array} \tag{4}$$

Para obter nossa contradição, mostraremos que existem escalares $k_1, k_2, \ldots, k_n$ não todos zero, tais que

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{5}$$

No entanto, (4) e (5) têm a mesma forma que (1) e (2), exceto pela permutação de m com n e dos vetores $\mathbf{w}$ com os vetores $\mathbf{v}$. Assim, a conta que nos levou a (3) agora fornece

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}k_1 & + & a_{12}k_2 & + \cdots + & a_{1n}k_n & = & 0 \\ a_{21}k_1 & + & a_{22}k_2 & + \cdots + & a_{2n}k_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}k_1 & + & a_{m2}k_2 & + \cdots + & a_{mn}k_n & = & 0 \end{array}$$

Esse sistema tem mais incógnitas do que equações e, portanto, tem soluções não triviais pelo Teorema 1.2.2.

Prova do Teorema 4.5.3(a) Suponha que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ seja um conjunto linearmente independente de vetores em V, e que $\mathbf{v}$ seja um vetor em V que está fora do ger(S). Para mostrar que $S' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}\}$ é um conjunto linearmente independente, devemos mostrar que os únicos escalares que satisfazem a equação

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r + k_{r+1}\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{6}$$

são $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = k_{r+1} = 0$. Mas certamente temos $k_{r+1} = 0$, pois, caso contrário, poderíamos resolver (6) em $\mathbf{v}$ como uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, contradizendo a nossa suposição de que $\mathbf{v}$ está fora do ger(S). Assim, (6) simplifica para

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \tag{7}$$

o que implica, pela independência linear de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$, que

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$$

Prova do Teorema 4.5.3(b) Suponha que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ seja um conjunto de vetores em V e (para sermos específicos) suponha que $\mathbf{v}_r$ é uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{r-1}$, digamos,

$$\mathbf{v}_r = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{r-1}\mathbf{v}_{r-1} \tag{8}$$

Queremos mostrar que se $\mathbf{v}_r$ for removido de S, então o conjunto restante $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{r-1}\}$ ainda gera ger(S), ou seja, devemos mostrar que cada vetor $\mathbf{w}$ em ger(S) pode ser expresso como uma combinação linear de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{r-1}\}$. Mas se $\mathbf{w}$ for um vetor em ger(S), então $\mathbf{w}$ pode ser expresso na forma

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_{r-1}\mathbf{v}_{r-1} + k_r\mathbf{v}_r$$

ou então, substituindo (8),

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_{r+1}\mathbf{v}_{r-1} + k_r(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{r-1}\mathbf{v}_{r-1})$$

o que dá $\mathbf{w}$ como uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{r-1}$.

Prova do Teorema 4.5.5(a) Se S for um conjunto de vetores que gera V, mas não é uma base de V, então S é um conjunto linearmente dependente. Assim, algum vetor $\mathbf{v}$ em S pode ser expresso como uma combinação linear dos demais vetores em S. Pelo Teorema de Mais/Menos (4.5.3*b*), podemos remover $\mathbf{v}$ de S e o conjunto S' resultante ainda gera V. Se S' for linearmente independente, então S' é uma base de V e podemos parar. Se S' for linearmente dependente, então podemos remover algum vetor apropriado de S' para obter um conjunto S'' que ainda gera V. Podemos continuar removendo vetores dessa maneira até chegar, finalmente, num conjunto de vetores em S que é linearmente independente e que gera V. Esse subconjunto de S é uma base de V.

Prova do Teorema 4.5.5(b) Suponha que $\dim(V) = n$. Se S é um conjunto linearmente independente que ainda não é uma base de V, então S não gera V e, portanto, existe algum vetor $\mathbf{v}$ em V que não está no ger(S). Pelo Teorema de Mais/Menos (4.5.3*a*), podemos acrescentar $\mathbf{v}$ a S e o conjunto S' resultante ainda é linearmente independente. Se S' gerar V, então S' é uma base de V e podemos parar. Se S' não gerar V, então podemos acrescentar algum vetor apropriado a S' para obter um conjunto S'' que ainda é linearmente independente. Podemos continuar acrescentando vetores dessa maneira até chegar num conjunto de n vetores linearmente independentes em V. Esse conjunto será uma base de V pelo Teorema 4.5.4. ◄

Revisão de conceitos

- Dimensão
- Relação entre o conceitos de independência linear, base e dimensão

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar uma base e a dimensão do espaço solução de um sistema linear homogêneo.
- Usar a dimensão para determinar se um conjunto de vetores é uma base de um espaço vetorial de dimensão finita.
- Estender um conjunto linearmente independente a uma base.

Conjunto de exercícios 4.5

▶ Nos Exercícios **1–6**, encontre uma base do espaço solução do sistema linear homogêneo e encontre a dimensão desse espaço. ◀

1. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 \qquad + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad + 5x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 3x + 2y - 2z &= 0 \\ 4x + 3y - z &= 0 \\ 6x + 5y + z &= 0 \end{aligned}$$

7. Encontre bases dos seguintes subespaços de R^3.
(a) O plano $3x - 2y + 5z = 0$.
(b) O plano $x - y = 0$.
(c) A reta $x = 2t$, $y = -t$, $z = 4t$.
(d) Todos os vetores da forma (a, b, c) com $b = a + c$.

8. Encontre as dimensões dos seguintes subespaços de R^4.
(a) Todos os vetores da forma $(a, b, c, 0)$.
(b) Todos os vetores da forma (a, b, c, d), em que $d = a + b$ e $c = a - b$.
(c) Todos os vetores da forma (a, b, c, d), em que $a = b = c = d$.

9. Encontre a dimensão de cada um dos seguintes espaços vetoriais.
(a) O espaço vetorial de todas as matrizes $n \times n$ diagonais.
(b) O espaço vetorial de todas as matrizes $n \times n$ simétricas.
(c) O espaço vetorial de todas as matrizes $n \times n$ triangulares superiores.

10. Encontre a dimensão do subespaço de P_3 consistindo em todos os polinômios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ com $a_0 = 0$.

11. (a) Mostre que o conjunto W de todos os polinômios em P_2 tais que $p(1) = 0$ é um subespaço de P_2.
(b) Faça uma conjectura sobre a dimensão de W.
(c) Confirme sua conjectura encontrando uma base de W.

12. Em cada caso, encontre um vetor da base canônica de R^3 que pode ser acrescentado ao conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para formar uma base de R^3.
(a) $\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -2, -2)$
(b) $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 1, -2)$

13. Encontre vetores da base canônica de R^4 que podem ser acrescentados ao conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para formar uma base de R^4

$$\mathbf{v}_1 = (1, -4, 2, -3),\ \mathbf{v}_2 = (-3, 8, -4, 6)$$

14. Seja $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ uma base de um espaço vetorial V. Mostre que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ também é uma base, sendo $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

15. Os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, 5, -3)$ são linearmente independentes. Aumente $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ até uma base de R^3.

16. Os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3, -5)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 2, -3)$ são linearmente independentes. Aumente $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ até uma base de R^4.

17. (a) Mostre que, para cada inteiro positivo n, podemos encontrar $n + 1$ vetores linearmente independentes em $F(-\infty, \infty)$. [*Sugestão*: procure polinômios.]
(b) Use o resultado da parte (a) para provar que $F(-\infty, \infty)$ tem dimensão infinita.
(c) Prove que $C(-\infty, \infty)$ e $C^m(-\infty, \infty)$ são espaços vetoriais de dimensão infinita.

18. Seja S uma base de um espaço vetorial V de dimensão n. Mostre que se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ formarem um conjunto linearmente independente de vetores em V, então os vetores de coordenadas $(\mathbf{v}_1)_S, (\mathbf{v}_2)_S, \ldots, (\mathbf{v}_r)_S$ formam um conjunto linearmente independente em R^n e reciprocamente.

19. Usando a notação do Exercício 18, mostre que se os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ gerarem V, então os vetores de coordenadas $(\mathbf{v}_1)_S, (\mathbf{v}_2)_S, \ldots, (\mathbf{v}_r)_S$ geram R_n e reciprocamente.

20. Em cada caso, encontre uma base do subespaço de P_2 gerado pelos vetores dados.
(a) $-1 + x - 2x^2$, $3 + 3x + 6x^2$, 9

(b) $1 + x, x^2, -2 + 2x^2, -3x$

(c) $1 + x - 3x^2, 2 + 2^x - 6x^2, 3 + 3x - 9x^2$

[*Sugestão*: seja S a base canônica de P_2 e trabalhe com os vetores de coordenadas em relação a S como nos Exercícios 18 e 19.]

21. Prove: qualquer subespaço de um espaço vetorial de dimensão finita tem dimensão finita.

22. Enuncie as duas partes do Teorema 4.5.2 em forma contrapositiva.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(j), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) O espaço vetorial nulo tem dimensão zero.

(b) Existe um conjunto de 17 vetores linearmente independentes em R^{17}.

(c) Existe um conjunto de 11 vetores que gera R^{17}.

(d) Cada conjunto linearmente independente de cinco vetores em R^5 é uma base de R^5.

(e) Cada conjunto de cinco vetores que gera R^5 é uma base de R^5.

(f) Cada conjunto de vetores que gera R^n contém alguma base de R^n.

(g) Cada conjunto de vetores linearmente independente em R^n está contido em alguma base de R^n.

(h) Existe alguma base de M_{22} consistindo em matrizes invertíveis.

(i) Se A tiver tamanho $n \times n$ e $I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}$ forem matrizes distintas, então $\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\}$ é linearmente independente.

(j) Existem pelo menos dois subespaços tridimensionais distintos de P^2.

4.6 Mudança de bases

Uma base conveniente para um problema pode não ser conveniente para um outro, de forma que é um procedimento comum no estudo de espaços vetoriais a mudança de uma base para uma outra. Como a base é a generalização de coordenadas para um espaço vetorial, a mudança de bases é relacionada à mudança de eixos coordenados em R^2 e R^3. Nesta seção, estudamos problemas relativos à mudança de bases.

Aplicação de coordenadas

Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ for uma base de um espaço vetorial V de dimensão finita e se

$$(\mathbf{v})_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

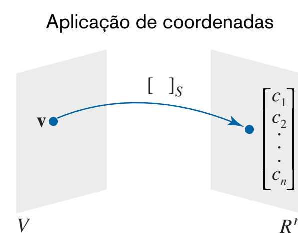
for o vetor de coordenadas de $\mathbf{v}$ em relação a S, então, como observamos na Seção 4.4, a aplicação

$$\mathbf{v} \to (\mathbf{v})_S \tag{1}$$

cria uma conexão (uma bijeção) entre os vetores do espaço vetorial *arbitrário* V e os vetores do espaço vetorial *familiar* R^n. Dizemos que (1) é a ***aplicação de coordenadas*** de V em R^n. Nesta seção, é conveniente expressar os vetores de coordenadas em formato matricial

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

em que os colchetes enfatizam a notação matricial (Figura 4.6.1).



▲ **Figura 4.6.1**

Mudança de bases

Existem muitas aplicações em que é necessário trabalhar com mais de um sistema de coordenadas. Nesses casos, acaba sendo importante saber como se relacionam as coordenadas de um vetor fixado em relação a cada um desses sistemas de coordenadas. Isso nos leva ao problema seguinte.

> **Problema da mudança de base** Se $\mathbf{v}$ for um vetor num espaço vetorial V de dimensão finita e se mudarmos a base de V de uma base B para uma base B', qual é a relação entre os vetores de coordenadas $[\mathbf{v}]_B$ e $[\mathbf{v}]_{B'}$?

Observação Para resolver esse problema, é conveniente dizer que B é a "base velha" e B' a "base nova". Assim, nosso objetivo é encontrar a relação entre as coordenadas velhas e novas de um vetor $\mathbf{v}$ em V fixado.

Para simplificar, resolvemos esse problema em espaços bidimensionais. A solução para espaços de dimensão n é análoga. Sejam

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \quad \text{e} \quad B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$$

as bases velha e nova, respectivamente. Precisamos dos vetores de coordenadas dos vetores da base nova em relação à base velha. Suponha que sejam

$$[\mathbf{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \tag{3}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_1 &= a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}'_2 &= c\mathbf{u}_1 + d\mathbf{u}_2 \end{aligned} \tag{4}$$

Seja, agora, $\mathbf{v}$ um vetor qualquer em V e seja

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

o novo vetor de coordenadas, de modo que

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{u}'_1 + k_2\mathbf{u}'_2 \tag{6}$$

Para conseguir encontrar as coordenadas velhas de $\mathbf{v}$, devemos expressar $\mathbf{v}$ em termos da base velha B. Para isso, substituímos (4) em (6). Isso fornece

$$\mathbf{v} = k_1(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2) + k_2(c\mathbf{u}_1 + d\mathbf{u}_2)$$

ou

$$\mathbf{v} = (k_1a + k_2c)\mathbf{u}_1 + (k_1b + k_2d)\mathbf{u}_2$$

Assim, o velho vetor de coordenadas de $\mathbf{v}$ é

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} k_1a + k_2c \\ k_1b + k_2d \end{bmatrix}$$

que, por (5), pode ser escrito como

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}[\mathbf{v}]_{B'}$$

Essa equação afirma que o velho vetor de coordenadas $[\mathbf{v}]_B$ é o resultado da multiplicação do novo vetor de coordenadas $[\mathbf{v}]_{B'}$ à esquerda pela matriz

$$P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Como as colunas dessa matriz são as coordenadas dos vetores da base nova em relação à base velha [ver (3)], temos a solução seguinte para o problema de mudança de base.

Solução do problema de mudança de base Se mudarmos a base de um espaço vetorial V de alguma base velha $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ para uma base nova $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, então, dado qualquer vetor $\mathbf{v}$ em V, o velho vetor de coordenadas $[\mathbf{v}]_B$ está relacionado com o novo vetor de coordenadas $[\mathbf{v}]_{B'}$ pela equação

$$[\mathbf{v}]_B = P[\mathbf{v}]_{B'} \tag{7}$$

onde as colunas de P são os vetores de coordenadas dos vetores da base nova em relação à base velha; ou seja, os vetores coluna de P são

$$[\mathbf{u}'_1]_B, \quad [\mathbf{u}'_2]_B, \ldots, [\mathbf{u}'_n]_B \tag{8}$$

A matriz P na Equação (7) é denominada ***matriz de transição*** de B' para B que, para enfatizar, muitas vezes denotamos por $P_{B' \to B}$. Segue de (8) que essa matriz pode ser expressa em termos de seus vetores coluna como

Matrizes de transição

$$P_{B' \to B} = \left[[\mathbf{u}_1']_B \mid [\mathbf{u}_2']_B \mid \cdots \mid [\mathbf{u}_n']_B \right] \tag{9}$$

Analogamente, a matriz de transição de B para B' pode ser expressa em termos de seus vetores coluna por

$$P_{B \to B'} = \left[[\mathbf{u}_1]_{B'} \mid [\mathbf{u}_2]_{B'} \mid \cdots \mid [\mathbf{u}_n]_{B'} \right] \tag{10}$$

Observação Há uma maneira simples de se lembrar dessas fórmulas usando os termos "matriz velha" e "matriz nova" definidos na observação precedente. Na Fórmula (9), a base velha é B' e a nova é B, ao passo que na Fórmula (10), a base velha é B e a nova é B'. Assim, ambas fórmulas podem ser reescritas como segue.

As colunas da matriz de transição de uma base velha para uma base nova são os vetores de coordenadas da base velha em relação à base nova.

▶ EXEMPLO 1 Encontrando matrizes de transição

Considere as bases $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e $B' = \{\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2'\}$ de R^2, onde

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1), \quad \mathbf{u}_1' = (1, 1), \quad \mathbf{u}_2' = (2, 1)$$

(a) Encontre a matriz de transição $P_{B' \to B}$ de B' para B.

(b) Encontre a matriz de transição $P_{B \to B'}$ de B para B'.

Solução (a) Aqui, os vetores da base velha são $\mathbf{u}_1'$ e $\mathbf{u}_2'$, e os vetores da base nova são $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$. Queremos encontrar os vetores de coordenadas dos vetores $\mathbf{u}_1'$ e $\mathbf{u}_2'$ da base velha em relação aos vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ da base nova. Para isso, observamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1' &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_2' &= 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

do que segue

$$[\mathbf{u}_1']_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{u}_2']_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e, portanto, que

$$P_{B' \to B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução (b) Aqui, os vetores da base velha são $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ e os vetores da base nova são $\mathbf{u}_1'$ e $\mathbf{u}_2'$. Como na parte (a), queremos encontrar os vetores de coordenadas dos vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ da base velha em relação aos vetores $\mathbf{u}_1'$ e $\mathbf{u}_2'$ da base nova. Para isso, observamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= -\mathbf{u}_1' + \mathbf{u}_2' \\ \mathbf{u}_2 &= 2\mathbf{u}_1' - \mathbf{u}_2' \end{aligned}$$

do que segue

$$[\mathbf{u}_1]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{u}_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e, portanto, que

$$P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad ◀$$

Suponha, agora, que B e B' sejam as bases de um espaço vetorial V de dimensão finita. Como a multiplicação por $P_{B'\to B}$ transforma vetores de coordenadas em relação à base B' em vetores de coordenadas em relação à base B, e $P_{B\to B'}$ transforma vetores de coordenadas em relação à base B em vetores de coordenadas em relação à base B', segue que para cada vetor $\mathbf{v}$ de V temos

$$[\mathbf{v}]_B = P_{B'\to B}[\mathbf{v}]_{B'} \tag{11}$$

$$[\mathbf{v}]_{B'} = P_{B\to B'}[\mathbf{v}]_{B'} \tag{12}$$

▶ EXEMPLO 2 Calculando vetores de coordenadas

Sejam B e B' as bases no Exemplo 1. Use uma fórmula apropriada para encontrar $[\mathbf{v}]_B$, sabendo que

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Solução Para encontrar $[\mathbf{v}]_B$, precisamos fazer a transição de B' para B. Da Fórmula (11) e da parte (a) do Exemplo 1, segue que

$$[\mathbf{v}]_B = P_{B'\to B}[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$ ◀

Invertibilidade de matrizes de transição

Se B e B' forem bases de um espaço vetorial V de dimensão finita, então

$$(P_{B'\to B})\,(P_{B\to B'}) = P_{B\to B}$$

já que a multiplicação por $(P_{B'\to B})\,(P_{B\to B'})$ transforma inicialmente as coordenadas de um vetor em relação a B nas coordenadas em relação a B' e, depois, transforma essas coordenadas em relação a B' de volta nas coordenadas em relação a B. Como o efeito final das duas operações é deixar cada vetor de coordenadas no lugar em que se encontrava, somos levados a concluir que $P_{B\to B}$ deve ser a matriz identidade, ou seja,

$$(P_{B'\to B})\,(P_{B\to B'}) = I \tag{13}$$

(omitimos a prova formal). Por exemplo, com as matrizes de transição obtidas no Exemplo 1, temos

$$(P_{B'\to B'})\,(P_{B\to B'}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Segue de (13) que $P_{B'\to B}$ é invertível e que sua inversa é $P_{B\to B'}$. Assim, obtemos o teorema a seguir.

TEOREMA 4.6.1 *Se P for a matriz de transição de uma base B' para uma base B de um espaço vetorial V de dimensão finita, então P é invertível e P^{-1} é a matriz de transição de B para B'.*

Um método eficiente para calcular matrizes de transição em R^n

Nosso próximo objetivo é desenvolver um procedimento eficiente para calcular matrizes de transição *entre bases de R^n*. Conforme ilustrado no Exemplo 1, o primeiro passo no cálculo de uma matriz de transição é expressar cada vetor da base nova como uma combinação linear dos vetores da base antiga. Em R^n, isso envolve resolver n sistemas lineares em n incógnitas, todos com a mesma matriz de coeficientes (por quê?). Uma maneira eficiente de fazer isso é com o método ilustrado no Exemplo 2 da Seção 1.6, como segue.

Um procedimento para calcular $P_{B \to B'}$

Passo 1. Montamos a matriz $[B' \mid B]$.

Passo 2. Reduzimos a matriz do Passo 1 à forma escalonada reduzida usando operações elementares com as linhas.

Passo 3. A matriz resultante é $[I \mid P_{B \to B'}]$.

Passo 4. Extraímos a matriz $P_{B \to B'}$ do lado direito da matriz do Passo 3.

Esse procedimento é capturado no diagrama seguinte.

$$[\text{base nova} \mid \text{base velha}] \xrightarrow{\text{operações com linhas}} [I \mid \text{transição da velha à nova}] \tag{14}$$

▶ EXEMPLO 3 De novo o Exemplo 1

No Exemplo 1, consideramos as bases $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e $B = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ de R^2, em que

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1), \quad \mathbf{u}'_1 = (1, 1), \quad \mathbf{u}'_2 = (2, 1)$$

(a) Use a Fórmula (14) para encontrar a matriz de transição de B' para B.

(b) Use a Fórmula (14) para encontrar a matriz de transição de B para B'.

Solução (a) Aqui B' é a base velha e B é a base nova, portanto,

$$[\text{base nova} \mid \text{base velha}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Como o lado esquerdo já é a matriz identidade, não precisamos reduzir. Vemos claramente que a matriz de transição é

$$P_{B' \to B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

que está de acordo com o resultado no Exemplo 1.

Solução (b) Aqui B é a base velha e B' é a base nova, portanto,

$$[\text{base nova} \mid \text{base velha}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Reduzindo essa matriz até tornar o lado esquerdo a identidade, obtemos (verifique)

$$[I \mid \text{transição da velha para a nova}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

de modo que a matriz de transição é

$$P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

que também está de acordo com o resultado no Exemplo 1. ◀

Transição para a base canônica em R^n

Note que, na parte (a) do último exemplo, os vetores coluna da matriz que faz a transição da base B' para a base canônica foram exatamente os vetores de B' escritos em forma de colunas. Isso ilustra o seguinte resultado geral.

TEOREMA 4.6.2 *Sejam $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ uma base qualquer do espaço vetorial R^n e $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ a base canônica de R^n. Se os vetores dessas bases forem escritos em forma de colunas, então*

$$P_{B'\to S} = [\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{u}_n] \tag{15}$$

Segue desse teorema que se

$$A = [\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{u}_n]$$

é uma matriz $n \times n$ invertível *qualquer*, então A pode ser vista como a matriz de transição da base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de R^n para a base canônica de R^n. Assim, por exemplo, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

cuja invertibilidade foi mostrada no Exemplo 4 da Seção 1.5, é a matriz de transição da base

$$\mathbf{u}_1 = (1, 2, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (2, 5, 0), \quad \mathbf{u}_3 = (3, 3, 8)$$

para a base

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$$

Revisão de conceitos

- Aplicação de coordenadas
- Problema da mudança de base
- Matriz de transição

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar diretamente os vetores de coordenadas em relação a uma base dada.
- Encontrar a matriz de transição de uma base para outra.
- Usar a matriz de transição para calcular vetores de coordenadas.

Conjunto de exercícios 4.6

1. Em cada parte, encontre o vetor de coordenadas de **w** em relação à base $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de R^2.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$; $\mathbf{w} = (3, -7)$

(b) $\mathbf{u}_1 = (2, -4)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 8)$; $\mathbf{w} = (1, 1)$

(c) $\mathbf{u}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 2)$; $\mathbf{w} = (a, b)$

2. Em cada parte, encontre o vetor de coordenadas de **v** em relação à base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de R^3.

(a) $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$; $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 3)$

(b) $\mathbf{v} = (5, -12, 3)$; $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (-4, 5, 6)$, $\mathbf{v}_3 = (7, -8, 9)$

3. Em cada parte, encontre o vetor de coordenadas de **p** em relação à base $S = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ de P_2.

(a) $\mathbf{p} = 4 - 3x + x^2$; $\mathbf{p}_1 = 1$, $\mathbf{p}_2 = x$, $\mathbf{p}_3 = x^2$

(b) $\mathbf{p} = 2 - x + x^2$; $\mathbf{p}_1 = 1 + x$, $\mathbf{p}_2 = 1 + x^2$, $\mathbf{p}_3 = x + x^2$

4. Encontre o vetor de coordenadas de A em relação à base $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ de M_{22}.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Considere os vetores de coordenadas

$$[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{q}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad [B]_S = \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre **w** se S for a base no Exercício 2(a).

(b) Encontre **q** se S for a base no Exercício 3(a).

(c) Encontre B se S for a base no Exercício 4.

6. Considere as bases $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ de R^2, em que

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre a matriz de transição de B' para B.

(b) Encontre a matriz de transição de B para B'.

(c) Calcule o vetor de coordenadas $[\mathbf{w}]_B$, em que

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

e use (10) para calcular $[\mathbf{w}]_{B'}$.

(d) Confira seu trabalho calculando $[\mathbf{w}]_{B'}$ diretamente.

7. Repita as orientações do Exercício 6 com o mesmo vetor **w**, mas com

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

8. Considere as bases $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ e $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ de R^3, em que

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre a matriz de transição de B para B'.

(b) Calcule o vetor de coordenadas $[\mathbf{w}]_B$, em que

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

e use (12) para calcular $[\mathbf{w}]_{B'}$.

(c) Confira seu trabalho calculando $[\mathbf{w}]_{B'}$ diretamente.

9. Repita as orientações do Exercício 8 com o mesmo vetor **w**, mas com

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

10. Considere as bases $B = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$ e $B' = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$ de P_1, em que

$$\mathbf{p}_1 = 6 + 3x, \quad \mathbf{p}_2 = 10 + 2x, \quad \mathbf{q}_1 = 2, \quad \mathbf{q}_2 = 3 + 2x$$

(a) Encontre a matriz de transição de B' para B.

(b) Encontre a matriz de transição de B para B'.

(c) Calcule o vetor de coordenadas $[\mathbf{p}]_B$, em que $\mathbf{p} = -4 + x$, e use (12) para calcular $[\mathbf{p}]_{B'}$.

(d) Confira seu trabalho calculando $[\mathbf{p}]_{B'}$ diretamente.

11. Seja V o espaço gerado por $\mathbf{f}_1 = \text{sen}\, x$ e $\mathbf{f}_2 = \cos x$.

(a) Mostre que $\mathbf{g}_1 = 2\,\text{sen}\, x + \cos x$ e $\mathbf{g}_2 = 3\cos x$ formam uma base de V.

(b) Encontre a matriz de transição de $B' = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ para $B = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$.

(c) Encontre a matriz de transição de B para B'.

(d) Calcule o vetor de coordenadas $[\mathbf{h}]_B$, em que $\mathbf{h} = 2\,\text{sen}\, x - 5\cos x$, e use (12) para calcular $[\mathbf{h}]_{B'}$.

(e) Confira seu trabalho calculando $[\mathbf{h}]_{B'}$ diretamente.

12. Sejam S a base canônica de R^2 e $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ a base dada por $\mathbf{v}_1 = (2, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (-3, 4)$.

(a) Encontre a matriz de transição $P_{B\to S}$ por inspeção.

(b) Use a Fórmula (14) para encontrar a matriz de transição $P_{S\to S}$.

(c) Confirme que $P_{B\to S}$ e $P_{S\to B}$ são inversas uma da outra.

(d) Seja $\mathbf{w} = (5, -3)$. Encontre $[\mathbf{w}]_B$ e então use a Fórmula (11) para calcular $[\mathbf{w}]_S$.

(e) Seja $\mathbf{w} = (3, -5)$. Encontre $[\mathbf{w}]_S$ e então use a Fórmula (12) para calcular $[\mathbf{w}]_B$.

13. Sejam S a base canônica de R^3 e $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ a base dada por $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 5, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 8)$.

(a) Encontre a matriz de transição $P_{B\to S}$ por inspeção.

(b) Use a Fórmula (14) para encontrar a matriz de transição $P_{S\to B}$.

(c) Confirme que $P_{B\to S}$ e $P_{S\to B}$ são inversas uma da outra.

(d) Seja $\mathbf{w} = (5, -3, 1)$. Encontre $[\mathbf{w}]_B$ e então use a Fórmula (11) para calcular $[\mathbf{w}]_S$.

(e) Seja $\mathbf{w} = (3, -5, 0)$. Encontre $[\mathbf{w}]_S$ e então use a Fórmula (12) para calcular $[\mathbf{w}]_B$.

14. Sejam $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ as bases de R^2 dadas por $\mathbf{u}_1 = (2, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (4, -1)$, $\mathbf{v}_1 = (1, 3)$ e $\mathbf{v}_2 = (-1, -1)$.

(a) Use a Fórmula (14) para encontrar a matriz de transição $P_{B_2\to B_1}$.

(b) Use a Fórmula (14) para encontrar a matriz de transição $P_{B_1\to B_2}$.

(c) Confirme que $P_{B_2\to B_1}$ e $P_{B_1\to B_2}$ são inversas uma da outra.

(d) Seja $\mathbf{w} = (5, -3)$. Encontre $[\mathbf{w}]_{B_1}$ e use a matriz $P_{B_1\to B_2}$ para calcular $[\mathbf{w}]_{B_2}$ a partir de $[\mathbf{w}]_{B_1}$.

(e) Seja $\mathbf{w} = (3, -5)$. Encontre $[\mathbf{w}]_{B_2}$ e use a matriz $P_{B_2\to B_1}$ para calcular $[\mathbf{w}]_{B_2}$ a partir de $[\mathbf{w}]_{B_1}$.

15. Sejam $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ as bases de R^2 dadas por $\mathbf{u}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 3)$, $\mathbf{v}_1 = (1, 3)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 4)$

(a) Use a Fórmula (14) para encontrar a matriz de transição $P_{B_2\to B_1}$.

(b) Use a Fórmula (14) para encontrar a matriz de transição $P_{B_1 \to B_2}$.

(c) Confirme que $P_{B_2 \to B_1}$ e $P_{B_1 \to B_2}$ são inversas uma da outra.

(d) Seja $\mathbf{w} = (0, 1)$. Encontre $[\mathbf{w}]_{B_1}$ e use a matriz $P_{B_1 \to B_2}$ para calcular $[\mathbf{w}]_{B_2}$ a partir de $[\mathbf{w}]_{B_1}$.

(e) Seja $\mathbf{w} = (2, 5)$. Encontre $[\mathbf{w}]_{B_2}$ e use a matriz $P_{B_2 \to B_1}$ para calcular $[\mathbf{w}]_{B_1}$ a partir de $[\mathbf{w}]_{B_2}$.

16. Sejam $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ e $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ as bases de R^3 dadas por $\mathbf{u}_1 = (-3, 0, -3)$, $\mathbf{u}_2 = (-3, 2, -1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 6, -1)$, $\mathbf{v}_1 = (-6, -6, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, -6, 4)$ e $\mathbf{v}_3 = (-2, -3, 7)$.

(a) Encontre a matriz de transição $P_{B_1 \to B_2}$.

(b) Seja $\mathbf{w} = (-5, 8, -5)$. Encontre $[\mathbf{w}]_{B_1}$ e então use a matriz de transição obtida na parte (a) para calcular $[\mathbf{w}]_{B_2}$ por multiplicação matricial.

(c) Confira seu resultado na parte (b) calculando $[\mathbf{w}]_{B_2}$ diretamente.

17. Repita as orientações do Exercício 16 com o mesmo vetor $\mathbf{w}$, mas com $\mathbf{u}_1 = (2, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (2, -1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_1 = (3, 1, -5)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, -3)$ e $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 2)$.

18. Sejam $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ a base canônica de R^2 e a base que resulta quando os vetores de S são refletidos em torno da reta $y = x$.

(a) Encontre a matriz de transição $P_{B \to S}$.

(b) Seja $P = P_{B \to S}$ e mostre que $P^T = P_{S \to B}$.

19. Sejam $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ a base canônica de R^2 e a base que resulta quando os vetores de S são refletidos em torno da reta que faz um ângulo θ com o eixo x positivo.

(a) Encontre a matriz de transição $P_{B \to S}$.

(b) Seja $P = P_{B \to S}$ e mostre que $P^T = P_{S \to B}$.

20. Se B_1, B_2 e B_3 forem bases de R^2 e se

$$P_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_{B_2 \to B_3} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

então $P_{B_3 \to B_1} =$ ____________.

21. Se P for a matriz de transição de uma base B' para uma base B e Q a matriz de transição de B para uma base C, qual é a matriz de transição de B' para C? Qual é a matriz de transição de C para B'?

22. Para escrever o vetor de coordenadas de um vetor, é necessário especificar um ordenamento dos vetores das bases. Se P for a matriz de transição de uma base B' para uma base B, qual é o efeito sobre P de uma inversão da ordem dos vetores de B de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ para $\mathbf{v}_n, \ldots, \mathbf{v}_1$? Qual é o efeito sobre P se invertermos a ordem dos vetores de B' e de B?

23. Considere a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) P é a matriz de transição de qual base B para a base canônica $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de R^3?

(b) P é a matriz de transição da base canônica $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ para qual base B de R^3?

24. A matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz de transição de qual base B para a base R^3 de $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$?

25. Seja B uma base de R^n. Prove que os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ formam um conjunto linearmente independente de R^n se, e só se, os vetores $[\mathbf{v}_1]_B, [\mathbf{v}_2]_B, \ldots, [\mathbf{v}_k]_B$ formam um conjunto linearmente independente de R^n.

26. Seja B uma base de R^n. Prove que os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ geram R^n se, e só se, os vetores $[\mathbf{v}_1]_B, [\mathbf{v}_2]_B, \ldots, [\mathbf{v}_k]_B$ geram R^n.

27. Se valer $[\mathbf{w}]_B = \mathbf{w}$ com qualquer vetor $\mathbf{w}$ de R^n, o que pode ser dito sobre a base B?

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(f), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se B_1 e B_2 forem bases de um espaço vetorial V, então existe uma matriz de transição de B_1 para B_2.

(b) Matrizes de transição são invertíveis.

(c) Se B for uma base do espaço vetorial R^n, então $P_{B \to B}$ é a matriz identidade.

(d) Se $P_{B_1 \to B_2}$ for uma matriz diagonal, então cada vetor em B_2 é um múltiplo escalar de algum vetor em B_1.

(e) Se cada vetor em B_2 for um múltiplo escalar de algum vetor em B_1, então $P_{B_1 \to B_2}$ é uma matriz diagonal.

(f) Se A for uma matriz quadrada, então $A = P_{B_1 \to B_2}$, usando certas bases B_1 e B_2 de R^n.

4.7 Espaço linha, espaço coluna e espaço nulo

Nesta seção, estudamos alguns espaços vetoriais importantes associados com matrizes. Aprofundaremos o entendimento das relações entre as soluções de um sistema linear e as propriedades de sua matriz de coeficientes.

Espaço linha, espaço coluna e espaço nulo

Lembre que podemos escrever vetores com parênteses e vírgulas ou em forma matricial como vetores linha ou vetores coluna. Nesta seção, utilizamos essas duas últimas formas.

DEFINIÇÃO 1 Para uma matriz $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

os vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}] \\ \mathbf{r}_2 &= [a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}] \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_m &= [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}] \end{aligned}$$

em R^n formados pelas linhas de A são denominados ***vetores linha*** de A, e os vetores

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

em R^m formados pelas colunas de A são denominados ***vetores coluna*** de A.

► **EXEMPLO 1 Vetores linha coluna de uma matriz 2 × 3**

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Os vetores linha de A são

$$\mathbf{r}_1 = [2 \quad 1 \quad 0] \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2 = [3 \quad -1 \quad 4]$$

e os vetores coluna de A são

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad ◄$$

A próxima definição caracteriza três espaços vetoriais importantes associados com uma matriz.

DEFINIÇÃO 2 Se A for uma matriz $m \times n$, então o subespaço de R^n gerado pelos vetores linha de A é denominado ***espaço linha*** de A, e o subespaço de R^m gerado pelos vetores coluna de A é denominado ***espaço coluna*** de A. O espaço solução do sistema homogêneo de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que é um subespaço de R^n, é denominado ***espaço nulo*** de A.

Nesta seção e na próxima, iremos nos ocupar de duas questões gerais.

Questão 1. Quais relações existem entre as soluções de um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e o espaço linha, o espaço coluna e o espaço nulo da matriz de coeficientes A?

Questão 2. Quais relações existem entre o espaço linha, o espaço coluna e o espaço nulo de uma matriz?

Começando com a primeira questão, suponha que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Segue da Fórmula (10) da Seção 1.3 que se $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ denotam os vetores coluna de A, então o produto $A\mathbf{x}$ pode ser expresso como uma combinação linear desses vetores com coeficientes de $\mathbf{x}$, ou seja,

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n \tag{1}$$

Assim, um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de m equações em n incógnitas pode ser escrito como

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n = \mathbf{b} \tag{2}$$

do que podemos concluir que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente se, e só se, $\mathbf{b}$ pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores coluna de A. Isso fornece o seguinte teorema.

TEOREMA 4.7.1 *Um sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de equações lineares é consistente se, e só se, $\mathbf{b}$ está no espaço coluna de A.*

▶ EXEMPLO 2 Um vetor b no espaço coluna de *A*

Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ o sistema linear

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Mostre que $\mathbf{b}$ está no espaço coluna de A expressando $\mathbf{b}$ como uma combinação linear dos vetores coluna de A.

Solução Resolvendo o sistema por eliminação gaussiana, obtemos (verifique)

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3$$

Disso e da Fórmula (2) segue que

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} \quad ◀$$

Pelo Teorema 3.4.4, sabemos que a solução geral de um sistema linear consistente $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser obtida somando qualquer solução específica desse sistema com a solução geral do sistema linear homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ correspondente. Lembrando que o espaço

nulo de A é igual ao espaço solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, podemos reescrever aquele teorema neste formato.

TEOREMA 4.7.2 *Se $\mathbf{x}_0$ denotar uma solução qualquer de um sistema linear consistente $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ for uma base do espaço nulo de A, então cada solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser expressa na forma*

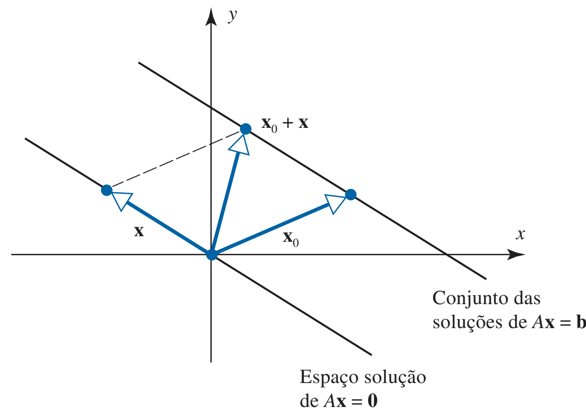
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \tag{3}$$

Reciprocamente, com qualquer escolha dos escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$, o vetor $\mathbf{x}$ dessa fórmula é uma solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

A Equação (3) dá uma fórmula para a ***solução geral*** de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. O vetor $\mathbf{x}_0$ nessa fórmula é denominado ***solução particular*** de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, e a parte restante da fórmula é denominada ***solução geral*** de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Em palavras, podemos reescrever essa fórmula como segue.

A solução geral de um sistema linear consistente pode ser expressa como a soma de uma solução particular daquele sistema com a solução geral do sistema homogêneo correspondente.

O conjunto das soluções de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser visto geometricamente como a translação por $\mathbf{x}_0$ do espaço solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (Figura 4.7.1).



▶ **Figura 4.7.1**

▶ EXEMPLO 3 Solução geral de um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Na subseção final da Seção 3.4, comparamos as soluções dos sistemas lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

e deduzimos que a solução geral **x** do sistema não homogêneo e a solução geral $\mathbf{x}_h$ do sistema homogêneo correspondente (quando escrita como vetor coluna) estão relacionadas por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3r - 4s - 2t \\ r \\ -2s \\ s \\ t \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_0} + \underbrace{r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_h}$$ ◀

Pela observação que segue o Exemplo 4 da Seção 4.5, sabemos que os vetores em $\mathbf{x}_h$ formam uma base do espaço solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Bases dos espaços linha, coluna e nulo

Iniciamos o desenvolvimento de operações elementares com linhas com o propósito de resolver sistemas lineares, e nosso trabalho mostrou que efetuar uma operação elementar com as linhas de uma matriz aumentada não altera o conjunto de soluções do sistema linear correspondente. Segue que aplicar uma operação elementar com as linhas de A não muda o conjunto de soluções do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ correspondente ou, dito de outra forma, não altera o espaço nulo de A. Assim, temos o teorema seguinte.

TEOREMA 4.7.3 *As operações elementares com linhas não alteram o espaço nulo de uma matriz.*

O resultado que acompanha o Teorema 4.7.3 é o próximo teorema, cuja prova fica para os exercícios.

TEOREMA 4.7.4 *As operações elementares com linhas não alteram o espaço linha de uma matriz.*

Os Teoremas 4.7.3 e 4.7.4 podem levar o leitor a acreditar *erroneamente* que as operações elementares com linhas não afetam o espaço coluna de uma matriz. Para ver por que isso *não é* verdade, compare a matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz B pode ser obtida de A somando -2 vezes a primeira linha à segunda. Contudo, essa operação mudou o espaço coluna de A, pois esse espaço coluna consiste nos múltiplos escalares de

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

enquanto o espaço coluna de B consiste nos múltiplos escalares de

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e os dois espaços são diferentes.

▶ EXEMPLO 4 Encontrando uma base do espaço nulo de uma matriz

Encontre uma base do espaço nulo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

Solução O espaço nulo de A é o espaço solução do sistema linear homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ que, conforme vimos no Exemplo 3, tem a base

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ◀

Observação Note que os vetores da base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ no último exemplo são os vetores que obtemos quando tomamos sucessivamente um dos parâmetros da solução geral igual a 1 e os demais iguais a 0.

O próximo teorema torna possível encontrar, apenas por inspeção, bases para os espaços linha e coluna de uma matriz em forma escalonada.

TEOREMA 4.7.5 *Se uma matriz R está em forma escalonada por linhas, então os vetores linha com os pivôs (ou seja, os vetores linha não nulos) formam uma base do espaço linha de R, e os vetores coluna com os pivôs vetores linha formam uma base do espaço coluna de R.*

A prova envolve um pouco mais do que uma análise das posições das entradas 0 e 1 de R. Omitimos os detalhes.

▶ EXEMPLO 5 Bases dos espaços linha e coluna

A matriz

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

está em forma escalonada por linhas. Pelo Teorema 4.7.5, os vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= [1 \quad -2 \quad 5 \quad 0 \quad 3] \\ \mathbf{r}_2 &= [0 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad 0] \\ \mathbf{r}_3 &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \end{aligned}$$

formam uma base do espaço linha de R e os vetores

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

formam uma base do espaço coluna de R.

▶ EXEMPLO 6 Bases de um espaço linha com redução por linhas

Encontre uma base do espaço linha da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Solução Como operações elementares com linhas não alteram o espaço linha de uma matriz, podemos encontrar uma base do espaço linha de A encontrando uma base do espaço linha de qualquer forma escalonada por linhas de A. Reduzindo A à forma escalonada por linhas, obtemos (verifique)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pelo Teorema 4.7.5, os vetores linha não nulos de R formam uma base do espaço linha de R e, portanto, formam uma base do espaço linha de A. Esses vetores de base são

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= [1 \quad -3 \quad 4 \quad -2 \quad 5 \quad 4] \\ \mathbf{r}_2 &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad -2 \quad -6] \\ \mathbf{r}_3 &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 5] \end{aligned}$$ ◀

O problema de encontrar uma base do espaço coluna da matriz A no Exemplo 6 foi complicado pelo fato de que uma operação elementar com linhas pode alterar o espaço coluna. Contudo, a boa notícia é que *as operações elementares com linhas não alteram as relações de dependência linear entre os vetores coluna*. Para tornar isso mais preciso, suponha que $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ sejam vetores coluna linearmente dependentes de A, de modo que existam escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$ não todos nulos e tais que

$$c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_k\mathbf{w}_k = 0 \tag{4}$$

Efetuando uma operação elementar com as linhas de A, esses vetores serão alterados em novos vetores coluna $\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \ldots, \mathbf{w}'_k$. À primeira vista, poderia parecer possível que os vetores transformados poderiam ser linearmente independentes. Contudo, isso não ocorre, pois pode ser provado que esses novos vetores coluna serão linearmente dependentes e, de fato, relacionados por uma equação

$$c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_k\mathbf{w}_k = \mathbf{0}$$

que tem exatamente os mesmos coeficientes de (4). O fato de as operações elementares preservarem a independência linear entre vetores coluna decorre do fato de essas operações serem reversíveis (por quê?). O próximo teorema resume todos esses resultados.

TEOREMA 4.7.6 *Sejam A e B matrizes equivalentes por linhas.*

(*a*) *Um conjunto qualquer de vetores coluna de A é linearmente independente se, e só se, o conjunto de vetores coluna correspondente de B é linearmente independente.*

(*b*) *Um conjunto qualquer de vetores coluna de A forma uma base do espaço coluna de A se, e só se, o conjunto de vetores coluna correspondente de B forma uma base do espaço coluna de B.*

▶ EXEMPLO 7 Base de um espaço coluna com redução por linhas

Encontre uma base do espaço coluna da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Solução Observamos no Exemplo 6 que a matriz

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma forma escalonada por linhas de A. Lembrando que A e R podem ter espaços coluna distintos, não podemos encontrar uma base do espaço coluna de A diretamente a partir dos vetores coluna de R. Contudo, segue do Teorema 4.7.6*b* que se encontrarmos um conjunto de vetores coluna de R que formem uma base do espaço coluna de R, então os vetores coluna de A *correspondentes* formarão uma base do espaço coluna de A.

Como as primeira, terceira e quinta colunas de R contêm os pivôs dos vetores linha, temos que os vetores

$$\mathbf{c}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}'_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}'_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

formam uma base do espaço coluna de R. Assim, os vetores coluna de A correspondentes, a saber,

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

formam uma base do espaço coluna de A. ◀

Até aqui, focamos nosso estudo em métodos para encontrar bases associadas a matrizes. Esses métodos podem ser facilmente adaptados ao problema mais geral de encontrar uma base do espaço gerado por um conjunto de vetores em R^n.

▶ EXEMPLO 8 Base de um espaço vetorial usando operações com linhas

Encontre uma base do subespaço de R^5 gerado pelos vetores

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 0, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (2, -5, -3, -2, 6),$$
$$\mathbf{v}_3 = (0, 5, 15, 10, 0), \quad \mathbf{v}_4 = (2, 6, 18, 8, 6)$$

Solução O espaço gerado por esses vetores é o espaço linha da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Reduzindo essa matriz a uma forma escalonada por linhas, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os vetores linha não nulos nessa matriz são

$$\mathbf{w}_1 = (1, -2, 0, 0, 3), \quad \mathbf{w}_2 = (0, 1, 3, 2, 0), \quad \mathbf{w}_3 = (0, 0, 1, 1, 0)$$

Esses vetores formam uma base do espaço linha e, consequentemente, formam uma base do subespaço de R^5 gerado por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$. ◀

Bases formadas com vetores linha e coluna de uma matriz

Em todos os nossos exemplos considerados até aqui, procuramos bases sem considerar restrições particulares impostas sobre os vetores individuais na base. Agora atacamos o problema de encontrar uma base do espaço linha de uma matriz A constituída inteiramente de vetores linha de A e uma base do espaço coluna de A constituída inteiramente de vetores coluna de A.

Refletindo sobre o que fizemos anteriormente, vemos que o procedimento usado no Exemplo 7 produziu, de fato, uma base do espaço coluna de A constituída de vetores coluna de A, ao passo que o procedimento usado no Exemplo 6 produziu uma base do espaço linha de A, mas aquela base não consistia em vetores linha de A. O próximo exemplo mostra como adaptar o procedimento do Exemplo 7 para encontrar uma base do espaço linha de uma matriz que seja formada por seus vetores linha.

▶ EXEMPLO 9 Uma base do espaço linha de uma matriz

Encontre uma base do espaço linha de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

consistindo totalmente em vetores linha de A.

Solução Vamos transpor A e, com isso, converter o espaço linha de A no espaço coluna de A^T; em seguida, usaremos o método do Exemplo 7 para encontrar uma base do espaço

coluna de A^T e, finalmente, vamos transpor de novo para converter os vetores coluna de volta para vetores linha. Transpondo A, obtemos

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 15 & 18 \\ 0 & -2 & 10 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Reduzindo essa matriz a uma forma escalonada por linhas, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As primeira, segunda e quarta colunas contêm pivôs, de modo que os vetores coluna de A^T correspondentes formam uma base do espaço coluna de A^T, a saber,

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 18 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Transpondo de novo e ajustando a notação de acordo, obtemos os vetores

$$\mathbf{r}_1 = [1 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad 3], \quad \mathbf{r}_2 = [2 \quad -5 \quad -3 \quad -2 \quad 6],$$

e

$$\mathbf{r}_4 = [2 \quad 6 \quad 18 \quad 8 \quad 6]$$

que formam uma base do espaço linha de A. ◄

Em seguida, veremos um exemplo que adapta os métodos desenvolvidos acima para resolver o problema geral em R^n que segue.

Problema Dado um conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de vetores em R^n, encontre um subconjunto desses vetores que forme uma base de ger(S) e expresse os vetores que não estejam na base como combinações lineares dos vetores da base.

► EXEMPLO 10 Bases e combinações lineares

(a) Encontre um subconjunto dos vetores

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (2, -5, -3, 6),$$
$$\mathbf{v}_3 = (0, 1, 3, 0), \quad \mathbf{v}_4 = (2, -1, 4, -7), \quad \mathbf{v}_5 = (5, -8, 1, 2)$$

que forma uma base para o espaço gerado por esses vetores.

(b) Expresse cada vetor não da base como uma combinação linear dos vetores da base.

Solução (*a*) Começamos construindo uma matriz que tem $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_5$ como vetores coluna, como segue.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix} \tag{5}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_5 \end{matrix}$$

A primeira parte de nosso problema pode ser resolvida encontrando uma base do espaço coluna dessa matriz. Reduzindo a matriz a uma forma escalonada *reduzida* por linhas e denotando os vetores coluna da matriz resultante por $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$, $\mathbf{w}_4$ e $\mathbf{w}_5$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 & \mathbf{w}_4 & \mathbf{w}_5 \end{matrix}$$

Os pivôs ocorrem nas colunas 1, 2 e 4 e, portanto, pelo Teorema 4.7.5,

$$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4\}$$

é uma base do espaço coluna de (6) e, consequentemente,

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$$

é uma base do espaço coluna de (5).

Solução (*b*) Começamos expressando $\mathbf{w}_3$ e $\mathbf{w}_5$ como combinações lineares dos vetores $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_4$ da base. A maneira mais simples de fazer isso é expressar $\mathbf{w}_3$ e $\mathbf{w}_5$ em termos dos vetores da base com os menores índices. Assim, expressaremos $\mathbf{w}_3$ como combinação linear de $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, e $\mathbf{w}_5$ como combinação linear de $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{w}_4$. Inspecionando (6), essas combinações lineares são

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_3 &= 2\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{w}_5 &= \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_4 \end{aligned}$$

denominadas ***equações de dependência***. As relações correspondentes em (5) são

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_5 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 \end{aligned} \quad ◀$$

A seguir, apresentamos um resumo dos passos que seguimos no último exemplo para resolver o problema proposto.

Base de ger(s)

Passo 1. Formamos a matriz A com os vetores em $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ como vetores coluna.

Passo 2. Reduzimos a matriz A a uma forma escalonada reduzida por linhas R.

Passo 3. Denotamos os vetores coluna de R por $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$.

Passo 4. Identificamos as colunas de R com os pivôs. Os vetores coluna de A correspondentes formam uma base de ger(S).

Isso completa a primeira parte do problema.

Passo 5. Obtemos um conjunto de equações de dependência expressando cada vetor coluna de R que não tem pivô como uma combinação linear de vetores coluna precedentes que contenham pivôs.

Passo 6. Substituímos os vetores coluna de R que aparecem nas equações de dependência pelos vetores coluna de A correspondentes.

Isso completa a segunda parte do problema.

Revisão de conceitos

- Vetores linha
- Vetores coluna
- Espaço linha
- Espaço coluna
- Espaço nulo
- Solução geral
- Solução particular
- Relações entre sistemas lineares e espaços linha, coluna e nulos
- Relações entre os espaços linha, coluna e nulo de uma matriz
- Equações de dependência

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se um dado vetor está no espaço coluna de uma matriz.
- Encontrar uma base do espaço nulo de uma matriz.
- Encontrar uma base do espaço linha de uma matriz.
- Encontrar uma base do espaço coluna de uma matriz.
- Encontrar uma base do espaço gerado por um conjunto de vetores em R^n.

Conjunto de exercícios 4.7

1. Identifique os vetores linha e os vetores coluna da matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Em cada parte, expresse o produto $A\mathbf{x}$ como uma combinação linear dos vetores coluna de A.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -3 & 6 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$

3. Em cada parte, determine se $\mathbf{b}$ está no espaço coluna de A e, se estiver, expresse $\mathbf{b}$ como combinação linear dos vetores coluna de A.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

4. Suponha que $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = -3$ seja uma solução de um sistema linear não homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e que o conjunto solução do sistema homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ seja dado pelas fórmulas

$$x_1 = -3r + 4s, \quad x_2 = r - s, \quad x_3 = r, \quad x_4 = s$$

(a) Encontre a forma vetorial da solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) Encontre a forma vetorial da solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

5. Em cada parte, encontre a forma vetorial da solução geral do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dado e depois use o resultado obtido para encontrar a forma vetorial da solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(a) $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 1 \\ 2x_1 - 6x_2 &= 2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 \quad\quad + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 6x_4 &= -3 \end{aligned}$

(d)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 4 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 4x_1 - 7x_2 \quad\quad - 5x_4 &= -5 \end{aligned}$$

6. Em cada parte, encontre uma base do espaço nulo de A.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -6 & 0 & 6 & 5 \\ -2 & 9 & 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

7. Em cada parte é dada uma matriz em forma escalonada por linhas. Por inspeção, encontre bases dos espaço linha e coluna de A.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. Para as matrizes do Exercício 6, encontre uma base do espaço linha de A reduzindo a matriz à forma escalonada por linhas.

9. Em cada parte, encontre uma base do espaço linha e uma base do espaço coluna da matriz.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. Para as matrizes do Exercício 6, encontre uma base do espaço linha de A consistindo totalmente em vetores linha de A.

11. Em cada parte, encontre uma base do subespaço de R^4 gerado pelos vetores dados.

(a) $(1, 1, -4, -3), (2, 0, 2, -2), (2, -1, 3, 2)$

(b) $(-1, 1, -2, 0), (3, 3, 6, 0), (9, 0, 0, 3)$

(c) $(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (-2, 0, 2, 2), (0, -3, 0, 3)$

12. Encontre um subconjunto dos vetores dados que forma uma base do espaço gerado pelos vetores; em seguida, expresse cada vetor que não está na base como uma combinação linear dos vetores da base.

(a) $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-3, 3, 7, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 3, 9, 3)$, $\mathbf{v}_4 = (-5, 3, 5, -1)$

(b) $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -4, 0, 6)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_4 = (0, -1, 2, 3)$

(c) $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 5, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 3, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (4, -5, 9, 4)$, $\mathbf{v}_4 = (0, 4, 2, -3)$, $\mathbf{v}_5 = (-7, 18, 2, -8)$

13. Prove que os vetores linha de uma matriz invertível A de tamanho $n \times n$ formam uma base de R^n.

14. Construa uma matriz cujo espaço nulo consista em todas as combinações lineares dos vetores

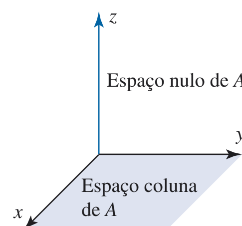
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

15. (a) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mostre que, em relação a um sistema de coordenadas retangulares xyz no espaço tridimensional, o espaço nulo de A consiste em todos os pontos no eixo z, e que o espaço coluna consiste em todos os pontos no plano xy (ver figura).

(b) Encontre uma matriz 3×3 cujo espaço nulo seja o eixo x e cujo espaço coluna seja o plano yz.



◀ **Figura Ex-15**

16. Encontre uma matriz 3×3 cujo espaço nulo seja

(a) um ponto. (b) uma reta. (c) um plano.

17. (a) Encontre todas as matrizes 2×2 cujo espaço nulo seja a reta $3x - 5y = 0$.

(b) Esboce o espaço nulo das matrizes dadas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

18. A equação $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ pode ser vista como um sistema linear de uma equação em três incógnitas. Expresse a solução geral como uma solução particular mais uma solução geral do sistema homogêneo correspondente. [*Sugestão*: escreva os vetores na forma de colunas.]

19. Suponha que A e B sejam matrizes $n \times n$ e que A seja invertível. Invente e prove um teorema que descreve como estão relacionados os espaços linha de AB e de B.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(j), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) O gerado de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ é o espaço coluna da matriz cujos vetores coluna são $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

(b) O espaço coluna de uma matriz A é o conjunto de soluções de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(c) Se R for a forma escalonada reduzida de A, então aqueles vetores coluna de R que contêm pivôs formam uma base do espaço coluna de A.

(d) O conjunto de vetores linha não nulos de uma matriz A é uma base do espaço linha de A.

(e) Se A e B forem matrizes $n \times n$ que têm o mesmo espaço linha, então A e B têm o mesmo espaço coluna.

(f) Se E for uma matriz elementar $m \times m$ e A uma matriz $m \times n$, então o espaço nulo de EA é igual ao espaço nulo de A.

(g) Se E for uma matriz elementar $m \times m$ e A uma matriz $m \times n$, então o espaço linha de EA é igual ao espaço linha de A.

(h) Se E for uma matriz elementar $m \times m$ e A uma matriz $m \times n$, então o espaço coluna de EA é igual ao espaço coluna de A.

(i) O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é inconsistente se, e só se, $\mathbf{b}$ não está no espaço coluna de A.

(j) Existem uma matriz invertível A e uma matriz singular B tais que os espaços linha de A e B são iguais.

4.8 Posto, nulidade e os espaços matriciais fundamentais

Na seção anterior, investigamos as relações entre um sistema de equações lineares e os espaços linha, coluna e nulo de sua matriz de coeficientes. Nesta seção, tratamos das dimensões desses espaços. Os resultados que obteremos nos fornecerão uma visão aprofundada das relações entre um sistema linear e sua matriz de coeficientes.

Os espaços linha e coluna dimensões iguais

Nos Exemplos 6 e 7 da Seção 4.7, vimos que ambos os espaços linha e coluna da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

têm três vetores de base e, portanto, ambos são tridimensionais. O fato de esses espaços terem a mesma dimensão não é acidental, mas sim uma consequência do teorema seguinte.

TEOREMA 4.8.1 *Os espaços linha e coluna de uma matriz têm a mesma dimensão.*

Prova Seja R uma forma escalonada de uma matriz A. Segue dos Teoremas 4.7.4 e 4.7.6*b* que

$$\dim(\text{espaço linha de } A) = \dim(\text{espaço linha de } R)$$
$$\dim(\text{espaço coluna de } A) = \dim(\text{espaço coluna de } R)$$

de modo que basta mostrar que os espaços linha e coluna de R têm a mesma dimensão. Ocorre que a dimensão do espaço linha de R é o número de linhas não nulas e, pelo Teorema 4.7.5, a dimensão do espaço coluna de R é o número de pivôs. Como esses dois números são iguais, os espaços linha e coluna têm a mesma dimensão. ◀

Posto e nulidade

As dimensões dos espaços linha, coluna e nulo de uma matriz são números tão importantes que há uma notação e terminologia associadas.

A prova do Teorema 4.8.1 mostra que o posto de A pode ser interpretado como o número de pivôs de qualquer forma escalonada de A.

DEFINIÇÃO 1 A dimensão comum do espaço linha e do espaço coluna de uma matriz A é denominada ***posto*** de A e denotada por pos(A). A dimensão do espaço nulo de A é denominada ***nulidade*** de A e denotada por nul(A).

▶ EXEMPLO 1 Posto e nulidade de uma matriz 4 × 6

Encontre o posto e a nulidade da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Solução A forma escalonada reduzida por linhas de A é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(verifique). Como essa matriz tem dois pivôs, seus espaços linha e coluna são bidimensionais e pos(A) = 2. Para encontrar a nulidade de A, devemos encontrar a dimensão do espaço solução do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Esse sistema pode ser resolvido reduzindo sua matriz aumentada à forma escalonada reduzida por linhas. A matriz resultante será idêntica a (1), exceto que terá uma última coluna adicional de zeros e, portanto, o sistema de equações correspondente será

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_3 - 28x_4 - 37x_5 + 13x_6 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 - 12x_4 - 16x_5 + 5x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo essas equações nas variáveis líderes, obtemos

$$\begin{aligned} x_1 &= 4x_3 + 28x_4 + 37x_5 - 13x_6 \\ x_2 &= 2x_3 + 12x_4 + 16x_5 - 5x_6 \end{aligned} \tag{2}$$

do que obtemos a solução geral

$$\begin{aligned} x_1 &= 4r + 28s + 37t - 13u \\ x_2 &= 2r + 12s + 16t - 5u \\ x_3 &= r \\ x_4 &= s \\ x_5 &= t \\ x_6 &= u \end{aligned}$$

ou em formato de vetor coluna,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 37 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -13 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Como os quatro vetores do lado direito de (3) formam uma base do espaço solução, temos $\text{nul}(A) = 4$.

▶ EXEMPLO 2 Valor máximo do posto

Qual é o valor máximo possível para o posto de uma matriz A de tamanho $m \times n$ que não é quadrada?

Solução Como os vetores linha de A estão em R^n e os vetores coluna, em R^m, o espaço linha de A tem, no máximo, dimensão n, e o espaço coluna tem, no máximo, dimensão m. Como o posto de A é a dimensão comum dos espaços linha e coluna, segue que o posto é, no máximo, o menor dos dois números m e n. Isso pode ser denotado por

$$\text{pos}(A) \leq \min(m, n)$$

em que $\min(m, n)$ é o mínimo entre m e n. ◀

O teorema seguinte estabelece uma relação importante entre o posto e a nulidade de uma matriz.

TEOREMA 4.8.2 O teorema da dimensão para matrizes

Se A for uma matriz com n colunas, então

$$\text{pos}(A) + \text{nul}(A) = n \tag{4}$$

Prova Como A tem n colunas, o sistema linear homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem n incógnitas (variáveis). Essas variáveis entram em duas categorias: as líderes e as livres. Assim,

$$[\text{número de variáveis líderes}] + [\text{número de variáveis livres}] = n$$

Ocorre que o número de variáveis líderes é igual ao número de pivôs na forma escalonada reduzida por linhas de A, que é o posto de A, e o número de variáveis livres é igual ao número de parâmetros na solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que é a nulidade de A. Assim, obtemos a Fórmula (4). ◀

▶ EXEMPLO 3 A soma do posto e a nulidade

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

tem 6 colunas, portanto,

$$\text{pos}(A) + \text{nul}(A) = 6$$

Isso é consistente com o Exemplo 1, onde mostramos que

$$\text{pos}(A) = 2 \text{ e } \text{nul}(A) = 4 \quad ◀$$

O teorema seguinte, que resume os resultados que já obtivemos, interpreta posto e nulidade em termos de sistemas lineares homogêneos.

TEOREMA 4.8.3 *Se A for uma matriz $m \times n$, então*

(*a*) *pos*(A) = *número de variáveis líderes na solução geral de* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(*b*) *nul*(A) = *número de parâmetros na solução geral de* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

▶ EXEMPLO 4 O número de parâmetros numa solução geral

Encontre o número de parâmetros na solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se A for uma matriz 5×7 de posto 3.

Solução Por (4),

$$\text{nul}(A) = n - \text{pos}(A) = 7 - 3 = 4$$

Assim, há quatro parâmetros. ◀

Teorema da equivalência

No Teorema 2.3.8, listamos sete resultados equivalentes à invertibilidade de uma matriz quadrada A. Agora estamos em condições de juntar mais oito resultados àquela lista para obter um único teorema que resume a maioria dos tópicos que estudamos até aqui.

TEOREMA 4.8.4 Afirmações equivalentes

Se A for uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes.

(*a*) *A é invertível.*

(*b*) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *tem somente a solução trivial.*

(*c*) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é* I_n.

(*d*) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*

(*e*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *é consistente com cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho* $n \times 1$.

(*f*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tem exatamente uma solução com cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho* $n \times 1$.

(*g*) $\det(A) \neq 0$.

(*h*) *Os vetores coluna de A são linearmente independentes.*

(*i*) *Os vetores linha de A são linearmente independentes.*

(*j*) *Os vetores coluna de A geram* R^n.

(*k*) *Os vetores linha de A geram* R^n.

(*l*) *Os vetores coluna de A formam uma base de* R^n.

(*m*) *Os vetores linha de A formam uma base de* R^n.

(*n*) *A tem posto n.*

(*o*) *A tem nulidade* 0.

Prova A equivalência de (h) até (m) segue do Teorema 4.5.4 (omitimos os detalhes). Para completar a prova, mostraremos que (b), (n) e (o) são equivalentes provando a sequência de implicações $(b) \Rightarrow (o) \Rightarrow (n) \Rightarrow (b)$.

(b) ⇒ (o) Se $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial, então não há parâmetros naquela solução e, portanto, $\text{nul}(A) = 0$, pelo Teorema 4.8.3*b*.

(o) ⇒ (n) Teorema 4.8.2.

(n) ⇒ (b) Se A tem posto n, então o Teorema 4.8.3*a* implica que há n variáveis líderes (portanto, não há variáveis livres) na solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. A única possibilidade que resta é solução trivial. ◀

Sistemas sobredeterminados e subdeterminados

Em muitas aplicações, a equação num sistema linear corresponde a restrições físicas ou condições que devem ser satisfeitas. Em geral, os sistemas mais desejáveis são aqueles que têm o mesmo número de restrições e de incógnitas, pois esses, muitas vezes, têm uma solução única. Infelizmente, nem sempre é possível fazer coincidir o número de restrições e o de incógnitas, de modo que os cientistas muitas vezes se deparam com sistemas lineares que têm mais restrições do que incógnitas, denominados ***sistemas sobredeterminados***, ou com menos restrições do que incógnitas, denominados ***sistemas subdeterminados***. Os dois teoremas seguintes nos ajudam a analisar sistemas sobre e subdeterminados.

Na Engenharia e em outras aplicações, a ocorrência de um sistema linear sobredeterminado ou subdeterminado muitas vezes sinaliza que uma ou mais variáveis foram omitidas na formulação do problema ou que foram incluídas variáveis irrelevantes. Muitas vezes, isso leva a algum tipo de resultado físico indesejável.

TEOREMA 4.8.5 *Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for um sistema linear consistente de m equações em n incógnitas e se A tiver posto r, então a solução geral do sistema contém $n - r$ parâmetros.*

Prova Segue do Teorema 4.7.2 que o número de parâmetros é igual à nulidade de A que, pelo Teorema 4.8.2, é igual a $n - r$. ◀

TEOREMA 4.8.6 *Seja A uma matriz $n \times n$.*

(a) **(*Caso sobredeterminado*)** *Se $m > n$, então o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é inconsistente com pelo menos um vetor $\mathbf{b}$ em R^n.*

(b) **(*Caso subdeterminado*)** *Se $m < n$, então, dado qualquer vetor $\mathbf{b}$ em R^m, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é inconsistente ou tem uma infinidade de soluções.*

Prova (a) Suponha que $m > n$, caso em que os vetores coluna de A não podem gerar R^m (menos vetores do que a dimensão de R^m). Assim, existe pelo menos um vetor $\mathbf{b}$ em R^m que não está no espaço coluna de A e, para esse $\mathbf{b}$, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é inconsistente, pelo Teorema 4.7.1.

Prova (b) Suponha que $m < n$. Dado qualquer $\mathbf{b}$ em R^n, há duas possibilidades: ou o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente, ou é inconsistente. Se for inconsistente, a prova acaba. Se for consistente, então o Teorema 4.8.5 implica que a solução geral tem $n - r$ parâmetros, onde $r = \text{pos}(A)$. Mas $\text{pos}(A)$ é o menor dentre os números m e n, de modo que

$$n - r = n - m > 0$$

Isso significa que a solução geral tem pelo menos um parâmetro e que, portanto, há uma infinidade de soluções. ◀

▶ EXEMPLO 5 Sistemas sobre e subdeterminados

(a) O que podemos dizer sobre as soluções de um sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sobredeterminado de 7 equações em 5 incógnitas em que o posto de A é $r = 4$?

(b) O que podemos dizer sobre as soluções de um sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ subdeterminado de 5 equações em 7 incógnitas em que o posto de A é $r = 4$?

Solução (a) O sistema é consistente com alguns vetores $\mathbf{b}$ em R^7 e, para cada um desses $\mathbf{b}$, o número de parâmetros na solução geral é $n - r = 5 - 4 = 1$.

Solução (b) O sistema pode ser consistente ou inconsistente, mas se for consistente com o vetor $\mathbf{b}$ em R^5, então a solução geral tem $n - r = 7 - 4 = 3$ parâmetros.

▶ EXEMPLO 6 Um sistema sobredeterminado

O sistema linear

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= b_1 \\ x_1 - x_2 &= b_2 \\ x_1 + x_2 &= b_3 \\ x_1 + 2x_2 &= b_4 \\ x_1 + 3x_2 &= b_5 \end{aligned}$$

é sobredeterminado, portanto, não pode ser consistente com todos os valores possíveis de b_1, b_2, b_3, b_4 e b_5. Podem ser obtidas condições exatas sob as quais esse sistema é consistente resolvendo o sistema linear com eliminação de Gauss-Jordan. Deixamos para o leitor mostrar que a matriz aumentada é equivalente por linhas a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2b_2 - b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - 3b_2 + 2b_1 \\ 0 & 0 & b_4 - 4b_2 + 3b_1 \\ 0 & 0 & b_5 - 5b_2 + 4b_1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Assim, o sistema é consistente se, e só se, b_1, b_2, b_3, b_4 e b_5 satisfazem as condições

$$\begin{aligned} 2b_1 - 3b_2 + b_3 &= 0 \\ 3b_1 - 4b_2 + b_4 &= 0 \\ 4b_1 - 5b_2 + b_5 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema linear homogêneo, obtemos

$$b_1 = 5r - 4s, \quad b_2 = 4r - 3s, \quad b_3 = 2r - s, \quad b_4 = r, \quad b_5 = s$$

com r e s arbitrários. ◀

Observação A matriz de coeficientes do sistema linear do último exemplo tem $n = 2$ colunas e tem posto $r = 2$, porque há duas linhas não nulas em sua forma escalonada reduzida. Isso implica que quando o sistema for consistente, sua solução geral conterá $n - r = 0$ parâmetros, ou seja, a solução será única. Com um pouco de reflexão, o leitor deveria ver que isso ocorre devido a (5).

Os espaços fundamentais de uma matriz

Existem seis espaços vetoriais importantes associados a uma matriz A e sua transposta A^T.

o espaço linha de A o espaço linha de A^T
o espaço coluna de A o espaço coluna de A^T
o espaço nulo de A o espaço nulo de A^T

No entanto, transpor uma matriz converte vetores linha em vetores coluna e vetores coluna em vetores linha, de modo que, exceto por uma diferença de notação, o espaço linha de A^T é igual ao espaço coluna de A, e o espaço coluna de A^T é igual ao espaço linha de A. Assim, dos seis espaços listados, somente são distintos os seguintes.

o espaço linha de A	o espaço coluna de A
o espaço nulo de A	o espaço nulo de A^T

Se A for uma matriz $m \times n$, então os espaços linha e nulo de A são subespaços de R^n, e o espaço coluna de A e o espaço nulo de A^T são subespaços de R^m.

Esses espaços são conhecidos como os ***espaços fundamentais*** de uma matriz A. No final desta seção, discutimos as relações entre esses quatro subespaços.

Enfoquemos rapidamente a matriz A^T. Como os espaços linha e coluna de uma matriz têm a mesma dimensão e como a transposição converte suas colunas em linhas e suas linhas em colunas, o resultado a seguir não deveria ser surpreendente.

TEOREMA 4.8.7 *Se A for uma matriz qualquer, então* $\text{pos}(A) = \text{pos}(A^T)$.

Prova

$$\text{pos}(A) = \text{dim(espaço linha de } A) = \text{dim(espaço coluna de } A^T) = \text{pos}(A^T). \quad \blacktriangleleft$$

Esse resultado tem algumas implicações importantes. Por exemplo, se A for uma matriz $m \times n$, então, aplicando a fórmula (4) à matriz A^T e usando o fato de que essa matriz tem m colunas, temos

$$\text{pos}(A^T) + \text{nul}(A^T) = m$$

que, em virtude do Teorema 4.8.7, pode ser reescrito como

$$\text{pos}(A) + \text{nul}(A^T) = m \tag{6}$$

Essa forma alternativa da Fórmula (4) no Teorema 4.82 torna possível expressar as dimensões dos quatro espaços fundamentais em termos do tamanho e do posto de A. Mais especificamente, se $\text{pos}(A) = r$, então

$$\begin{array}{ll} \dim[\text{lin}(A)] = r & \dim[\text{col}(A)] = r \\ \dim[\text{nul}(A)] = n - r & \dim[\text{nul}(A^T)] = m - r \end{array} \tag{7}$$

As quatro fórmulas em (7) fornecem uma relação *algébrica* entre os tamanhos da matriz e as dimensões de seus espaços fundamentais. Nosso próximo objetivo é encontrar uma relação *geométrica* entre os próprios espaços fundamentais. Para isso, lembre que, no Teorema 3.4.3, vimos que se A for uma matriz $m \times n$, então o espaço nulo de A consiste naqueles vetores ortogonais a cada um dos vetores linha de A. Para desenvolver essa ideia, apresentamos a definição que segue.

DEFINIÇÃO 2 Se W for um subespaço de R^n, então o conjunto de todos os vetores de R^n ortogonais a cada vetor em W é denominado ***complemento ortogonal*** de W e denotado pelo símbolo $W^\perp$.

O teorema seguinte enumera três propriedades básicas dos complementos ortogonais. Omitimos a prova formal porque, adiante, veremos uma versão mais geral deste teorema.

TEOREMA 4.8.8 *Seja W um subespaço de R^n.*

(*a*) *$W^\perp$ é um subespaço de R^n.*

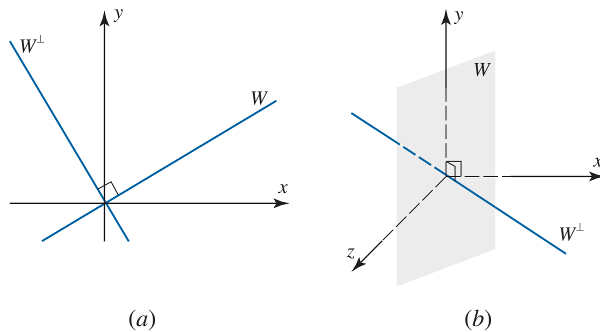
(*b*) *O único vetor comum a W e $W^\perp$ é* $\mathbf{0}$.

(*c*) *O complemento ortogonal de $W^\perp$ é W.*

▶ EXEMPLO 7 Complementos ortogonais

Explique por que $\{\mathbf{0}\}$ e R^n são complementos ortogonais.

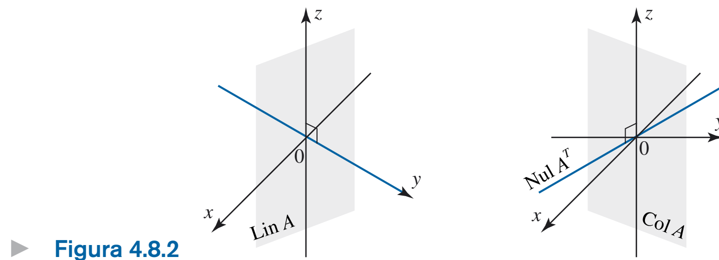
O complemento ortogonal de uma reta W pela origem em R^2 é a reta pela origem que é perpendicular a W (Figura 4.8.1*a*); o complemento ortogonal de um plano W pela origem em R^3 é a reta pela origem que é perpendicular àquele plano (Figura 4.8.1*b*). ◀



▶ **Figura 4.8.1**

Uma relação geométrica entre os espaços fundamentais

O próximo teorema fornece uma relação geométrica entre os espaços fundamentais de uma matriz. Essencialmente, a parte (*a*) é uma reformulação do Teorema 3.4.3 na linguagem de complementos ortogonais, e a parte (*b*), cuja prova deixamos como exercício, segue da parte (*a*). As ideias fundamentais do teorema estão ilustradas na Figura 4.8.2.



▶ **Figura 4.8.2**

TEOREMA 4.8.9 *Seja A uma matriz $m \times n$.*

(*a*) *O espaço nulo de A e o espaço linha de A são complementos ortogonais em R^n.*

(*b*) *O espaço nulo de A^T e o espaço coluna de A são complementos ortogonais em R^m.*

Como nosso resultado final nesta seção, acrescentamos mais duas afirmações ao Teorema 4.8.4. A prova da equivalência dessas duas afirmações às demais é deixada como exercício.

Mais sobre o teorema da equivalência

TEOREMA 4.8.10 Afirmações equivalentes

Se A for uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes.

(*a*) *A é invertível.*

(*b*) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *tem somente a solução trivial.*

(*c*) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.*

(*d*) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*

(*e*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *é consistente com cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho* $n \times 1$.

(*f*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tem exatamente uma solução com cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho* $n \times 1$.

(*g*) $\det(A) \neq 0$.

(*h*) *Os vetores coluna de A são linearmente independentes.*

(*i*) *Os vetores linha de A são linearmente independentes.*

(*j*) *Os vetores coluna de A geram R^n.*

(*k*) *Os vetores linha de A geram R^n.*

(*l*) *Os vetores coluna de A formam uma base de R^n.*

(*m*) *Os vetores linha de A formam uma base de R^n.*

(*n*) *A tem posto n.*

(*o*) *A tem nulidade* 0.

(*p*) *O complemento ortogonal do espaço nulo de A é R^n.*

(*q*) *O complemento ortogonal do espaço linha de A é* $\{\mathbf{0}\}$.

Aplicações do posto

A Internet tem estimulado a pesquisa na busca de métodos eficientes para transmitir grandes quantidades de informação digital ao longo de linhas de comunicação com capacidade de transmissão limitada. A informação digital em geral é armazenada em formato matricial, e muitas técnicas para melhorar a velocidade de transmissão utilizam, de alguma maneira, o posto de uma matriz. O posto tem um papel a desempenhar porque ele mede a "redundância" de uma matriz no seguinte sentido: se A for uma matriz $n \times n$ de posto k, então $n - k$ dos vetores coluna e $m - k$ dos vetores linha podem ser expressos em termos de k vetores coluna ou vetores linha linearmente independentes. A ideia essencial em muitos esquemas de compressão de dados é aproximar o conjunto de dados original por um novo conjunto de dados de posto menor, que contenha praticamente a mesma informação, e então eliminar os vetores redundantes no conjunto novo para aumentar a velocidade de transmissão.

Revisão de conceitos

- Posto
- Nulidade
- Teorema da dimensão
- Sistema sobredeterminado
- Sistema subdeterminado
- Espaços fundamentais de uma matriz
- Relações entre os espaços fundamentais
- Complemento ortogonal
- Caracterizações equivalentes de matrizes invertíveis

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar o posto e a nulidade de uma matriz.
- Encontrar a dimensão do espaço linha de uma matriz.

Conjunto de exercícios 4.8

1. Verifique que pos(A) = pos(A^T).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Em cada parte, encontre o posto e a nulidade da matriz; em seguida, verifique que os valores obtidos satisfazem a Fórmula (4) no teorema da dimensão.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -6 & 0 & 6 & 5 \\ -2 & 9 & 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

3. Em cada parte do Exercício 2, use os resultados obtidos para encontrar, sem resolver o sistema, o número de variáveis líderes e o número de parâmetros na solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

4. Em cada parte, use a informação na tabela para encontrar as dimensões do espaço linha de A, do espaço coluna de A, do espaço nulo de A e do espaço nulo de A^T.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
Tamanho de A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
Posto de A	3	2	1	2	2	0	2

5. Em cada parte, encontre o maior valor possível para o posto de A e o menor valor possível para a nulidade de A.

(a) A é 4×4 (b) A é 3×5 (c) A é 5×3

6. Se A for uma matriz $m \times n$, qual é o maior valor possível para seu posto e o menor valor possível para sua nulidade?

7. Em cada parte, use a informação na tabela para determinar se o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente. Se for, dê o número de parâmetros em sua solução geral.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
Tamanho de A	3×3	3×3	3×3	5×9	5×9	4×4	6×2
Posto de(A)	3	2	1	2	2	0	2
Posto de[A | $\mathbf{b}$]	3	3	1	2	3	0	2

8. Para cada uma das matrizes do Exercício 7, encontre a nulidade de A e determine o número de parâmetros na solução geral do sistema linear homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

9. Quais condições devem ser satisfeitas por b_1, b_2, b_3, b_4 e b_5 e para que o sistema linear sobredeterminado

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= b_1 \\ x_1 - 2x_2 &= b_2 \\ x_1 + x_2 &= b_3 \\ x_1 - 4x_2 &= b_4 \\ x_1 + 5x_2 &= b_5 \end{aligned}$$

seja consistente?

10. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Mostre que A tem posto 2 se, e só se, um ou mais dos determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

é não nulo.

11. Suponha que A seja uma matriz 3×3 cujo espaço nulo é uma reta pela origem no espaço tridimensional. O espaço linha ou o espaço coluna também podem ser uma reta pela origem? Explique.

12. Em cada parte, discuta como o posto de A varia com t.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} t & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & t \end{bmatrix}$

13. Existem valores de r e s com os quais o posto de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

é um ou dois? Se existirem, encontre esses valores.

14. Use o resultado no Exercício 10 para mostrar que o conjunto de pontos (x, y, z) em R^3 com os quais a matriz

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & x & y \end{bmatrix}$$

tem posto 1 é a curva de equações paramétricas $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

15. Prove: se $k \neq 0$, então A e kA têm o mesmo posto.

16. (a) Dê um exemplo de uma matriz 3×3 cujo espaço coluna seja um plano pela origem no espaço tridimensional.

(b) Que espécie de objeto geométrico é o espaço nulo da matriz encontrada no item (a)?

(c) Que espécie de objeto geométrico é o espaço linha da matriz encontrada no item (a)?

17. (a) Se A for uma matriz 3×5, então o número de pivôs na forma escalonada reduzida por linhas de A é, no máximo, _____. Por quê?

(b) Se A for uma matriz 3×5, então o número de parâmetros na solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é, no máximo, _____. Por quê?

(c) Se A for uma matriz 3×5, então o número de pivôs na forma escalonada reduzida por linhas de A é, no máximo, _____. Por quê?

(d) Se A for uma matriz 5×3, então o número de parâmetros na solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é, no máximo, _____. Por quê?

18. (a) Se A for uma matriz 3×5, então o posto de A é, no máximo, _____. Por quê?

(b) Se A for uma matriz 3×5, então a nulidade de A é, no máximo, _____. Por quê?

(c) Se A for uma matriz 3×5, então o posto de A^T é, no máximo, _____. Por quê?

(d) Se A for uma matriz 3×5, então a nulidade de A^T é, no máximo, _____. Por quê?

19. Encontre matrizes A e B tais que $\text{pos}(A) = \text{pos}(B)$, mas $\text{pos}(A^2) \neq \text{pos}(B^2)$.

20. Prove: se uma matriz A não for quadrada, então ou os vetores linha ou os vetores coluna de A são linearmente dependentes.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(j), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Ou os vetores linha ou os vetores coluna de uma matriz quadrada são linearmente independentes.

(b) Uma matriz com os vetores linha linearmente independentes e os vetores coluna linearmente independentes é quadrada.

(c) A nulidade de uma matriz não nula $m \times n$ é, no máximo, m.

(d) Adicionar uma coluna a mais a uma matriz aumenta seu posto por um.

(e) A nulidade de uma matriz quadrada com linhas linearmente independentes é, no mínimo, um.

(f) Se A for uma matriz quadrada e $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for inconsistente com algum vetor $\mathbf{b}$, então a nulidade de A é zero.

(g) Se uma matriz A tiver mais linhas do que colunas, então a dimensão do espaço linha é maior do que a dimensão do espaço coluna.

(h) Se $\text{pos}(A^T) = \text{pos}(A)$, então A é quadrada.

(i) Não existe matriz 3×3 alguma cujos espaços linha e nulo são retas no espaço tridimensional.

(j) Se V for um subespaço de R^n e W for um subespaço de V, então $W^\perp$ é um subespaço de $V^\perp$.

4.9 Transformações matriciais de R^n em R^m

Nesta seção, estudamos funções da forma $\mathbf{w} = F(\mathbf{x})$, em que a variável independente $\mathbf{x}$ é um vetor em R^n, e a variável dependente $\mathbf{w}$ é um vetor em R^m. Vamos nos concentrar numa classe especial dessas funções, denominada "transformações matriciais". Essas transformações são fundamentais no estudo da Álgebra Linear e têm aplicações importantes na Física, nas Engenharias, nas Ciências Sociais e em várias áreas da Matemática.

Funções e transformações

Lembre que uma ***função*** é uma regra que associa a cada elemento de um conjunto A um, e exatamente um, elemento de um conjunto B. Se f associa o elemento b ao elemento a, então escrevemos

$$b = f(a)$$

e dizemos que b é a ***imagem*** de a por f ou que $f(a)$ é o ***valor*** de f em a. O conjunto A é denominado ***domínio*** de f e o conjunto B, ***contradomínio*** de f (Figura 4.9.1). A ***imagem*** de f é o subconjunto do contradomínio consistindo em todas as imagens de pontos no domínio.

O domínio e o contradomínio de muitas funções comuns são conjuntos de números reais, mas, neste texto, estamos interessados em funções cujo domínio e contradomínio são espaços vetoriais.

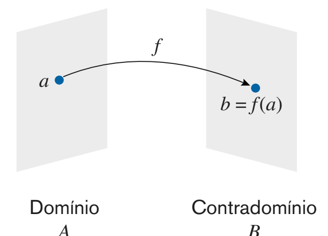


Figura 4.9.1

DEFINIÇÃO 1 Se V e W forem espaços vetoriais e se f for uma função de domínio V e contradomínio W, dizemos que f é uma ***transformação*** de V em W, ou uma ***aplicação*** de V em W, que denotamos por

$$f : V \to \text{W}$$

No caso especial em que $V = W$, também dizermos que uma transformação é um ***operador*** de V.

Nesta seção, tratamos exclusivamente de transformações de R^n em R^m, sendo que as transformações de espaços vetoriais arbitrários serão consideradas em seções posteriores. Para ilustrar uma maneira pela qual podem surgir essas transformações, suponha que $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sejam funções reais de n variáveis, digamos,

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ w_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \quad & \quad\quad \vdots \\ w_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

Essas m equações associam um ponto $(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ único em R^m a cada ponto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em R^n e, assim, definem uma transformação de R^n em R^m. Denotando essa transformação por T, temos $T : R^n \to R^m$ e

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$$

Transformações matriciais

No caso especial em que as equações em (1) forem lineares, elas poderão ser expressas na forma

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ w_1 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad & \quad\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ w_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned} \tag{2}$$

que, então, poderemos escrever em formato matricial como

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

ou, mais concisamente, como

$$\mathbf{w} = A\mathbf{x} \tag{4}$$

Embora possamos ver isso como um sistema linear, vamos interpretar (4) como uma transformação que associa o vetor coluna $\mathbf{x}$ em R^n ao vetor coluna $\mathbf{w}$ em R^m pela multiplicação à esquerda de $\mathbf{x}$ por A, obtendo o que se denomina uma ***transformação matricial*** (ou ***operador matricial*** se $m = n$), que denotamos por $T_A : R^n \to R^m$. Com essa notação, a Equação (4) pode ser expressa por

$$\mathbf{w} = T_A(\mathbf{x}) \tag{5}$$

Dizemos que a transformação matricial T_A é a ***multiplicação por A*** e que a matriz A é a ***matriz canônica*** dessa transformação.

Às vezes, também é conveniente denotar (5) de maneira esquemática por

$$\mathbf{x} \xrightarrow{T_A} \mathbf{w} \tag{6}$$

que lemos "T_A aplica $\mathbf{x}$ em $\mathbf{w}$".

▶ **EXEMPLO 1** **Uma transformação matricial de R^4 em R^3**

A transformação matricial $T: R^4 \to R^3$ definida pelas equações

$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 \\ w_2 &= 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \\ w_3 &= 5x_1 - x_2 + 4x_3 \end{aligned} \tag{7}$$

pode ser expressa em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{8}$$

de modo que a matriz canônica de T é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

A imagem de um ponto (x_1, x_2, x_3, x_4) pode ser calculada diretamente das equações definidoras (7) ou de (8) por multiplicação matricial. Por exemplo, se

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -3, 0, 2)$$

então, substituindo em (7), temos $w_1 = 1$, $w_2 = 3$, $w_3 = 8$ (verifique) ou, alternativamente, por (8),

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$ ◀

Algumas questões de notação

Às vezes, queremos denotar uma transformação matricial sem dar algum nome à própria matriz. Nesses casos, denotamos a matriz canônica de $T: R^n \to R^m$ pelo símbolo $[T]$. Assim, a equação

$$T(x) = [T]\mathbf{x} \tag{9}$$

simplesmente afirma que T é a transformação matricial de matriz canônica $[T]$ e que a imagem de $\mathbf{x}$ por essa transformação é o produto da matriz $[T]$ pelo vetor coluna $\mathbf{x}$.

Propriedades de transformações matriciais

O próximo teorema lista quatro propriedades básicas de transformações matriciais que decorrem de propriedades da multiplicação matricial.

TEOREMA 4.9.1 *Dada qualquer matriz A, a transformação matricial $T_A: R^n \to R^m$ tem as propriedades seguintes, com quaisquer vetores* **u** *e* **v** *em R^n e escalar k.*

(*a*) $T_A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

(*b*) $T_A(k\mathbf{v}) = kT_A(\mathbf{v})$ **[Homogeneidade]**

(*c*) $T_A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T_A(\mathbf{u}) + T_A(\mathbf{v})$ **[Aditividade]**

(*d*) $T_A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T_A(\mathbf{u}) - T_A(\mathbf{v})$

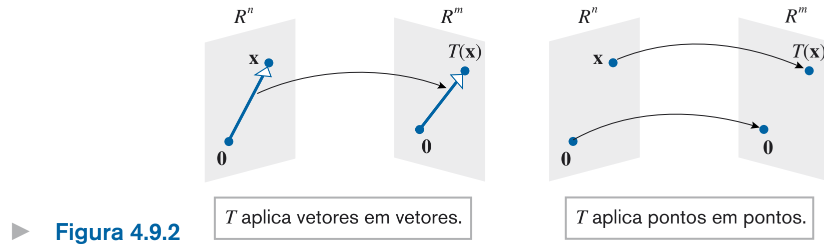
Prova As quatro partes são reformulações das propriedades conhecidas da multiplicação matricial, a saber,

$$A\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad A(k\mathbf{v}) = k(A\mathbf{v}), \quad A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}, \quad A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = A\mathbf{u} - A\mathbf{v} \quad ◄$$

Segue do Teorema 4.9.1 que uma transformação matricial faz correspoder a combinações lineares de vetores em R^n as combinações lineares correspondentes em R^m, no sentido de que

$$T_A(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r) = k_1T_A(\mathbf{v}_1) + k_2T_A(\mathbf{v}_2) + \cdots + k_rT_A(\mathbf{v}_r) \tag{10}$$

Dependendo da interpretação de ênuplas como vetores ou pontos, o efeito geométrico de uma transformação matricial $T_A : R^n \to R^m$ é o de aplicar cada vetor (ponto) em R^n num vetor (ponto) em R^m (Figura 4.9.2).



► **Figura 4.9.2**

O próximo teorema afirma que se duas transformações matriciais de R^n em R^m tiverem a mesma imagem em cada ponto de R^n, então as próprias matrizes devem ser iguais.

TEOREMA 4.9.2 *Se $T_A : R^n \to R^m$ e $T_B : R^n \to R^m$ forem transformações matriciais e se $T_A(\mathbf{x}) = T_B(\mathbf{x})$ com qualquer vetor* **x** *em R^n, então $A = B$.*

Prova Dizer que $T_A(\mathbf{x}) = T_B(\mathbf{x})$ com qualquer vetor em R^n é o mesmo que dizer que

$$A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$$

com cada vetor **x** em R^n. Isso vale, em particular, se **x** for um dos vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ da base canônica em R^n, ou seja,

$$A\mathbf{e}_j = B\mathbf{e}_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

Como cada entrada de $\mathbf{e}_j$ é nula, exceto a j-ésima, que é 1, segue do Teorema 1.3.1 que $A\mathbf{e}_j$ é a j-ésima coluna de A e $B\mathbf{e}_j$ é a j-ésima coluna de B. Assim, segue de (11) que as colunas correspondentes de A e B são iguais, ou seja, que $A = B$. ◄

► EXEMPLO 2 As transformações nulas

Se 0 for a matriz zero $m \times n$, então

$$T_0(\mathbf{x}) = 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

de modo que a multiplicação por zero transforma cada vetor em R^n no vetor nulo de R^m. Dizemos que T_0 é a **transformação nula**, ou **transformação zero**, de R^n em R^m.

▶ **EXEMPLO 3 Os operadores identidade**

Se I for a matriz identidade $n \times n$, então

$$T_I(\mathbf{x}) = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

de modo que a multiplicação por I transforma cada vetor em R^n em si mesmo. Dizemos que T_I é o **operador identidade** de R^n. ◀

Um procedimento para encontrar matrizes canônicas

Existe uma maneira de encontrar a matriz canônica de uma transformação matricial de R^n em R^m, considerando o efeito dessa transformação nos vetores da base canônica de R^n. Para explicar essa ideia, suponha que A seja desconhecida e que

$$\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2, \ldots, \quad \mathbf{e}_n$$

sejam os vetores da base canônica de R^n. Suponha, também, que as imagens desses vetores pela transformação T_A sejam

$$T_A(\mathbf{e}_1) = A\mathbf{e}_1, \quad T_A(\mathbf{e}_2) = A\mathbf{e}_2, \ldots, \quad T_A(\mathbf{e}_n) = A\mathbf{e}_n$$

Segue do Teorema 1.3.1 que $A\mathbf{e}_j$ é uma combinação linear das colunas de A, em que os coeficientes sucessivos são as entradas de $\mathbf{e}_j$. Como todas as entradas de $\mathbf{e}_j$ são nulas, exceto a j-ésima, segue que o produto $A\mathbf{e}_j$ é exatamente a j-ésima coluna da matriz A. Assim,

$$A = [T_A(\mathbf{e}_1) \mid T_A(\mathbf{e}_2) \mid \cdots \mid T_A(\mathbf{e}_n)] \tag{12}$$

Resumindo, temos o seguinte procedimento para encontrar a matriz canônica de uma transformação matricial.

Encontrando a matriz canônica de uma transformação matricial

Passo 1. Encontre as imagens dos vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ da base canônica de R^n em formato de coluna.

Passo 2. Construa a matriz que tem as imagens obtidas no Passo 1 como colunas sucessivas. Essa é a matriz canônica da transformação.

Operadores de reflexão

Entre os operadores matriciais mais importantes de R^2 e R^3, estão os que aplicam cada ponto na sua imagem simétrica em relação a alguma reta ou plano fixados, que são denominados ***operadores de reflexão***, ou ***reflexões***, simplesmente. A Tabela 1 mostra as matrizes canônicas das reflexões nos eixos coordenados em R^2, e a Tabela 2 mostra as matrizes canônicas das reflexões nos planos coordenados de R^3. Em cada caso, a matriz canônica foi obtida encontrando as imagens dos vetores da base canônica, convertendo essas imagens em vetores coluna e, então, usando esses vetores coluna como colunas sucessivas da matriz canônica.

Operadores de projeção

Os operadores matriciais de R^2 e R^3 que aplicam cada ponto em sua projeção ortogonal numa reta ou plano fixados são denominados ***operadores de projeção*** (ou, mais precisamente, de ***operadores de projeção ortogonal***) ou, simplesmente, ***projeções*** (***ortogonais***). A Tabela 3 mostra as matrizes canônicas das projeções ortogonais sobre os eixos coordenados em R^2, e a Tabela 4 mostra as matrizes canônicas das projeções ortogonais sobre os planos coordenados em R^3.

Tabela 1

Operador	Ilustração	Imagens de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$	Matriz canônica
Reflexão no eixo y $T(x, y) = (-x, y)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (-1, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, 1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflexão no eixo x $T(x, y) = (x, -y)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (1, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, -1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflexão na reta $y = x$ $T(x, y) = (x, y)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (0, 1)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (1, 0)$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Tabela 2

Operador	Ilustração	Imagens de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$	Matriz canônica
Reflexão no plano xy $T(x, y, z) = (x, y, -z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, -1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflexão no plano xz $T(x, y, z) = (x, -y, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, -1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflexão na plano yz $T(x, y, z) = (-x, y, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tabela 3

Operador	Ilustração	Imagens de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$	Matriz canônica
Projeção ortogonal sobre o eixo x $T(x, y) = (x, 0)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (1, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Projeção ortogonal sobre o eixo y $T(x, y) = (0, y)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, 1)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tabela 4

Operador	Ilustração	Imagens de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$	Matriz canônica
Projeção ortogonal sobre o plano xy $T(x, y, z) = (x, y, 0)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Projeção ortogonal sobre o plano xz $T(x, y, z) = (x, 0, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Projeção ortogonal sobre o plano yz $T(x, y, z) = (0, y, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Operadores de rotação

Os operadores matriciais de R^2 e R^3 que movem pontos ao longo de arcos circulares são denominados ***operadores de rotação*** ou, simplesmente, ***rotações***. Vejamos como é possível encontrar a matriz canônica de uma rotação $T: R^2 \to R^2$ que move os pontos no sentido anti-horário em torno da origem por um ângulo θ (Figura 4.9.3). Conforme ilustrado na Figura 4.9.3, as imagens dos vetores da base canônica são

$$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \quad \text{e} \quad T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$

de modo que a matriz canônica de T é

$$[T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

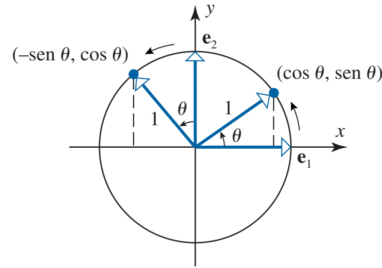


Figura 4.9.3

Mantendo a notação usual, denotamos esse operador por R_θ e dizemos que

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{13}$$

é a ***matriz de rotação*** de R^2. Se $\mathbf{x} = (x, y)$ for um vetor em R^2 e se $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ for sua imagem por essa rotação, então a relação $\mathbf{w} = R_\theta\mathbf{x}$ pode ser dada em termos de componentes por

$$\begin{aligned} w_1 &= x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ w_1 &= x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{aligned} \tag{14}$$

Essas relações são denominadas ***equações de rotação*** em R^2. Essas ideias estão resumidas na Tabela 5.

Tabela 5

Operador	Ilustração	Equações de rotação	Matriz canônica
Rotação pelo ângulo θ	y, (w_1, w_2), **w**, θ, (x, y), **x**, x	$w_1 = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta$ $w_2 = x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

No plano, os ângulos anti-horários são positivos e os ângulos horários são negativos. A matriz de rotação de uma rotação *horária* de $-\theta$ radianos pode ser obtida substituindo θ por $-\theta$ em (13). Simplificando, obtemos

$$R_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

▶ EXEMPLO 4 Um operador de rotação

Encontre a imagem de $\mathbf{x} = (1, 1)$ pela rotação de $\pi/6$ radianos (= 30°) em torno da origem.

Solução Segue de (13) com $\theta = \pi/6$ que

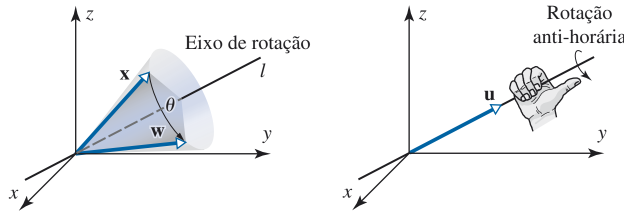
$$R_{\pi/6}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}37 \\ 1{,}37 \end{bmatrix}$$

ou, em notação de vírgulas, $R_{\pi/6}(1, 1) = (0{,}37; 1{,}37)$. ◀

Rotações em R^3

Em geral, descrevemos uma rotação de vetores em R^3 em relação a um raio partindo da origem, denominado ***eixo de rotação***. À medida que um vetor gira em torno do eixo de rotação, ele varre alguma porção de um cone (Figura 4.9.4*a*). O ***ângulo de rotação***, que é medido na base do cone, é descrito como sendo no sentido "horário" ou "anti-horário" em relação a um ponto de vista ao longo do eixo de rotação *olhando para a origem*. Por exemplo, na Figura 4.9.4*a*, o vetor **w** resulta da rotação no sentido anti-horário do vetor **x** em torno do eixo l por um ângulo de θ. Assim como em R^2, os ângulos são *positivos* se gerados por rotações no sentido anti-horário e *negativos* se gerados por rotações no sentido horário.

A maneira mais comum de descrever um eixo de rotação arbitrário é especificando um vetor não nulo **u** com ponto inicial na origem e apontando ao longo do eixo de rotação. O sentido anti-horário para a rotação em torno do eixo pode, então, ser determinado pela "regra da mão direita" (Figura 4.9.4*b*). Se o polegar da mão direita apontar na direção e sentido do vetor **u**, os dedos da mão fechada apontam num sentido anti-horário.



▶ **Figura 4.9.4** (*a*) Ângulo de rotação (*b*) Regra da mão direita

Um ***operador de rotação*** em R^3, ou simplesmente uma ***rotação***, é um operador matricial que gira cada vetor em R^3 em torno de algum eixo de rotação por um ângulo θ fixado. Na Tabela 6, descrevemos as rotações em R^3 cujos eixos de rotação são os eixos coordenados positivos. Para cada uma dessas rotações, um dos componentes permanece inalterado, e a relação entre os dois outros componentes pode ser deduzida da mesma maneira que deduzimos (14). Por exemplo, na rotação em torno do eixo z, os componentes z de **x** e de $\mathbf{w} = T(\mathbf{x})$ são os mesmos, e os componentes x e y estão relacionados como em (14). Isso fornece as equações de rotação mostradas na última linha da Tabela 6.

Tabela 6

Operador	Ilustração	Equações de rotação	Matriz canônica
Rotação anti-horária em torno do eixo x positivo pelo ângulo θ		$w_1 = x$ $w_2 = y\cos\theta - z\,\text{sen}\,\theta$ $w_3 = y\,\text{sen}\,\theta + z\cos\theta$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
Rotação anti-horária em torno do eixo y positivo pelo ângulo θ		$w_1 = x\cos\theta + z\,\text{sen}\,\theta$ $w_2 = y$ $w_3 = -x\,\text{sen}\,\theta + z\cos\theta$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$
Rotação anti-horária em torno do eixo z positivo pelo ângulo θ		$w_1 = x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta$ $w_2 = x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

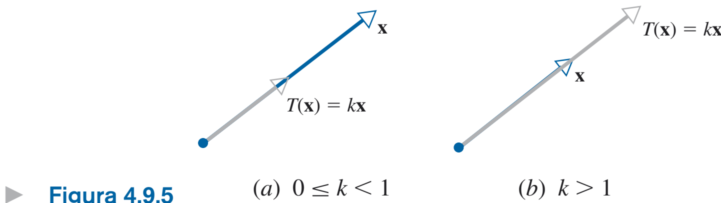
Observamos, para completar, que a matriz canônica de uma rotação anti-horária por um ângulo θ em torno de um eixo em R^3 determinado por um vetor arbitrário $\mathbf{u} = (a, b, c)$, mas *unitário*, com ponto inicial na origem, é

$$\begin{bmatrix} a^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & ab(1-\cos\theta)-c\,\text{sen}\,\theta & ac(1-\cos\theta)+b\,\text{sen}\,\theta \\ ab(1-\cos\theta)+c\,\text{sen}\,\theta & b^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & bc(1-\cos\theta)-a\,\text{sen}\,\theta \\ ac(1-\cos\theta)-b\,\text{sen}\,\theta & bc(1-\cos\theta)+a\,\text{sen}\,\theta & c^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix} \tag{15}$$

A dedução dessa matriz pode ser encontrada no livro intitulado *Principles of Interactive Computer Graphics*, de W. M. Newmann e R. F. Sproull, editado em 1979 pela McGraw--Hill, de Nova York. Pode ser instrutivo para o leitor deduzir os resultados da Tabela 6 como casos especiais desse resultado mais geral.

Dilatações e contrações

Se k for um escalar não negativo, então o operador $T(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$ de R^2 ou R^3 tem o efeito de aumentar ou diminuir o comprimento de cada vetor pelo fator k. Se $0 \leq k < 1$, o operador é denominado ***contração*** de fator k e, se $k > 1$, ***dilatação*** de fator k (Figura 4.9.5). Se $k = 1$, então T é o operador identidade, que pode ser considerado uma contração ou uma dilatação. As Tabelas 7 e 8 ilustram esses operadores.



▶ **Figura 4.9.5**

Tabela 7

Operador	Ilustração $T(x, y) = (kx, ky)$	Efeito na base canônica	Matriz canônica
Contração de fator k em R^2 $(0 \leq k < 1)$	y; $\mathbf{x}$ (x, y); $T(\mathbf{x})$ (kx, ky); x	(0, 1) (1, 0) → (0, k) (k, 0)	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Dilatação de fator k em R^2 $(k > 1)$	y; $T(\mathbf{x})$ (kx, ky); $\mathbf{x}$ (x, y); x	(0, 1) (1, 0) → (0, k) (k, 0)	

Guinada, arfagem e rolagem

Muitas vezes, na Aeronáutica e Astronáutica, a orientação de um avião ou de um ônibus espacial em relação a um sistema de coordenadas xyz é descrita em termos de ângulos denominados ***guinada***, ***arfagem*** e ***rolagem***. Por exemplo, se o plano xy definir a horizontal e um ônibus espacial estiver voando ao longo do eixo y positivo, então a ***guinada*** é o ângulo de rotação do avião em torno do eixo z positivo, a ***arfagem*** é o ângulo de rotação em torno do eixo x positivo, e a ***rolagem*** é o ângulo de rotação em torno do eixo y positivo. Uma combinação de guinada, arfagem e rolagem pode ser obtida com uma única rotação em torno de algum eixo pela origem. Essa é a maneira pela qual um ônibus espacial efetivamente faz seus ajustes de voo, não corrigindo cada rotação separadamente, mas sim calculando um eixo e efetuando uma única rotação em torno desse eixo para obter a orientação correta. Tais manobras rotacionais são utilizadas para alinhar uma antena, apontar a nave em direção a um objeto celeste ou posicionar um compartimento para carga e descarga.

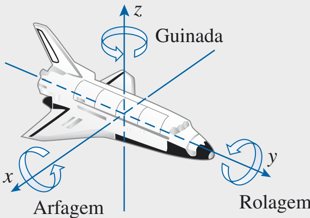


Tabela 8

Operador	Ilustração	Matriz canônica
Contração de fator k em R^3 $(0 \leq k < 1)$		$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$
Dilatação de fator k em R^3 $(k > 1)$		

Numa dilatação ou contração de R^2 ou R^3, todas as coordenadas são multiplicadas pelo fator k. Se somente uma das coordenadas for multiplicada por k, então o operador resultante é denominado ***expansão*** ou ***compressão*** de fator k. Isso é ilustrado na Tabela 9 em R^2. O leitor não deveria encontrar dificuldades para estender esses resultados ao R^3.

Expansões e compressões

Tabela 9

Operador	Ilustração	Efeito na base canônica	Matriz canônica
Compressão de R^2 na direção x de fator k $(0 \leq k < 1)$			$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Expansão de R^2 na direção x de fator k $(k > 1)$			

Operador	Ilustração	Efeito na base canônica	Matriz canônica
Compressão de R^2 na direção y de fator k $(0 \leq k < 1)$			$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Expansão de R^2 na direção y de fator k $(k > 1)$			

Cisalhamentos Um operador matricial da forma $T(x, y) = (x + ky, y)$ translada um ponto (x, y) do plano xy paralelamente ao eixo x por uma quantia ky proporcional à coordenada y do ponto. Esse operador deixa fixados os pontos do eixo x (pois $y = 0$), mas à medida que nos afastamos do eixo x, aumenta a distância transladada. Dizemos que esse operador é um ***cisalhamento de fator k na direção x***. Analogamente, um operador matricial da forma $T(x, y) = (x, y + kx)$ é um ***cisalhamento de fator k na direção y***. A Tabela 10 ilustra a informação básica sobre cisalhamentos em R^2.

Tabela 10

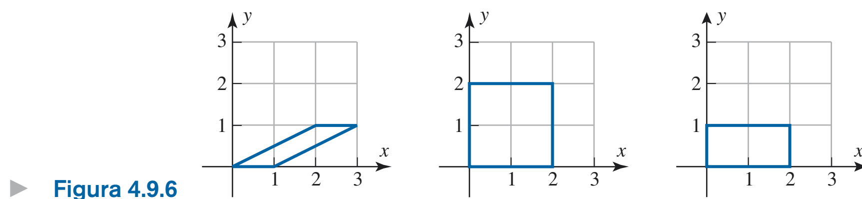
Operador	Efeito na base canônica			Matriz canônica
Cisalhamento de R^2 de fator k na direção x $T(x, y) = (x + ky, y)$	(0, 1) (1, 0)	$(k, 1)$ (1, 0) $(k > 0)$	$(k, 1)$ (1, 0) $(k < 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Cisalhamento de R^2 de fator k na direção y $T(x, y) = (x, y + kx)$	(0, 1) (1, 0)	(0, 1) $(1, k)$ $(k > 0)$	(0, 1) $(1, k)$ $(k < 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

▶ EXEMPLO 5 Alguns operadores matriciais básicos de R^2

Em cada parte, descreva o operador matricial correspondente a A e mostre seu efeito no quadrado unitário.

(a) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solução Comparando os formatos dessas matrizes com os das Tabelas 7, 9 e 10, vemos que a matriz A_1 corresponde a um cisalhamento de fator 2 na direção x, a matriz A_2 corresponde na uma dilatação de fator 2, e A_3 corresponde a uma expansão na direção x de fator 2. Os efeitos desses operadores no quadrado unitário são mostrados na Figura 4.9.6. ◀



▶ **Figura 4.9.6**

OPCIONAL
Projeções ortogonais sobre retas pela origem

Na Tabela 3, listamos as matrizes canônicas das projeções ortogonais sobre os eixos coordenados de R^2. Esses operadores são casos especiais do operador $T: R^2 \to R^2$ mais geral que aplica cada ponto em sua projeção ortogonal sobre uma rela L pela origem que faz um ângulo θ com o eixo x positivo (Figura 4.9.7). No Exemplo 4 da Seção 3.3, usamos

a Fórmula (1) daquela seção para encontrar as projeções ortogonais dos vetores da base canônica de R^2 sobre aquela reta. Em termos matriciais, vimos que essas projeções são

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos^2\theta \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

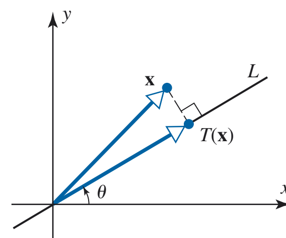


Figura 4.9.7

Assim, a matriz canônica de T é

$$[T] = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta & \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta \\ \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta & \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

Mantendo a notação usual, denotamos esse operador por

$$P_\theta = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta & \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta \\ \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta & \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix} \tag{16}$$

Incluímos duas versões da Fórmula (16) porque ambas são muito usadas. Enquanto a primeira versão envolve somente o ângulo θ, a segunda envolve tanto θ quanto 2θ.

▶ EXEMPLO 6 Projeção ortogonal sobre uma reta pela origem

Use a Fórmula (16) para encontrar a projeção ortogonal do vetor $\mathbf{x} = (1, 5)$ sobre a reta pela origem que faz um ângulo de $\pi/6$ (= 30°) com o eixo x positivo.

Solução Como $\operatorname{sen}(\pi/6) = 1/2$ e $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, segue de (16) que a matriz canônica dessa projeção é

$$P_{\pi/6} = \begin{bmatrix} \cos^2(\pi/6) & \operatorname{sen}(\pi/6)\cos(\pi/6) \\ \operatorname{sen}(\pi/6)\cos(\pi/6) & \operatorname{sen}^2(\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$P_{\pi/6}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3+5\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}+5}{4} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2{,}91 \\ 1{,}68 \end{bmatrix}$$

ou, em notação com vírgulas, $P_{\pi/6}(1, 5) \approx (2{,}91; 1{,}68)$. ◀

Reflexões em retas pela origem

Na Tabela 1, listamos as reflexões pelos eixos coordenados em R^2. Esses operadores são casos especiais do operador $H_\theta : R^2 \to R^2$ mais geral que aplica cada ponto em sua reflexão na reta L pela origem que faz um ângulo θ com o eixo x positivo (Figura 4.9.8). Poderíamos encontrar a matriz canônica de H_θ encontrando as imagens dos vetores da base canônica, mas, em vez disso, vamos aproveitar nosso trabalho com projeções ortogonais e usar a Fórmula (16) com P_θ para encontrar uma fórmula para H_θ.

O leitor pode ver da Figura 4.9.9 que, com qualquer vetor $\mathbf{x}$ em R^n,

$$P_\theta\mathbf{x} - \mathbf{x} = \tfrac{1}{2}(H_\theta\mathbf{x} - \mathbf{x}) \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad H_\theta\mathbf{x} = (2P_\theta - I)\mathbf{x}$$

Assim, segue do Teorema 4.9.2 que

$$H\theta = 2P\theta - I \tag{17}$$

e, portanto, segue de (16) que

$$H_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen}2\theta \\ \operatorname{sen}2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \tag{18}$$

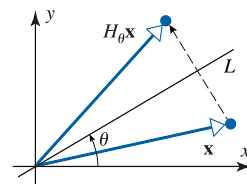


Figura 4.9.8

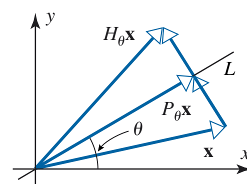


Figura 4.9.9

▶ **EXEMPLO 7 Reflexão numa reta pela origem**

Encontre a reflexão do vetor $\mathbf{x} = (1, 5)$ na reta pela origem que faz um ângulo de $\pi/6$ (= 30°) com o eixo x positivo.

Solução Como $\text{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ e $\cos(\pi/3) = 1/2$, segue de (18) que a matriz canônica deixae como está reflexão é

$$H_{\pi/6} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & \text{sen}(\pi/3) \\ \text{sen}(\pi/3) & -\cos(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$H_{\pi/6}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-5}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4{,}83 \\ -1{,}63 \end{bmatrix}$$

ou, em notação com vírgulas, $H_{\pi/6}(1, 5) \approx (4{,}83; -1{,}63)$. ◀

Observe que as matrizes canônicas nas Tabelas 1 e 3 são casos especiais de (18) e (16).

Revisão de conceitos

- Função
- Imagem
- Valor
- Domínio
- Contradomínio
- Transformação
- Operador
- Transformação matricial
- Operador matricial
- Matriz canônica
- Propriedades de transformações matriciais
- Transformação nula
- Operador identidade
- Reflexão
- Projeção
- Rotação
- Matriz de rotação
- Equações de rotação
- Eixo de rotação no espaço
- Ângulo de rotação no espaço
- Expansão
- Compressão
- Cisalhamento
- Dilatação
- Contração

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar o domínio e o contradomínio de uma transformação e determinar se a transformação é linear.
- Encontrar a matriz canônica de uma transformação matricial.
- Descrever o efeito de um operador matricial na base canônica de R^n.

Conjunto de exercícios 4.9

▶ Nos Exercícios **1–2**, em cada parte, encontre o domínio e o contradomínio da transformação $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. ◀

1. (a) A tem tamanho 3 × 2. (b) A tem tamanho 2 × 3.
(c) A tem tamanho 3 × 3. (d) A tem tamanho 1 × 6.

2. (a) A tem tamanho 4 × 5. (b) A tem tamanho 5 × 4.
(c) A tem tamanho 4 × 4. (d) A tem tamanho 3 × 1.

3. Se $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -x_2, 3x_1)$, então o domínio de T é _____, o contradomínio de T é _____ e a imagem de $\mathbf{x} = (1, -2)$ por T é ______________.

4. Se $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2)$, então o domínio de T é _____, o contradomínio de T é _____ e a imagem de $x = (0, -1, 4)$ por T é ________________.

5. Em cada parte, encontre o domínio e o contradomínio da transformação definida pelas equações e determine se a transformação é linear.

(a) $\begin{aligned} w_1 &= 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ w_2 &= 5x_1 - 8x_2 + x_3 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} w_1 &= 2x_1x_2 - x_2 \\ w_2 &= x_1 + 3x_1x_2 \\ w_3 &= x_1 + x_2 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} w_1 &= 5x_1 - x_2 + x_3 \\ w_2 &= -x_1 + x_2 + 7x_3 \\ w_3 &= 2x_1 - 4x_2 - x_3 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} w_1 &= x_1^2 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \\ w_2 &= 3x_1 - 4x_2 - x_3^2 + x_4 \end{aligned}$

6. Em cada parte, determine se T é uma transformação matricial.

(a) $T(x, y) = (2x, y)$ (b) $T(x, y) = (-y, x)$

(c) $T(x, y) = (2x + y, x - y)$

(d) $T(x, y) = (x^2, y)$ (e) $T(x, y) = (x, y + 1)$

7. Em cada parte, determine se T é uma transformação matricial.

(a) $T(x, y, z) = (0, 0)$ (b) $T(x, y, z) = (1, 1)$

(c) $T(x, y, z) = (3x - 4y, 2x - 5z)$

(d) $T(x, y, z) = (y^2, z)$ (e) $T(x, y, z) = (y - 1, x)$

8. Em cada parte, encontre a matriz canônica da transformação definida pelas equações.

(a) $w_1 = 2x_1 - 3x_2 + x_4$
$w_2 = 3x_1 + 5x_2 - x_4$

(b) $w_1 = 7x_1 + 2x_2 - 8x_3$
$w_2 = \quad - x_2 + 5x_3$
$w_3 = 4x_1 + 7x_2 - x_3$

(c) $w_1 = -x_1 + x_2$
$w_2 = 3x_1 - 2x_2$
$w_2 = 5x_1 - 7x_2$

(d) $w_1 = x_1$
$w_2 = x_1 + x_2$
$w_3 = x_1 + x_2 + x_3$
$w_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

9. Encontre a matriz canônica do operador $T: R^3 \rightarrow R^3$ definido por

$$\begin{aligned} w_1 &= 3x_1 + 5x_2 - x_3 \\ w_2 &= 4x_1 - x_2 + x_3 \\ w_3 &= 3x_1 + 2x_2 - x_3 \end{aligned}$$

e depois calcule $T(-1, 2, 4)$ por substituição direta nas equações e também por multiplicação matricial.

10. Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador T definido pela fórmula.

(a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$

(b) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

(c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)$

(d) $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, 7x_2, -8x_3)$

11. Em cada parte, encontre a matriz canônica da transformação T definida pela fórmula.

(a) $T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$

(b) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4, x_2 + x_3, -x_1)$

(c) $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0, 0)$

(d) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_3, x_2, x_1 - x_3)$

12. Em cada parte, encontre $T(x)$ e expresse a resposta em forma matricial.

(a) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

(b) $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(c) $[T] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

(d) $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

13. Em cada parte, use a matriz canônica de T para encontrar $T(\mathbf{x})$ e depois confira o resultado calculando $T(\mathbf{x})$ diretamente.

(a) $T(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2, x_2)$; $\mathbf{x} = (-1, 4)$

(b) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 + x_3, 0)$; $\mathbf{x} = (2, 1, -3)$

14. Use multiplicação matricial para encontrar a reflexão de $(-1, 2)$

(a) no eixo x

(b) no eixo y

(c) na reta $y = x$

15. Use multiplicação matricial para encontrar a reflexão de $(2, -5, 3)$ no

(a) plano xy

(b) plano xz

(c) plano yz

16. Use multiplicação matricial para encontrar a projeção ortogonal de $(2, -5)$ sobre o

(a) eixo x

(b) eixo y

17. Use multiplicação matricial para encontrar a projeção ortogonal de $(-2, 1, 3)$ sobre o

(a) plano xy

(b) plano xz

(c) plano yz

18. Use multiplicação matricial para encontrar a imagem do vetor $(3, -4)$ se for girado por um ângulo de

(a) $\theta = 30°$. (b) $\theta = -60°$.

(c) $\theta = 45°$. (d) $\theta = 90°$.

19. Use multiplicação matricial para encontrar a imagem do vetor $(-2, 1, 2)$ se for girado por

(a) 30° em torno do eixo x

(b) 45° em torno do eixo y

(c) 90° em torno do eixo z

20. Encontre a matriz canônica do operador que efetua a rotação de um vetor em R^3 por um ângulo de $-60°$ em torno do

(a) eixo x

(b) eixo y

(c) eixo z

21. Use multiplicação matricial para encontrar a imagem do vetor $(-2, 1, 2)$ se for girado por

(a) $-30°$ em torno do eixo x

(b) $-45°$ em torno do eixo y

(c) $-90°$ em torno do eixo z

22. Definimos as ***projeções ortogonais*** de R^3 sobre os eixos x, y e z, respectivamente, por

$$T_1(x, y, z) = (x, 0, 0), \quad T_2(x, y, z) = (0, y, 0), \quad T_3(x, y, z) = (0, 0, z)$$

(a) Mostre que as projeções ortogonais sobre os eixos coordenados são operadores matriciais e encontre suas matrizes canônicas.

(b) Mostre que se $T: R^3 \to R^3$ for uma projeção ortogonal sobre um dos eixos coordenados, então, dado qualquer vetor em R^3, os vetores $T(\mathbf{x})$ e $\mathbf{x} - T(\mathbf{x})$ são ortogonais.

(c) Faça um esboço indicando $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x} - T(\mathbf{x})$ no caso em que T é a projeção ortogonal sobre o eixo x.

23. A partir da Fórmula (15), obtenha as matrizes canônicas das rotações em torno dos eixos x, y e z de R^3.

24. Use a Fórmula (15) para encontrar a matriz canônica de uma rotação de $\pi/2$ radianos em torno do eixo determinado pelo vetor $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$. [*Observação*: a Fórmula (15) exige que o vetor que define o eixo de rotação tenha comprimento 1.]

25. Use a Fórmula (15) para encontrar a matriz canônica de uma rotação de 180° em torno do eixo determinado pelo vetor $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$. [*Observação*: a Fórmula (15) exige que o vetor que define o eixo de rotação tenha comprimento 1.]

26. Pode ser provado que se A for uma matriz 2×2 de vetores coluna ortonormais e com $\det(A) = 1$, então a multiplicação por A é uma rotação por algum ângulo θ. Verifique que

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

satisfaz as condições enunciadas, e encontre o ângulo de rotação.

27. O resultado enunciado no Exercício 26 pode ser estendido ao R^3, isto é, pode ser provado que se A for uma matriz 3×3 de vetores coluna ortonormais e se $\det(A) = 1$, então a multiplicação por A é uma rotação em torno de algum eixo por algum ângulo θ. Use a Fórmula (15) para mostrar que esse ângulo de rotação satisfaz a equação

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{tr}(A) - 1}{2}$$

28. Seja A uma matriz 3×3 (diferente da matriz identidade) que satisfaça as condições enunciadas no Exercício 27. Pode ser mostrado que se $\mathbf{x}$ for um vetor não nulo qualquer em R^3, então o vetor $\mathbf{u} = A\mathbf{x} + A^T\mathbf{x} + [1 - \operatorname{tr}(A)]\mathbf{x}$ determina um eixo de rotação quando $\mathbf{u}$ for posicionado com seu ponto inicial na origem. [Ver o artigo *The Axis of Rotation*: *Analysis*, *Algebra*, *Geometry*, por Dan Kalman, em *Mathematics Magazine*, Vol. 62, Nº 4, outubro de 1989.]

(a) Mostre que a multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

é uma rotação.

(b) Encontre um vetor de comprimento 1 que define um eixo da rotação.

(c) Encontre todas as soluções da equação do Exercício 27 que pertençam ao intervalo $[0, 2\pi]$ e, substituindo essas soluções na fórmula (15), encontre um ângulo de rotação em torno do eixo da parte (b) que resulta da multiplicação pela matriz A da parte (a).

29. Em cada caso, descreva em palavras o efeito geométrico de multiplicar um vetor $\mathbf{x}$ pela matriz A.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

30. Em cada caso, descreva em palavras o efeito geométrico de multiplicar um vetor $\mathbf{x}$ pela matriz A.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

31. Descreva em palavras o efeito geométrico de multiplicar um vetor $\mathbf{x}$ pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta & -2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

32. Se a multiplicação por A gira um vetor $\mathbf{x}$ do plano xy por um ângulo θ, qual é o efeito de multiplicar $\mathbf{x}$ por A^T? Explique seu raciocínio.

33. Seja $\mathbf{x}_0$ um vetor coluna não nulo em R^2 e suponha que $T: R^2 \to R^2$ seja a transformação definida pela fórmula $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0 + R_\theta\mathbf{x}$, em que R_θ é a matriz canônica da rotação de R^2 em torno da origem pelo ângulo θ. Dê uma descrição geométrica dessa transformação. Será uma transformação matricial? Explique.

34. É costume dizer que uma função da forma $f(x) = mx + b$ é uma "função linear" porque o gráfico de $y = mx + b$ é uma reta. f será uma transformação matricial em R?

35. Sejam $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$ uma reta em R^n e $T: R^n \to R^n$ um operador matricial de R^n. Que tipo de objeto geométrico é a imagem dessa reta pelo operador T? Explique seu raciocínio.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(i), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se A for uma matriz 2×3, então o domínio da transformação T_A é R^2.

(b) Se A for uma matriz $m \times n$, então o contradomínio da transformação T_A é R^n.

(c) Se $T: R^n \to R^m$ e $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, então T é uma transformação matricial.

(d) Se $T: R^n \to R^m$ e $T(c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y}) = c_1T(\mathbf{x}) + c_2T(\mathbf{y})$ com quaisquer escalares c_1 e c_2 e quaisquer vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em R^n, então T é uma transformação matricial.

(e) Só existe uma única transformação matricial $T: R^n \to R^m$ tal que $T(-\mathbf{x}) = -T(\mathbf{x})$ com qualquer vetor $\mathbf{x}$ em R^n.

(f) Só existe uma única transformação matricial $T: R^n \to R^m$ tal que $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ com quaisquer vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em R^n.

(g) Se $\mathbf{b}$ for um vetor não nulo em R^n, então $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}$ define um operador matricial de R^n.

(h) A matriz $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ é a matriz canônica de alguma rotação.

(i) As matrizes canônicas das reflexões nos eixos coordenados do espaço bidimensional têm o formato $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$, com $a = \pm 1$.

4.10 Propriedades das transformações matriciais

Nesta seção, discutimos propriedades de transformações matriciais. Mostramos, por exemplo, que se aplicarmos várias transformações matriciais em sucessão, então o mesmo resultado pode ser obtido por uma única transformação matricial apropriadamente escolhida. Também exploramos a relação entre a invertibilidade de uma matriz e as propriedades da transformação correspondente.

Composição de transformações matriciais

Suponha que T_A seja uma transformação matricial de R^n em R^k e T_B uma transformação matricial de R^k em R^m. Se $\mathbf{x}$ for um vetor em R^n, então T_A aplica esse vetor num vetor $T_A(\mathbf{x})$ em R^k, e T_B, por sua vez, aplica esse vetor no vetor $T_B(T_A(\mathbf{x}))$ em R^m. Esse processo cria uma transformação de R^n em R^m que denominamos a ***composição*** ou a ***composta*** de T_B com T_A, que denotamos pelo símbolo

$$T_B \circ T_A$$

que se lê "T_B bola T_A". Conforme ilustrado na Figura 4.10.1, a transformação T_A na fórmula é aplicada antes, ou seja,

$$(T_B \circ T_A)(\mathbf{x}) = T_B(T_A(\mathbf{x})) \tag{1}$$

Essa composição também é uma transformação matricial, pois

$$(T_B \circ T_A)(\mathbf{x}) = T_B(T_A(\mathbf{x})) = B(T_A(\mathbf{x})) = B(A\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x}$$

mostrando que é a multiplicação por BA. Isso pode ser resumido na fórmula

$$T_B \circ T_A = T_{BA} \tag{2}$$

ADVERTÊNCIA Assim como não é verdade, em geral, que

$$AB = BA$$

também não é verdade, em geral, que

$$T_B \circ T_A = T_A \circ T_B$$

Ou seja, *a ordem importa na composição de transformações matriciais.*

As composições podem ser definidas com qualquer sucessão finita de transformações matriciais cujos domínios e contradomínios tenham as dimensões apropriadas. Por exemplo, para estender a Fórmula (2) para três fatores, considere as transformações matriciais

$$T_A : R^n \to R^k, \quad T_B : R^k \to R^l, \quad T_C : R^l \to R^m$$

Definimos a composição $(T_C \circ T_B \circ T_A) : R^n \to R^m$ por

$$(T_C \circ T_B \circ T_A)(\mathbf{x}) = T_C(T_B(T_A(\mathbf{x})))$$

Como antes, pode ser mostrado que essa transformação é matricial, com matriz canônica CBA e que

$$T_C \circ T_B \circ T_A = T_{CBA} \tag{3}$$

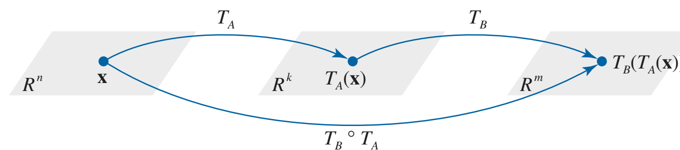


Figura 4.10.1

Como na Fórmula (9) da Seção 4.9, podemos usar colchetes para denotar uma transformação matricial sem referência a uma matriz específica. Assim, por exemplo, a fórmula

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] \tag{4}$$

é uma reformulação da Fórmula (2), afirmando que a matriz canônica da composta é o produto das matrizes canônicas na ordem apropriada. Analogamente,

$$[T_3 \circ T_2 \circ T_1] = [T_3][T_2][T_1] \tag{5}$$

é uma reformulação da Fórmula (3).

▶ EXEMPLO 1 Composição de duas rotações

Sejam $T_1 : R^2 \to R^2$ e $T_2 : R^2 \to R^2$ os operadores matriciais que giram os vetores pelos ângulos θ_1 e θ_2, respectivamente. Assim, o operador

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{x}) = T_2(T_1(\mathbf{x}))$$

primeiro gira $\mathbf{x}$ por um ângulo θ e então gira $T_1(\mathbf{x})$ por um ângulo θ_2. Segue que o efeito líquido de $T_2 \circ T_1$ é girar cada vetor em R^2 por um ângulo $\theta_1 + \theta_2$ (Figura 4.10.2). Assim, as matrizes canônicas desses operadores matriciais são

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, \quad [T_2] = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix},$$

$$[T_2 \circ T_1] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) \\ \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

Essas matrizes deveriam satisfazer (4). Com a ajuda de algumas identidades trigonométricas básicas, podemos confirmar isso como segue.

$$\begin{aligned}
[T_2][T_1] &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 & -(\cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1) \\ \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 + \cos\theta_2\cos\theta_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) \\ \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \\
&= [T_2 \circ T_1]
\end{aligned}$$

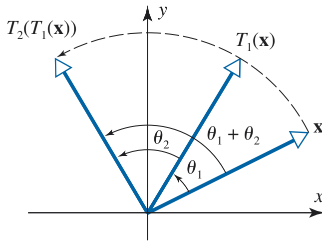
▶ EXEMPLO 2 A composição não é comutativa

Sejam $T_1 : R^2 \to R^2$ a reflexão na reta $y = x$ e $T_2 : R^2 \to R^2$ a projeção ortogonal sobre o eixo y. A Figura 4.10.3 ilustra graficamente que $T_1 \circ T_2$ e $T_2 \circ T_1$ têm efeitos diferentes sobre um vetor $\mathbf{x}$. Essa mesma conclusão pode ser alcançada mostrando que as matrizes canônicas de T_1 e T_2 não comutam.

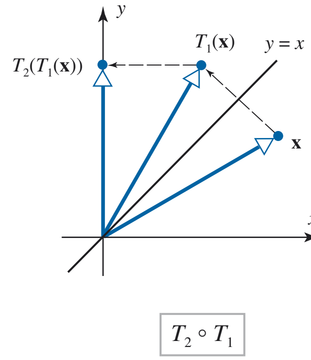
$$[T_1 \circ T_2] = [T_1][T_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

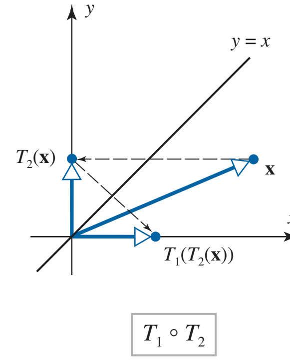
$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que $[T_2 \circ T_1] \neq [T_1 \circ T_2]$.



▲ **Figura 4.10.2**





$T_2 \circ T_1$ $T_1 \circ T_2$

▲ **Figura 4.10.3**

▶ EXEMPLO 3 A composição de duas reflexões

Sejam $T_1 : R^2 \to R^2$ a reflexão no eixo y e $T_2 : R^2 \to R^2$ a reflexão no eixo x. Nesse caso, $T_1 \circ T_2$ e $T_2 \circ T_1$ são idênticas, ambas aplicando cada vetor $\mathbf{x} = (x, y)$ em seu negativo $-\mathbf{x} = (-x, -y)$ (Figura 4.10.4), como segue.

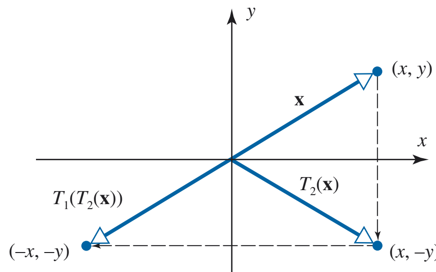
$$(T_1 \circ T_2)(x, y) = T_1(x, -y) = (-x, -y)$$
$$(T_2 \circ T_1)(x, y) = T_2(-x, y) = (-x, -y)$$

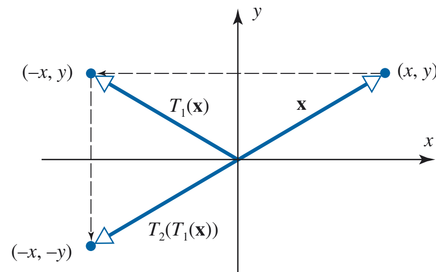
A igualdade de $T_1 \circ T_2$ e $T_2 \circ T_1$ também pode ser deduzida mostrando que as matrizes canônicas de T_1 e T_2 comutam, como segue.

$$[T_1 \circ T_2] = [T_1][T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O operador $T(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ de R^2 ou R^3 é denominado ***reflexão na origem***. Como mostram as contas acima, a matriz canônica desse operador de R^2 é

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$





$T_1 \circ T_2$ $T_2 \circ T_1$

▶ **Figura 4.10.4**

▶ EXEMPLO 4 Composição de três transformações

Encontre a matriz canônica do operador $T : R^3 \to R^3$ que primeiro gira um vetor no sentido anti-horário em torno do eixo z por um ângulo θ, depois reflete o vetor resultante no plano yz e, finalmente, projeta esse vetor ortogonalmente sobre o plano xy.

Solução O operador T pode ser expresso como a composição

$$T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$$

em que T_1 é a rotação em torno do eixo z, T_2 é a reflexão no plano yz, e T_3 é a projeção ortogonal sobre o plano xy. Pelas Tabelas 6, 2 e 4 da Seção 4.9, as matrizes canônicas dessas transformações lineares são

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, segue de (5) que a matriz canônica de T é

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

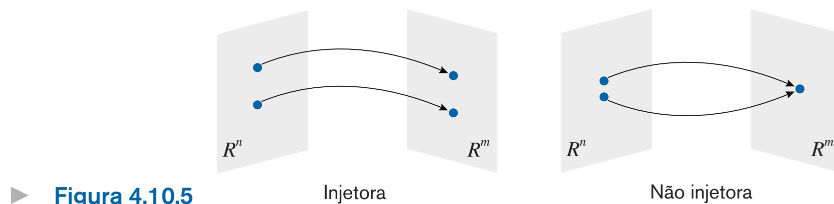
Transformações matriciais injetoras

Nosso próximo objetivo é estabelecer uma relação entre a invertibilidade de uma matriz A e as propriedades da transformação matricial T_A correspondente.

DEFINIÇÃO 1 Dizemos que uma transformação matricial $T_A : R^n \to R^m$ é ***injetora*** se T_A aplica vetores (pontos) distintos em R^n em vetores (pontos) distintos em R^m.

(Ver Figura 4.10.5.) Essa ideia pode ser expressa de várias maneiras. Por exemplo, o leitor deve reconhecer que as afirmações seguintes são simplesmente reformulações da Definição 1.

1. T_A é injetora se para cada vetor $\mathbf{b}$ na imagem de T_A existir exatamente um vetor $\mathbf{x}$ em R^n tal que $T_A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
2. T_A é injetora se a igualdade $T_A(\mathbf{u}) = T_A(\mathbf{v})$ implicar $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.



▶ **Figura 4.10.5**

As rotações de R^2 são injetoras porque vetores distintos que são girados pelo mesmo ângulo têm imagens distintas (Figura 4.10.6). Em contrapartida, a projeção ortogonal de R^3 sobre o plano xy não é injetora porque transforma pontos distintos da mesma reta vertical num mesmo ponto (Figura 4.10.7).

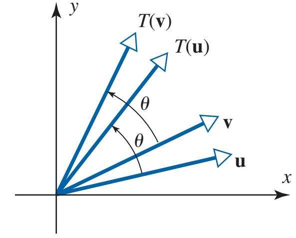
O teorema seguinte estabelece uma relação fundamental entre a invertibilidade de uma matriz e as propriedades da transformação matricial correspondente.

TEOREMA 4.10.1 *Se A for uma matriz $n \times n$ e $T_A : R^n \to R^n$ o operador matricial correspondente, então as afirmações seguintes são equivalentes.*

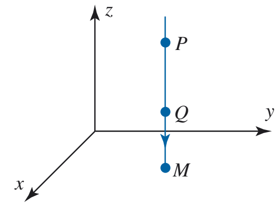
(*a*) *A é invertível.*

(*b*) *A imagem de T_A é R^n.*

(*c*) *T_A é injetor.*



▲ **Figura 4.10.6** Vetores **u** e **v** distintos são girados em vetores $T(\mathbf{u})$ e $T(\mathbf{v})$ distintos.



▲ **Figura 4.10.7** Os pontos distintos *P* e *Q* são aplicados no mesmo ponto *M*.

Prova Vamos estabelecer a sequência de implicações $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$.

(*a*) ⇒ (*b*) Suponha que *A* seja invertível. Pelas partes (*a*) e (*e*) do Teorema 4.8.10, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente com qualquer matriz **b** de tamanho $n \times 1$ em R^n. Isso implica que T_A transforma **x** no vetor arbitrário **b** em R^n, o que por sua vez significa que a imagem de T_A é todo o R^n.

(*b*) ⇒ (*c*) Suponha que a imagem de T_A seja todo o R^n. Isso implica que para cada vetor **b** em R^n existe algum vetor **x** em R^n com o qual $T_A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ e, portanto, que o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente com qualquer vetor **b** em R^n. Pela equivalência das partes (*e*) e (*f*) do Teorema 4.8.10, decorre que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma única solução, com qualquer vetor **b** em R^n. Assim, para cada vetor **b** na imagem de T_A, existe exatamente um vetor **x** em R^n tal que $T_A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

(*c*) ⇒ (*a*) Suponha que o operador T_A seja injetor. Assim, dado um vetor **b** qualquer em T_A, existe um único vetor **x** em R^n tal que $T_A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Deixamos para o leitor completar a prova usando o Exercício 30. ◀

▶ EXEMPLO 5 Propriedades de uma rotação

Conforme indicado na Figura 4.10.6, o operador $T : R^n \to R^n$ que efetua a rotação em R^2 pelo ângulo θ é injetor. Confirme que $[T]$ é invertível, de acordo com o Teorema 4.10.1.

Solução Pela Tabela 5 da Seção 4.9, a matriz canônica de *T* é

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Essa matriz é invertível, pois

$$\det[T] = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \neq 0$$

▶ EXEMPLO 6 Propriedades de uma projeção

Conforme indicado na Figura 4.10.7, o operador $T : R^n \to R^n$ que projeta cada vetor em R^3 ortogonalmente no plano *xy* não é injetor. Confirme que $[T]$ não é invertível, de acordo com o Teorema 4.10.1.

Solução Pela Tabela 4 da Seção 4.9, a matriz canônica de *T* é

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essa matriz não é invertível, pois $\det[T] = 0$. ◀

Inversa de um operador matricial injetor

Se $T_A : R^n \to R^n$ for um operador matricial injetor, então a matriz A é invertível pelo Teorema 4.10.1. O operador matricial

$$T_{A^{-1}} : R^n \to R^n$$

que corresponde a A^{-1} é denominado ***operador inverso*** (ou, simplesmente, ***inverso***) de T_A. Essa terminologia é apropriada, porque T_A e $T_{A^{-1}}$ cancelam um o efeito do outro, no sentido de que se $\mathbf{x}$ for um vetor em R^n, então

$$T_A(T_{A^{-1}}(\mathbf{x})) = AA^{-1}\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$
$$T_{A^{-1}}(T_A(\mathbf{x})) = A^{-1}A\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

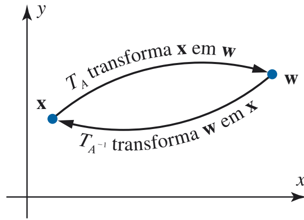


Figura 4.10.8

ou, equivalentemente,

$$T_A \circ T_{A^{-1}} = T_{AA^{-1}} = T_I$$
$$T_{A^{-1}} \circ T_A = T_{A^{-1}A} = T_I$$

De um ponto de vista mais geométrico, se $\mathbf{w}$ for a imagem de $\mathbf{x}$ por T_A, então $T_{A^{-1}}$ transforma $\mathbf{w}$ de volta em $\mathbf{x}$, pois

$$T_{A^{-1}}(\mathbf{w}) = T_{A^{-1}}(T_A(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

(Figura 4.10.8).

Antes de passar aos exemplos, é útil mencionar um assunto de notação. Se $T_A : R^n \to R^n$ for um operador matricial injetor e se $T_{A^{-1}} : R^n \to R^n$ for seu inverso, então as matrizes canônicas desses operadores estão relacionadas pela equação

$$T_{A^{-1}} = T_A^{-1} \tag{6}$$

Nos casos em que for preferível não associar um nome à matriz, escrevemos essa equação como

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} \tag{7}$$

▶ EXEMPLO 7 A matriz canônica de T^{-1}

Seja $T : R^2 \to R^2$ o operador que efetua a rotação de cada vetor em R^2 pelo ângulo θ, de modo que, pela Tabela 5 da Seção 4.9,

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{8}$$

É geometricamente evidente que, para desfazer o efeito de T, devemos efetuar a rotação de cada vetor em R^2 pelo ângulo $-\theta$. Ocorre que isso é exatamente o que o operador T^{-1} faz, pois a matriz canônica de T^{-1} é

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

(verifique), que é a matriz canônica da rotação pelo ângulo $-\theta$.

▶ EXEMPLO 8 Encontrando T^{-1}

Mostre que o operador matricial $T : R^2 \to R^2$ definido pelas equações

$$w_1 = 2x_1 + x_2$$
$$w_2 = 3x_1 + 4x_2$$

é injetor e encontre $T^{-1}(w_1, w_2)$.

Solução A forma matricial dessas equações é

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

de modo que a matriz canônica de T é

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Essa matriz é invertível (e, portanto, T é injetor), e a matriz canônica de T^{-1} é

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$[T^{-1}] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}w_1 - \frac{1}{5}w_1 \\ -\frac{3}{5}w_1 + \frac{2}{5}w_1 \end{bmatrix}$$

pelo que concluímos que

$$T^{-1}(w_1, w_2) = \left(\tfrac{4}{5}w_1 - \tfrac{1}{5}w_2, -\tfrac{3}{5}w_1 + \tfrac{2}{5}w_2\right) \blacktriangleleft$$

Propriedades de linearidade

Até aqui, enfocamos exclusivamente as transformações matriciais de R^n em R^m. Contudo, esses não são os únicos tipos de transformações de R^n em R^m. Por exemplo, se $f_1, f_2, \ldots, f_m$ forem quaisquer funções reais das n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, então as equações

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ w_2 &= f_1(x_1, x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ w_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

definem uma transformação $T : R^n \to R^m$ que aplica o vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ no vetor $(w_1, w_2, \ldots, w_m)$. No entanto, só no caso em que essas equações forem lineares é que T será uma transformação matricial. A questão que passamos a considerar é a seguinte.

> **Questão** Existem propriedades algébricas de uma transformação $T : R^n \to R^m$ que possam ser usadas para determinar se T é uma transformação matricial?

A resposta é dada pelo teorema seguinte.

TEOREMA 4.10.2 *$T : R^n \to R^m$ é uma transformação matricial se, e só se, as relações seguintes forem válidas com quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em R^n e escalar k.*

(i) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ **[Aditividade]**

(ii) $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$ **[Homogeneidade]**

Prova Se T for uma transformação matricial, então as propriedades (i) e (ii) seguem das partes (*c*) e (*b*) do Teorema 4.9.1, respectivamente.

Reciprocamente, suponha que valham as propriedades (i) e (ii). Devemos mostrar que existe alguma matriz A de tamanho $m \times n$ tal que

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

com qualquer vetor $\mathbf{x}$ em R^n. Como um primeiro passo, lembramos que a Fórmula (10) da Seção 4.9, juntamente com a aditividade e a homogeneidade, implicam em

$$T(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r) = k_1T(\mathbf{v}_1) + k_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + k_rT(\mathbf{v}_r) \tag{9}$$

com escalares $k_1, k_2, \ldots, k_r$ e vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ em R^n quaisquer. Seja A a matriz

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2) \mid \cdots \mid T(\mathbf{e}_n)] \tag{10}$$

em que $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ são os vetores da base canônica de R^n. Segue do Teorema 1.3.1 que $A\mathbf{x}$ é uma combinação linear das colunas de A em que os sucessivos coeficientes são as entradas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $\mathbf{x}$. Dessa forma,

$$A\mathbf{x} = x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n)$$

Usando (9), podemos reescrever isso como

$$A\mathbf{x} = T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = T(\mathbf{x})$$

o que completa a prova. ◀

Dizemos que as propriedades de aditividade e homogeneidade do Teorema 4.10.2 são as ***condições de linearidade***, e que uma transformação que satisfaz essas propriedades é uma ***transformação linear***. Usando essa terminologia, podemos reformular o Teorema 4.10.2 como segue.

TEOREMA 4.10.3 *Toda transformação linear de R^n em R^m é uma transformação matricial e, reciprocamente, toda transformação matricial de R^n em R^m é uma transformação linear.*

Mais sobre o teorema da equivalência

Como nosso resultado final nesta seção, acrescentamos as partes (b) e (c) do Teorema 4.10.1 ao Teorema 4.8.10.

TEOREMA 4.10.4 Afirmações equivalentes

Se A for uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) *A é invertível.*
(b) *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.*
(c) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.*
(d) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*
(e) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$.*
(f) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$.*
(g) $\det(A) \neq 0$.
(h) *Os vetores coluna de A são linearmente independentes.*
(i) *Os vetores linha de A são linearmente independentes.*
(j) *Os vetores coluna de A geram R^n.*
(k) *Os vetores linha de A geram R^n.*
(l) *Os vetores coluna de A formam uma base de R^n.*
(m) *Os vetores linha de A formam uma base de R^n.*
(n) *A tem posto n.*
(o) *A tem nulidade 0.*
(p) *O complemento ortogonal do espaço nulo de A é R^n.*
(q) *O complemento ortogonal do espaço linha de A é $\{\mathbf{0}\}$.*
(r) *A imagem de T_A é R^n.*
(s) *T_A é um operador injetor.*

Revisão de conceitos

- Composição de transformações matriciais
- Reflexão na origem
- Transformação injetora
- Inversa de operador matricial
- Condições de linearidade
- Transformação linear
- Caracterizações equivalentes de invertibilidade de matrizes

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar a matriz canônica de uma composta de transformações matriciais.
- Determinar se um operador matricial é injetor e, se for, encontrar o operador inverso.
- Determinar se uma transformação é linear.

Conjunto de exercícios 4.10

▶ Nos Exercícios **1–2**, considere os operadores matriciais $T_A \circ T_B$ das matrizes dadas. Encontre a matriz canônica de $T_A \circ T_B$. ◀

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 8 \end{bmatrix}$

3. Sejam $T_1(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ e $T_2(x_1, x_2) = (3x_1, 2x_1 + 4x_2)$.

(a) Encontre as matrizes canônicas de T_1 e T_2.

(b) Encontre as matrizes canônicas de $T_2 \circ T_1$ e $T_1 \circ T_2$.

(c) Use as matrizes encontradas na parte (b) para encontrar fórmulas para $T_1(T_2(x_1, x_2))$ e $T_2(T_1(x_1, x_2))$.

4. Sejam $T_1(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, -2x_1 + x_2, -x_1 - 3x_2)$ e $T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, -x_3, 4x_1 - x_3)$.

(a) Encontre as matrizes canônicas de T_1 e T_2.

(b) Encontre as matrizes canônicas de $T_2 \circ T_1$ e $T_1 \circ T_2$.

(c) Use as matrizes encontradas na parte (b) para encontrar fórmulas para $T_1(T_2(x_1, x_2, x_3))$ e $T_2(T_1(x_1, x_2, x_3))$.

5. Encontre a matriz canônica para a composição dada em R^2.

(a) Uma rotação de 90° seguida de uma reflexão na reta $y = x$.

(b) Uma projeção ortogonal sobre o eixo y seguida de uma contração de fator $k = \frac{1}{2}$.

(c) Uma reflexão em torno do eixo x seguida de uma dilatação de fator $k = 3$.

6. Encontre a matriz canônica para a composição dada em R^2.

(a) Uma rotação de 60°, seguida de uma projeção ortogonal sobre o eixo x, seguida de uma reflexão na reta $y = x$.

(b) Uma dilatação de fator $k = 2$, seguida de uma rotação de 45°, seguida de uma reflexão no eixo y.

(c) Uma rotação de 15°, seguida de uma rotação de 105°, seguida de uma rotação de 60°.

7. Encontre a matriz canônica para a composição dada em R^3.

(a) Uma reflexão no plano yz, seguida de uma projeção ortogonal sobre o plano xz.

(b) Uma rotação de 45° em torno do eixo y, seguida de uma dilatação de fator $k = \sqrt{2}$.

(c) Uma projeção ortogonal sobre o plano xy, seguida de uma reflexão no plano yz.

8. Encontre a matriz canônica para a composição dada em R^3.

(a) Uma rotação de 30° em torno do eixo x, seguida de uma rotação de 30° em torno do eixo z, seguida de uma contração de fator $k = \frac{1}{4}$.

(b) Uma reflexão em torno do plano xy, seguida de uma reflexão em torno do plano xz, seguida de uma projeção ortogonal sobre o plano yz.

(c) Uma rotação de 270° em torno do eixo x, seguida de uma rotação de 90° em torno do eixo y, seguida de uma rotação de 180° em torno do eixo z.

9. Determine se $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.

(a) $T_1 : R^2 \to R^2$ é a projeção ortogonal sobre o eixo x e $T_2 : R^2 \to R^2$ é a projeção ortogonal sobre o eixo y.

(b) $T_1 : R^2 \to R^2$ é a rotação por um ângulo θ e $T_2 : R^2 \to R^2$ é a rotação por um ângulo θ_2.

(c) $T_1 : R^2 \to R^2$ é a projeção ortogonal sobre o eixo x e $T_2 : R^2 \to R^2$ é a rotação por um ângulo θ.

10. Determine se $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.

(a) $T_1 : R^3 \to R^3$ é a dilatação de fator k e $T_2 : R^3 \to R^3$ é a rotação em torno do eixo z por um ângulo θ.

(b) $T_1 : R^3 \to R^3$ é a rotação em torno do eixo x por um ângulo θ_1 e $T_2 : R^3 \to R^3$ é a rotação em torno do eixo z por um ângulo θ_2.

11. Em cada parte, determine por inspeção se o operador matricial é injetor.

(a) Uma projeção ortogonal sobre o eixo x em R^2.

(b) Uma reflexão no eixo y em R^2.

(c) Uma reflexão na reta $y = x$ em R^2.

(d) Uma contração de fator $k > 0$ em R^2.

(e) Uma rotação em torno do eixo z em R^3.

(f) Uma reflexão no plano xy em R^3.

(g) Uma dilatação de fator $k > 0$ em R^3.

12. Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador matricial definido pelas equações e use o Teorema 4.10.4 para determinar se o operador é injetor.

(a) $\begin{aligned} w_1 &= 8x_1 + 4x_2 \\ w_2 &= 2x_1 + x_2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 - 3x_2 \\ w_2 &= 5x_1 + x_2 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} w_1 &= -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ w_2 &= 2x_1 + 4x_3 \\ w_3 &= x_1 + 3x_2 + 6x_3 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ w_2 &= 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ w_3 &= x_1 + 8x_3 \end{aligned}$

13. Em cada parte, determine se o operador matricial $T: R^2 \to R^2$ definido pelas equações é injetor e, se for, encontre a matriz canônica do operador inverso e encontre $T^{-1}(w_1, w_2)$.

(a) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 2x_2 \\ w_2 &= -x_1 + x_2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} w_1 &= 4x_1 - 6x_2 \\ w_2 &= -2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} w_1 &= -x_2 \\ w_2 &= -x_1 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} w_1 &= 3x_1 \\ w_1 &= -5x_1 \end{aligned}$

14. Em cada parte, determine se o operador matricial $T: R^3 \to R^3$ definido pelas equações é injetor e, se for, encontre a matriz canônica do operador inverso e encontre $T^{-1}(w_1, w_2, w_3)$.

(a) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ w_2 &= 2x_1 + x_2 + x_3 \\ w_3 &= x_1 + x_2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ w_2 &= -x_1 + x_2 + x_3 \\ w_3 &= -2x_2 + 5x_3 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 4x_2 - x_3 \\ w_2 &= 2x_1 + 7x_2 + x_3 \\ w_3 &= x_1 + 3x_2 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3 \\ w_2 &= -2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ w_3 &= 7x_1 + 4x_2 - 5x_3 \end{aligned}$

15. Em cada parte, determine por inspeção a inversa do operador matricial injetor dado.

(a) A reflexão no eixo x em R^2.

(b) A rotação por um ângulo $\pi/4$ em R^2.

(c) A dilatação de fator 3 em R^2.

(d) A reflexão no plano xy em R^3.

(e) A contração de fator $\frac{1}{5}$ em R^3.

▶ Nos Exercícios **16–17**, em cada parte, use o Teorema 4.10.2 para determinar se $T: R^2 \to R^2$ é um operador matricial. ◀

16. (a) $T(x, y) = (2x, y)$ (b) $T(x, y) = (x^2, y)$

(c) $T(x, y) = (-y, x)$ (d) $T(x, y) = (x, 0)$

17. (a) $T(x, y) = (2x + y, x - y)$

(b) $T(x, y) = (x + 1, y)$ (c) $T(x, y) = (y, y)$

(d) $T(x, y) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$

▶ Nos Exercícios **18–19**, em cada parte, use o Teorema 4.10.2 para determinar se $T: R^3 \to R^2$ é uma transformação matricial. ◀

18. (a) $T(x, y, z) = (x, x + y + z)$

(b) $T(x, y, z) = (1, 1)$

19. (a) $T(x, y, z) = (0, 0)$

(b) $T(x, y, z) = (3x - 4y, 2x - 5z)$

20. Em cada parte, use o Teorema 4.10.3 para encontrar a matriz canônica do operador matricial a partir das imagens dos vetores da base canônica.

(a) As reflexões em R^2 da Tabela 1 da Seção 4.9.

(b) As reflexões em R^3 da Tabela 2 da Seção 4.9.

(c) As projeções em R^2 da Tabela 3 da Seção 4.9.

(d) As projeções em R^3 da Tabela 4 da Seção 4.9.

(e) As rotações em R^2 da Tabela 5 da Seção 4.9.

(f) As dilatações e contrações em R^3 da Tabela 8 da Seção 4.9.

21. Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador matricial dado.

(a) $T: R^2 \to R^2$ projeta cada vetor ortogonalmente sobre o eixo x e, em seguida, reflete esse vetor no eixo y.

(b) $T: R^2 \to R^2$ reflete cada vetor na reta $y = x$ e, em seguida, reflete esse vetor no eixo x.

(c) $T: R^2 \to R^2$ dilata cada vetor pelo fator 3, em seguida, reflete esse vetor na reta $y = x$ e, finalmente, projeta esse vetor ortogonalmente sobre o eixo y.

22. Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador matricial dado.

(a) $T: R^3 \to R^3$ reflete cada vetor no plano xz e, em seguida, contrai esse vetor pelo fator $\frac{1}{5}$.

(b) $T: R^3 \to R^3$ projeta cada vetor ortogonalmente sobre o plano xz e, em seguida, projeta esse vetor ortogonalmente sobre o plano xy.

(c) $T: R^3 \to R^3$ reflete cada vetor no plano xy, em seguida, reflete esse vetor no plano xz e, finalmente, reflete esse vetores no plano yz.

23. Seja $T_A: R^3 \to R^3$ a multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

e sejam $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ os vetores da base canônica de R^3. Em cada parte, encontre o vetor por inspeção.

(a) $T_A(\mathbf{e}_1)$, $T_A(\mathbf{e}_2)$ e $T_A(\mathbf{e}_3)$

(b) $T_A(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ (c) $T_A(7\mathbf{e}_3)$

24. Em cada parte, determine se a multiplicação por A é uma transformação matricial injetora.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

25. (a) Será injetora a composta de transformações matriciais injetoras? Justifique sua resposta.

(b) Pode ser injetora a composta de uma transformação matricial injetora com uma transformação matricial que não é injetora? Considere ambas ordens de composição e justifique sua resposta.

26. Mostre que $T(x, y) = (0, 0)$ define um operador matricial em R^2, mas $T(x, y) = (1, 1)$ não.

27. (a) Prove que se $T: R^n \to R^m$ for uma transformação matricial, então $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, ou seja, T transforma o vetor nulo de R^n no vetor nulo de R^m.

(b) A recíproca de (a) não é verdadeira. Dê um exemplo de uma transformação T tal que $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, mas tal que T não é uma transformação matricial.

28. Prove: uma matriz A de tamanho $n \times n$ é invertível se, e só se, o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$ tem exatamente uma solução com qualquer vetor $\mathbf{w}$ em R^n tal que o sistema seja consistente.

29. Sejam A uma matriz $n \times n$ tal que $\det(A) = 0$ e $T: R^n \to R^n$ a multiplicação por A.

(a) O que pode ser dito sobre a imagem do operador matricial T? Dê um exemplo que ilustre sua conclusão.

(b) O que pode ser dito sobre o número de vetores que T aplica em $\mathbf{0}$?

30. Prove: se a transformação matricial $T_A: R^n \to R^n$ for injetora, então A é invertível.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(f), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se $T: R^n \to R^m$ e $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, então T é uma transformação matricial.

(b) Se $T: R^n \to R^m$ e $T(c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y}) = c_1T(\mathbf{x}) + c_2T(\mathbf{y})$ com quaisquer escalares c_1 e c_2 e quaisquer vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em R^n, então T é uma transformação matricial.

(c) Se $T: R^n \to R^m$ for uma transformação matricial injetora, então não existem vetores distintos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ com os quais $T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$.

(d) Se $T: R^n \to R^m$ for uma transformação matricial e $m > n$, então T é injetora.

(e) Se $T: R^n \to R^m$ for uma transformação matricial e $m = n$, então T é injetora.

(f) Se $T: R^n \to R^m$ for uma transformação matricial e $m < n$, então T é injetora.

4.11 A geometria de operadores matriciais de R^2

Nesta seção opcional, discutimos mais detalhadamente os operadores matriciais de R^2. As ideias aqui desenvolvidas têm aplicações importantes na Computação Gráfica.

Transformação de regiões

Na Seção 4.9, enfocamos o efeito que um operador matricial tem sobre vetores individuais em R^2 e R^3. No entanto, também é importante entender como esses operadores afetam os formatos de regiões. Por exemplo, a Figura 4.11.1 mostra uma fotografia famosa de Albert Einstein e três modificações dessa fotografia geradas por computador, que são o resultado de operadores matriciais de R^2. A figura original foi escaneada e, em seguida, digitalizada para decompô-la num arranjo retangular de pixels. Esses pixels foram então transformados como segue.

- Foi utilizado o programa MATLAB para associar coordenadas e um nível de cinza a cada pixel.
- As coordenadas dos pixels foram transformadas por multiplicação matricial.
- Os níveis originais de cinza foram então associados aos pixels para produzir a figura transformada.

Muitas vezes, o efeito geral de um operador matricial de R^2 pode ser entendido olhando para as imagens dos vértices (0, 0), (1, 0), (0, 1) e (1, 1) do quadrado unitário (Figura 4.11.2).

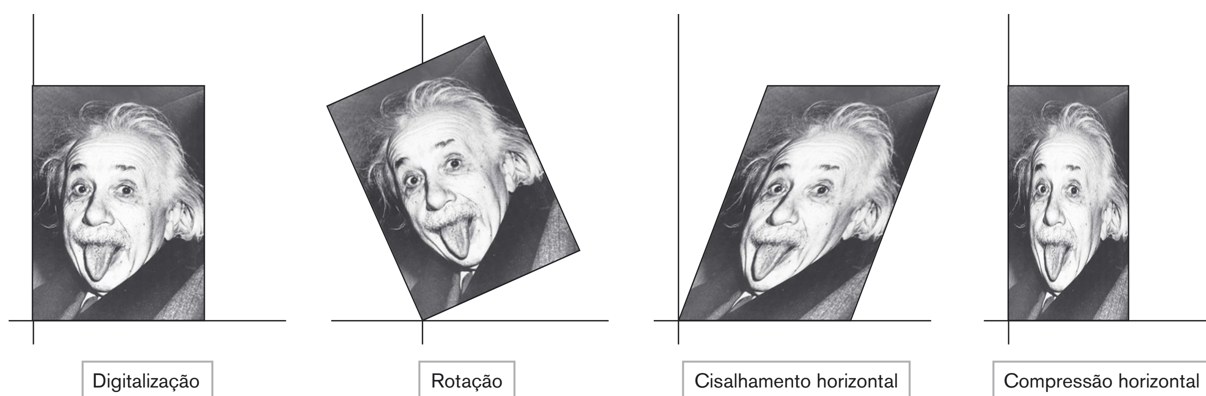


Figura 4.11.1

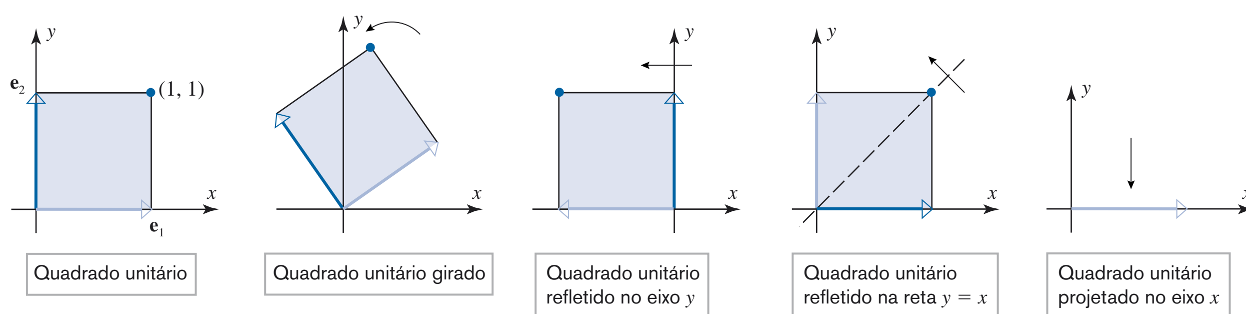


Figura 4.11.2

A Tabela 1 mostra o efeito que algumas transformações matriciais estudadas na Seção 4.9 têm sobre o quadrado unitário. Para isso ficar mais claro, destacamos uma metade do quadrado original e a parte correspondente na imagem.

▶ EXEMPLO 1 Transformando com matrizes diagonais

Suponha que o plano xy seja inicialmente comprimido ou expandido pelo fator k_1 na direção x, e depois comprimido ou expandido pelo fator k_2 na direção y. Encontre um só operador matricial que efetue ambas operações.

Solução As matrizes canônicas das duas operações são

$$\underset{\text{expansão (compressão) em } x}{\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \qquad \underset{\text{expansão (compressão) em } y}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}}$$

Assim, a matriz canônica da composta da operação em x seguida pela operação em y é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Isso mostra que a multiplicação por uma matriz diagonal 2×2 com entradas não negativas expande ou comprime o plano na direção x e também na direção y. No caso especial em que k_1 e k_2 são iguais, digamos $k_1 = k_2 = k$, a Fórmula (1) é simplificada para

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

que é uma dilatação ou contração (Tabela 7 da Seção 4.9). ◀

Tabela 1

Operador	Matriz canônica	Efeito no quadrado unitário
Reflexão no eixo y	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	(1, 1) → (–1, 1)
Reflexão no eixo x	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	(1, 1) → (1, –1)
Reflexão na reta $y = x$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	(1, 1) → (1, 1)
Rotação anti-horária pelo ângulo θ	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$	(1, 1) → $(\cos\theta - \text{sen}\,\theta, \text{sen}\,\theta + \cos\theta)$
Compressão na direção x pelo fator k $(0 < k < 1)$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	(1, 1) → $(k, 1)$
Expansão na direção x pelo fator k $(k > 1)$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	(1, 1) → $(k, 1)$
Cisalhamento de fator $k > 0$ na direção x	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	(1, 1) → $(1 + k, 1)$
Cisalhamento de fator $k > 0$ na direção y	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$	(1, 1) → $(1, 1 + k)$

▶ **EXEMPLO 2 Encontrando operadores matriciais**

(a) Encontre a matriz canônica do operador matricial de R^2 que é dado pelo cisalhamento de fator 2 na direção x seguido da reflexão na reta $y = x$. Esboce a imagem do quadrado unitário por esse operador.

(b) Encontre a matriz canônica do operador matricial de R^2 que é dado pela reflexão na reta $y = x$ seguida pelo cisalhamento de fator 2 na direção x. Esboce a imagem do quadrado unitário por esse operador.

(c) Confirme que o cisalhamento e a reflexão das partes (a) e (b) não comutam.

Solução (a) A matriz canônica do cisalhamento é

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a da reflexão é

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

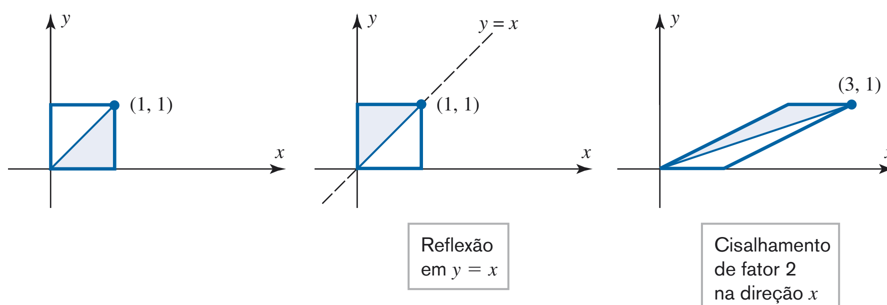
Assim, a matriz canônica do cisalhamento seguido pela rotação é

$$A_2A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

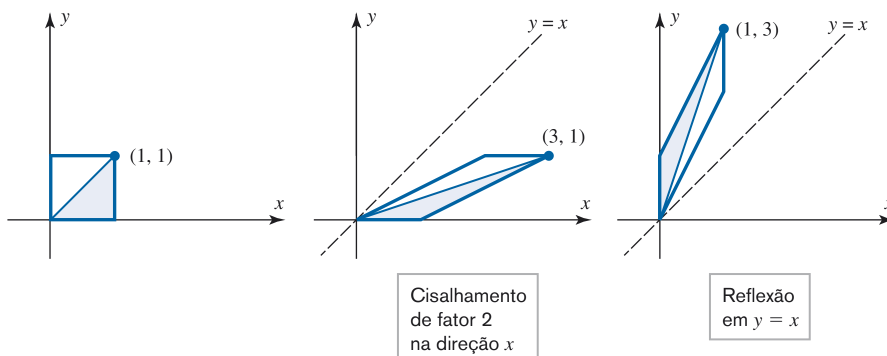
Solução (b) A matriz canônica da reflexão seguida pelo cisalhamento é

$$A_1A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução (c) Os cálculos nas soluções das partes (a) e (b) mostram que $A_1A_2 \neq A_2A_1$, de modo que as matrizes canônicas e, portanto, os operadores matriciais, não comutam. A mesma conclusão segue das Figuras 4.11.3 e 4.11.4, já que os dois operadores produzem imagens diferentes do quadrado unitário. ◀



▶ **Figura 4.11.3**



▶ **Figura 4.11.4**

A geometria de operadores matriciais injetores

Voltamos nossa atenção aos operados matriciais injetores de R^2, que são importantes por aplicarem pontos distintos em pontos distintos. Pelo Teorema 4.10.4 (das afirmações equivalentes), sabemos que uma transformação matricial T_A é injetora se, e só se, A puder ser expressa como um produto de matrizes elementares. Assim, podemos analisar o efeito de qualquer transformação injetora T_A fatorando a matriz A num produto de matrizes elementares, digamos,

$$A = E_1E_2 \cdots E_r$$

e expressando T_A como a composta

$$T_A = T_{E_1E_2\cdots E_r} = T_{E_1} \circ T_{E_2} \circ \cdots \circ T_{E_r} \tag{2}$$

O teorema seguinte explica o efeito geométrico dos operadores matriciais correspondentes a matrizes elementares.

TEOREMA 4.11.1 *Se E for uma matriz elementar, então $T_E : R^2 \to R^2$ é um dos operadores seguintes.*

(*a*) *Um cisalhamento na direção de um eixo coordenado.*

(*b*) *Uma reflexão na reta $y = x$.*

(*c*) *Uma compressão na direção de um eixo coordenado.*

(*d*) *Uma expansão na direção de um eixo coordenado.*

(*e*) *Uma reflexão num eixo coordenado.*

(*f*) *Uma compressão ou expansão na direção de um eixo coordenado seguida de uma reflexão num eixo coordenado.*

Prova Como uma matriz elementar 2×2 resulta de uma única operação elementar nas linhas da matriz identidade 2×2, uma matriz dessas necessariamente tem um dos formatos seguintes (verifique).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

As primeiras duas matrizes representam cisalhamentos na direção de um eixo coordenado; e a terceira, uma reflexão na reta $y = x$. Se $k > 0$, as duas últimas matrizes representam expansões ou compressões na direção de um eixo coordenado, dependendo se $0 \leq k < 1$ ou $k > 1$. Se $k < 0$ e se expressarmos k na forma $k = -k_1$, com $k_1 > 0$, então as duas últimas matrizes podem ser escritas como

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Como $k_1 > 0$, o produto em (3) representa uma compressão ou expansão na direção x seguida de uma reflexão no eixo y, e (4) representa uma compressão ou expansão na direção y seguida de uma reflexão no eixo x. No caso em que $k = -1$, as transformações (3) e (4) são simplesmente reflexões nos eixos y e x, respectivamente. ◀

Como toda matriz invertível é o produto de matrizes elementares, o próximo resultado decorre do Teorema 4.11.1 e da Fórmula (2).

TEOREMA 4.11.2 *Se $T_A : R^2 \to R^2$ for a multiplicação pela matriz invertível A, então o efeito geométrico de T_A é igual ao de uma sucessão apropriada de cisalhamentos, compressões, expansões e reflexões.*

▶ EXEMPLO 3 Analisando o efeito geométrico de um operador matricial

Supondo que k_1 e k_2 sejam positivos, expresse a matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

como um produto de matrizes elementares, e descreva o efeito geométrico da multiplicação por A em termos de compressões e expansões.

Solução Pelo Exemplo 1, temos

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o que mostra que a multiplicação por A tem o efeito geométrico de comprimir ou expandir pelo fator k_1 na direção x e depois comprimir ou expandir pelo fator k_2 na direção y.

▶ EXEMPLO 4 Analisando o efeito geométrico de um operador matricial

Expresse

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

como um produto de matrizes elementares e então e descreva o efeito geométrico da multiplicação por A em termos de cisalhamentos, expansões e reflexões.

Solução A pode ser reduzida a I como segue.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Somamos 23 vezes a primeira linha à segunda | Multiplicamos a segunda linha por $-\frac{1}{2}$ | Somamos 22 vezes a segunda linha à primeira

As três operações sucessivas com as linhas podem ser efetuadas multiplicando A pela esquerda sucessivamente por

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invertendo essas três matrizes e usando a Fórmula (4) da Seção 1.5, obtemos

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lendo da direita para a esquerda e observando que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

segue que o efeito de multiplicar por A equivale a

1. um cisalhamento de fator 2 na direção x,
2. seguido por uma expansão de fator 2 na direção y,
3. seguida por uma reflexão no eixo x e, então,
4. um cisalhamento de fator 3 na direção y. ◀

Imagens de retas por operadores matriciais

Na Computação Gráfica, muitas imagens são construídas ligando pontos por segmentos de retas. O próximo teorema ajuda a entender como os operadores matriciais transformam tais imagens. A prova de algumas partes do teorema fica como exercícios.

TEOREMA 4.11.3 *Seja $T: R^2 \to R^2$ a multiplicação por uma matriz invertível.*

(*a*) *A imagem de uma reta é uma reta.*
(*b*) *A imagem de uma reta pela origem é uma reta pela origem.*
(*c*) *As imagens de retas paralelas são retas paralelas.*
(*d*) *A imagem do segmento de reta ligando P e Q é o segmento de reta ligando as imagens de P e Q.*
(*e*) *As imagens de três pontos são colineares se, e somente se, os pontos são colineares.*

Observe que, do Teorema 4.11.3, segue que se A for uma matriz 2×2 invertível, então a multiplicação por A transforma triângulos em triângulos e paralelogramos em paralelogramos.

▶ EXEMPLO 5 Imagem de um quadrado

Esboce a imagem do quadrado de vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1) e (0, 1) pela multiplicação por

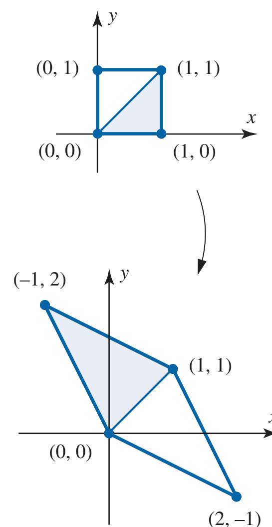
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução Como

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a imagem do quadrado é um paralelogramo de vértices (0, 0), (−1, 2), (2, −1) e (1, 1) (Figura 4.11.5).



▲ **Figura 4.11.5**

▶ EXEMPLO 6 Imagem de uma reta

De acordo com o Teorema 4.11.3, a matriz invertível

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

leva a reta $y = 2x + 1$ em alguma outra reta. Encontre sua equação.

Solução Seja (x, y) um ponto da reta $y = 2x + 1$ e seja (x', y') sua imagem pela multiplicação por A. Então

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{aligned} x &= x' - y' \\ y &= -2x' + 3y' \end{aligned}$$

Substituindo em $y = 2x + 1$, obtemos

$$-2x' + 3y' = 2(x' - y') + 1 \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad y' = \tfrac{4}{5}x' + \tfrac{1}{5}$$

Assim, (x', y') satisfaz

$$y = \tfrac{4}{5}x + \tfrac{1}{5}$$

que é a equação procurada. ◀

Revisão de conceitos

- Efeito de um operador matricial no quadrado unitário
- Geometria de operadores matriciais invertíveis
- Imagens de retas por operadores matriciais

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar as matrizes canônicas de transformações geométricas de R^2.
- Descrever o efeito geométrico de um operador matricial invertível.
- Encontrar a imagem do quadrado unitário por um operador matricial.
- Encontrar a imagem de uma reta por um operador matricial.

Conjunto de exercícios 4.11

1. Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador $T: R^2 \to R^2$ que transforma cada ponto (x, y) na sua

(a) reflexão na reta $y = -x$.

(b) reflexão na origem.

(c) projeção ortogonal sobre o eixo x.

(d) projeção ortogonal sobre o eixo y.

2. Em cada parte do Exercício 1, use a matriz obtida para calcular $T(2, 1)$. Confira suas respostas geometricamente esboçando os pontos $(2, 1)$ e $T(2, 1)$.

3. Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador $T: R^3 \to R^3$ que transforma cada ponto (x, y, z) na sua

(a) reflexão no plano xy.

(b) reflexão no plano xz.

(c) reflexão no plano yz.

4. Em cada parte do Exercício 3, use a matriz obtida para calcular $T(1, 1, 1)$. Confira suas respostas geometricamente esboçando os vetores $(1, 1, 1)$ e $T(1, 1, 1)$.

5. Encontre a matriz canônica do operador $T: R^3 \to R^3$ que efetua a

(a) rotação de cada vetor por 90° no sentido anti-horário em torno do eixo z (olhando ao longo do eixo z positivo para a origem).

(b) rotação de cada vetor por 90° no sentido anti-horário em torno do eixo x (olhando ao longo do eixo x positivo para a origem).

(c) rotação de cada vetor por 90° no sentido anti-horário em torno do eixo y (olhando ao longo do eixo y positivo para a origem).

6. Esboce a imagem do retângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ e $(0, 2)$

(a) pela reflexão no eixo x.

(b) pela reflexão no eixo y.

(c) pela compressão na direção y de fator $\frac{1}{4}$.

(d) pela expansão na direção x de fator $k = 2$.

(e) pelo cisalhamento de fator $k = 3$ na direção x.

(f) pelo cisalhamento de fator $k = 2$ na direção y.

7. Esboce a imagem do quadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$ pela multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Em cada parte, encontre a matriz que faz a rotação de cada ponto (x, y) em torno da origem por

(a) 45° (b) 90° (c) 180° (d) 270° (e) −30°

9. Em cada parte, encontre a matriz 2×2 que efetua um cisalhamento

(a) de fator $k = 4$ na direção y.

(b) de fator $k = -2$ na direção x.

10. Em cada parte, encontre a matriz 2×2 que comprime ou expande

(a) por um fator $\frac{1}{3}$ na direção y.

(b) por um fator 6 na direção x.

11. Em cada parte, descreva o efeito geométrico da multiplicação por A.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. Em cada parte, expresse a matriz como um produto de matrizes elementares e descreva o efeito da multiplicação por A em termos de compressões, expansões, reflexões e cisalhamentos.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

13. Em cada parte, encontre uma única matriz 2×2 que efetue a sucessão de operações indicadas.

(a) A compressão de fator $\frac{1}{2}$ na direção x seguida da expansão de fator 5 na direção y.

(b) A expansão de fator 5 na direção y seguida do cisalhamento de fator 2 na direção y.

(c) A reflexão na reta $y = x$ seguida da rotação pelo ângulo de 180° em torno da origem.

14. Em cada parte, encontre uma única matriz 2×2 que efetue a sucessão de operações indicadas.

(a) A reflexão no eixo y, seguida da expansão de fator 5 na direção x, seguida pela reflexão na reta $y = x$.

(b) A rotação pelo ângulo de 30° em torno da origem, seguida pelo cisalhamento de fator -2 na direção y, seguido pela expansão de fator 3 na direção y.

15. Em cada parte, use inversão matricial para mostrar a afirmação.

(a) A transformação inversa da reflexão na reta $y = x$ é a reflexão na reta $y = x$.

(b) A transformação inversa de uma compressão na direção de um eixo é uma expansão na direção daquele eixo.

(c) A transformação inversa da reflexão num eixo coordenado é a reflexão naquele eixo.

(d) A transformação inversa de um cisalhamento na direção de um eixo coordenado é um cisalhamento na direção daquele eixo.

16. Encontre a equação da imagem da reta $y = -4x + 3$ pela multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

17. Em cada parte, encontre a equação da imagem da reta $y = 2x$ pelo operador.

(a) O cisalhamento de fator $k = 3$ na direção x.

(b) A compressão de fator $\frac{1}{2}$ na direção y.

(c) A reflexão no eixo $y = x$.

(d) A reflexão no eixo y.

(e) A rotação de 60° em torno da origem.

18. Encontre a matriz de um cisalhamento na direção x que transforma o triângulo de vértices (0, 0), (2, 1) e (3, 0) num triângulo retângulo com o ângulo reto na origem.

19. (a) Mostre que a multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

aplica cada ponto no plano sobre a reta $y = 2x$.

(b) Segue da parte (a) que os pontos não colineares (1, 0), (0, 1) e $(-1, 0)$ são transformados em pontos de uma reta. Isso contradiz a parte (*e*) do Teorema 4.11.3?

20. Prove a parte (*a*) do Teorema 4.11.3. [*Sugestão*: uma reta no plano tem uma equação da forma $Ax + By + C = 0$, com A e B não ambos zero. Use o método do Exemplo 6 para mostrar que a imagem dessa reta pela multiplicação pela matriz invertível

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tem a equação $A'x + B'y + C = 0$, com

$$A' = (dA - cB)/(ad - bc)$$

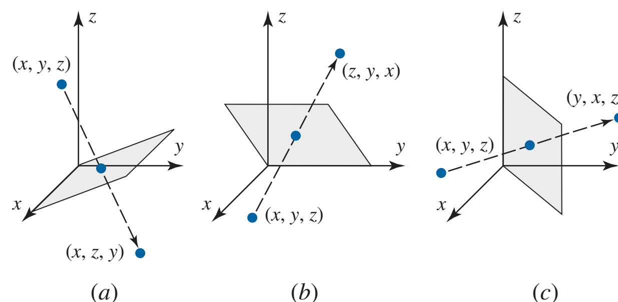
e

$$B' = (-bA + aB)/(ad - bc)$$

Em seguida, mostre que A' e B' não são ambos nulos para concluir que a imagem é uma reta.]

21. Use a sugestão do Exercício 20 para provar as partes (*b*) e (*c*) do Teorema 4.11.3.

22. Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador matricial descrito pela figura.

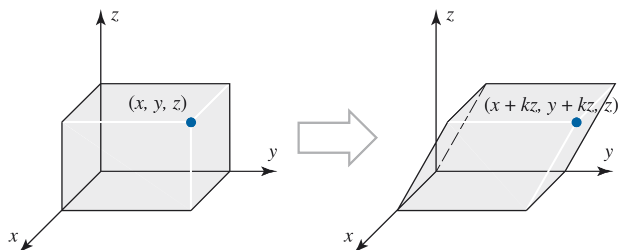


▲ **Figura Ex-22**

23. Em R^3, o ***cisalhamento de fator k na direção xy*** é a transformação matricial que aplica cada ponto (x, y, z) paralelamente ao plano xy no novo ponto $(x + kz, y + kz, z)$. (Ver figura.)

(a) Encontre a matriz canônica do cisalhamento de fator k na direção xy.

(b) Como você definiria o cisalhamento de fator k na direção xz e o cisalhamento de fator k na direção yz? Encontre as matrizes canônicas dessas transformações matriciais.



▲ **Figura Ex-23**

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(g), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) A imagem do quadrado unitário por um operador matricial injetor é um quadrado.

(b) Um operador matricial 2×2 invertível tem o efeito geométrico de uma sucessão de cisalhamentos, compressões, expansões e reflexões.

(c) A imagem de uma reta por um operador matricial injetor é uma reta.

(d) Toda reflexão de R^2 é sua própria inversa.

(e) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ representa uma reflexão numa reta.

(f) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ representa um cisalhamento.

(g) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ representa uma expansão.

4.12 Sistemas dinâmicos e cadeias de Markov

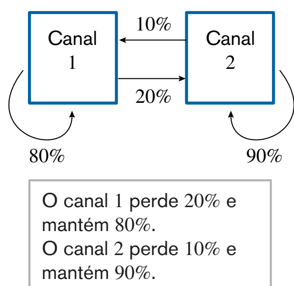
Nesta seção opcional, mostraremos como os métodos matriciais podem ser usados para analisar o comportamento de sistemas físicos que evolvem com o passar do tempo. Os métodos que estudamos aqui têm sido aplicados a problemas de Administração, de Ecologia, de Demografia, de Sociologia e da maioria das ciências físicas.

Sistemas dinâmicos

Um ***sistema dinâmico*** é um conjunto finito de variáveis cujos valores mudam com o passar do tempo. O valor de uma variável num dado instante de tempo é denominado o ***estado da variável*** naquele instante de tempo, e o vetor formado pelos estados é denominado o ***estado do sistema dinâmico*** naquele instante de tempo. Nosso principal objetivo nesta seção é analisar como o estado de um sistema dinâmico evolui com o tempo. Comecemos com um exemplo.

▶ EXEMPLO 1 Índice de audiência como um sistema dinâmico

Suponha que cada um de dois canais de televisão concorrentes, os canais 1 e 2, tenha 50% da audiência num dado instante de tempo inicial. Suponha que ao longo de cada período de um ano, o canal 1 atraia 10% da audiência do canal 2 e o canal 2 capture 20% da audiência do canal 1 (ver Figura 4.12.1). Qual é a audiência de cada canal ao final de um ano?



▲ **Figura 4.12.1**

Solução Comecemos introduzindo as variáveis

$$x_1(t) = \text{fração de audiência do canal 1 no instante de tempo } t$$
$$x_2(t) = \text{fração de audiência do canal 2 no instante de tempo } t$$

que dependem do tempo e o vetor coluna

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \textbf{Fração de audiência do canal 1 no instante de tempo } t \\ \leftarrow \textbf{Fração de audiência do canal 2 no instante de tempo } t \end{matrix}$$

As variáveis $x_1(t)$ e $x_2(t)$ formam um sistema dinâmico cujo estado no instante de tempo t é o vetor $\mathbf{x}(t)$. Tomando $t = 0$ como o ponto inicial no qual ambos canais têm 50% da audiência, temos que o estado do sistema naquele instante de tempo é

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Fração de audiência do canal 1 no instante de tempo } t = 0 \\ \leftarrow \text{Fração de audiência do canal 2 no instante de tempo } t = 0 \end{matrix} \tag{1}$$

Vamos tentar encontrar o estado do sistema no instante de tempo $t = 1$ (um ano depois). Ao longo do ano, o canal 1 retém 80% de seus 50% iniciais e ganha 10% dos 50% iniciais do canal 2. Assim,

$$\mathbf{x}_1(1) = 0{,}8(0{,}5) + 0{,}1(0{,}5) = 0{,}45 \tag{2}$$

Analogamente, o canal 2 ganha 20% dos 50% iniciais do canal 1 e retém 90% de seus 50% iniciais. Assim,

$$x_2(1) = 0{,}2(0{,}5) + 0{,}9(0{,}5) = 0{,}55 \tag{3}$$

Portanto, o estado do sistema no instante de tempo $t = 1$ é

$$\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}55 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Fração de audiência do canal 1 no instante de tempo } t = 1 \\ \leftarrow \text{Fração de audiência do canal 2 no instante de tempo } t = 1 \end{matrix} \tag{4}$$

▶ EXEMPLO 2 Evolução do índice de audiência ao longo de cinco anos

Acompanhe os índices de audiência dos canais 1 e 2 do Exemplo 1 num período de cinco anos.

Solução Para resolver esse problema, vamos supor que já calculamos os índices de audiência de cada canal no instante de tempo $t = k$ e que estamos interessados em usar os valores conhecidos de $x_1(k)$ e $x_2(k)$ para calcular os índices $x_1(k + 1)$ e $x_2(k + 1)$ um ano depois. A análise é exatamente a mesma que foi usada para obter as Equações (2) e (3). Ao longo do ano, o canal 1 retém 80% de sua fração inicial $x_1(k)$ e ganha 10% da fração inicial $x_2(k)$ do canal 2. Assim,

$$x_1(k + 1) = (0{,}8)x_1(k) + (0{,}1)x_2(k) \tag{5}$$

Analogamente, o canal 2 ganha 20% da fração inicial $x_1(k)$ do canal 1 e retém 90% de sua própria fração inicial $x_2(k)$. Assim,

$$x_2(k + 1) = (0{,}2)x_1(k) + (0{,}9)x_2(k) \tag{6}$$

As Equações (5) e (6) podem ser expressas em formato matricial como

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \tag{7}$$

que fornece uma maneira de usar a multiplicação matricial para calcular o estado do sistema no instante $t = k + 1$ a partir do estado no instante $t = k$. Por exemplo, usando (1) e (7), obtemos

$$\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}55 \end{bmatrix}$$

que confere com (4). Analogamente,

$$\mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{bmatrix} \mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}415 \\ 0{,}585 \end{bmatrix}$$

Agora podemos continuar esse processo, usando a Fórmula (7) para calcular $\mathbf{x}(3)$ a partir de $\mathbf{x}(2)$, depois $\mathbf{x}(4)$ a partir de $\mathbf{x}(3)$, e assim por diante. Isso fornece (verifique)

$$\mathbf{x}(3) = \begin{bmatrix} 0{,}3905 \\ 0{,}6095 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(4) = \begin{bmatrix} 0{,}37335 \\ 0{,}62665 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(5) = \begin{bmatrix} 0{,}361345 \\ 0{,}638655 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Assim, depois de cinco anos, o canal 1 vai ter um índice de audiência de 36% e o canal 2, um índice de 64%. ◀

Se quisermos, podemos continuar a análise de mercado do último exemplo além do período de cinco anos e explorar o que acontece com os índices de audiência a longo prazo. Fizemos isso, usando um computador, e obtivemos os seguintes vetores de estado (arredondados até a sexta casa decimal):

$$\mathbf{x}(10) \approx \begin{bmatrix} 0{,}338041 \\ 0{,}661959 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(20) \approx \begin{bmatrix} 0{,}333466 \\ 0{,}666534 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(40) \approx \begin{bmatrix} 0{,}333333 \\ 0{,}666667 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Todos os vetores de estado subsequentes, quando arredondados até a sexta casa decimal, são iguais a $\mathbf{x}(40)$, portanto vemos que os índices de audiência acabam se estabilizando, com o canal 1 mantendo cerca de um terço da audiência e o canal 2, cerca de dois terços. Adiante, ainda nesta seção, explicaremos por que ocorre essa estabilização.

Cadeias de Markov

Os estados das variáveis em muitos sistemas dinâmicos não são conhecidos com absoluta certeza, mas podem ser dados como probabilidades; esses sistemas dinâmicos são denominados ***processos estocásticos*** (da palavra grega *stochastikós*, significando "palpite", "conjectura"). Um estudo detalhado de processos estocásticos requer uma definição precisa do termo *probabilidade*, o que está além dos propósitos deste livro. Contudo, para o nosso estudo, a seguinte interpretação desse termo é suficiente.

> *Em termos informais, a* ***probabilidade*** *de um experimento ou de uma observação produzir um certo resultado é aproximadamente a fração de tempo durante a qual esse resultado ocorreria se o experimento fosse repetido muitas vezes sob condições constantes; quanto maior o número de repetições, mais precisamente a probabilidade descreve a fração das ocorrências.*

Por exemplo, quando dizemos que $\frac{1}{2}$ é a probabilidade de se obter cara jogando uma moeda honesta, queremos dizer que se a moeda fosse lançada muitas vezes sob condições constantes, então esperaríamos que, em aproximadamente metade das ocorrências, obteríamos cara. As probabilidades são muitas vezes expressas como decimais ou como porcentagens. Assim, a probabilidade de se obter cara jogando uma moeda honesta também pode ser expressa como 0,5 ou 50%.

Se um experimento ou observação tiver n resultados possíveis, então as probabilidades desses resultados deverão ser frações não negativas cuja soma é 1. As probabilidades são não negativas porque cada uma descreve a fração de ocorrências de um resultado a longo prazo, e a soma é 1 porque eles dão conta de todos os possíveis resultados. Por exemplo, se uma caixa contém uma bola vermelha, três bolas verdes e seis bolas amarelas e se uma bola for retirada aleatoriamente da caixa, então as probabilidades dos possíveis resultados são

$$\begin{aligned} p_1 &= \text{prob(vermelho)} = 1/10 = 0{,}1 \\ p_2 &= \text{prob(verde)} = 3/10 = 0{,}3 \\ p_3 &= \text{prob(amarelo)} = 6/10 = 0{,}6 \end{aligned}$$

Cada probabilidade é uma fração não negativa e

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}6 = 1$$

Num processo estocástico com n possíveis estados, o ***vetor de estados*** em cada instante t tem o formato

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} \textbf{A probabilidade de que o sistema esteja no estado 1} \\ \textbf{A probabilidade de que o sistema esteja no estado 2} \\ \vdots \\ \textbf{A probabilidade de que o sistema esteja no estado } n \end{matrix}$$

As entradas desse vetor devem somar 1, pois dão conta de todas as n possibilidades. Em geral, dizemos que um vetor é um ***vetor probabilidade*** se suas entradas são não negativas e têm soma 1.

▶ **EXEMPLO 3** **De novo o Exemplo 1 do ponto de vista probabilístico**

Observe que os vetores de estado nos Exemplos 1 e 2 são todos vetores de probabilidade. Isso era de se esperar, já que as entradas de cada vetor de estado são os índices de audiência dos canais que, juntos, compreendem toda a audiência. Além disso, é preferível interpretar as entradas de vetores de estado como probabilidades em vez de índices exatos de audiência, já que a informação sobre a audiência costuma ser obtida por meio de procedimentos estatísticos com incertezas intrínsecas. Assim, por exemplo, o vetor de estado

$$\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\ 45 \\ 0{,}55 \end{bmatrix}$$

que, no Exemplo 1, foi interpretado como significando que o canal 1 detém 45% da audiência e o canal 2 detém 55% da audiência, também pode ser interpretado como significando que um indivíduo escolhido aleatoriamente é um telespectador do canal 1 com uma probabilidade de 0,45 e é um telespectador do canal 2 com uma probabilidade de 0,55. ◀

Dizemos que uma matriz quadrada é uma ***matriz estocástica*** se cada um de seus vetores coluna for um vetor probabilidade. Em geral, tais matrizes ocorrem em fórmulas que dão os estados sucessivos de um processo estocástico. Por exemplo, os vetores de estado $\mathbf{x}(k+1)$ e $\mathbf{x}(k)$ em (7) estão relacionados por uma equação da forma $\mathbf{x}(k+1)$, na qual

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

é uma matriz estocástica. Não deveria ser surpreendente que os vetores coluna de P são vetores de probabilidade, já que as entradas em cada coluna dizem o que ocorre com a audiência de cada canal ao longo de cada ano, a saber, que as entradas na coluna 1 indicam que a cada ano o canal 1 mantém 80% de sua audiência e perde 20%, e as entradas na coluna 2 dizem que a cada ano o canal 2 mantém 90% de sua audiência e perde 10%. As entradas em (10) também podem ser vistas como probabilidades.

$p_{11} = 0{,}8 =$ probabilidade de que um telespectador do canal 1 continue sendo telespectador do canal 1

$p_{21} = 0{,}2 =$ probabilidade de que um telespectador do canal 1 passe a ser telespectador do canal 2

$p_{12} = 0{,}1 =$ probabilidade de que um telespectador do canal 2 passe a ser telespectador do canal 1

$p_{22} = 0{,}9 =$ probabilidade de que um telespectador do canal 2 continue sendo telespectador do canal 2

O Exemplo 1 é um caso especial de uma classe maior de processos estocásticos denominados *cadeias de Markov*.



Andrei Andreyevich Markov (1856–1922)

Nota histórica As cadeias de Markov são assim denominadas em homenagem ao matemático russo A. A. Markov, um amante da poesia, que as utilizou para analisar as alterações de vogais e consoantes no poema *Eugene Onegin*, de Pushkin. Markov acreditava que a única aplicação de suas cadeias seria a análise de obras literárias, de modo que ele ficaria surpreso se soubesse que hoje sua descoberta é usada pelas Ciências Sociais, pela Teoria Quântica e pela Genética!

[Imagem: Wikipedia]

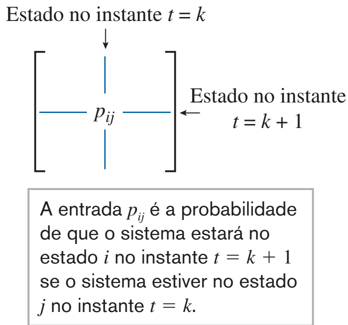


Figura 4.12.2

DEFINIÇÃO 1 Uma ***cadeia de Markov*** é um sistema dinâmico cujos vetores de estado numa sucessão de intervalos de tempo são vetores de probabilidade e para o qual os vetores de estado em intervalos de tempo sucessivos estão relacionados por uma equação da forma

$$\mathbf{x}(k+1) = P\mathbf{x}(k)$$

em que $P = [p_{ij}]$ é uma matriz estocástica, e p_{ij} é a probabilidade com que o sistema estará no estado i no instante $t = k + 1$ se estiver no estado j no instante $t = k$. A matriz P é denominada ***matriz de transição*** do sistema.

Observação Observe que, nessa definição, o índice i de linha corresponde ao estado seguinte; e o índice j de coluna, ao estado anterior (Figura 4.12.2).

▶ EXEMPLO 4 Migrações como cadeias de Markov

Suponha que um leão marcado possa migrar entre três reservas em busca de comida. As reservas são denotadas por 1, 2 e 3 e, tendo por base dados sobre os recursos de alimento, os pesquisadores concluem que o padrão mensal de migração do leão pode ser modelado por uma cadeia de Markov com matriz de transição

Reserva no instante $t = k$

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 & 0,1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \quad \text{Reserva no instante } t = k+1$$

(colunas 1, 2, 3)

(ver Figura 4.12.3). Assim,

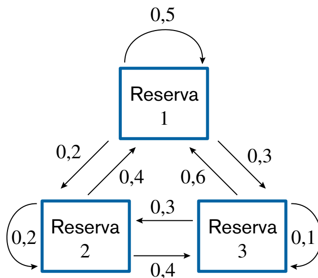


Figura 4.12.3

$p_{11} = 0,5 =$ probabilidade de que o leão permaneça na reserva 1 quando está na reserva 1
$p_{12} = 0,4 =$ probabilidade de que o leão migre da reserva 2 para a reserva 1
$p_{13} = 0,6 =$ probabilidade de que o leão migre da reserva 3 para a reserva 1
$p_{21} = 0,2 =$ probabilidade de que o leão migre da reserva 1 para a reserva 2
$p_{22} = 0,2 =$ probabilidade de que o leão permaneça na reserva 2 quando está na reserva 2
$p_{23} = 0,3 =$ probabilidade de que o leão migre da reserva 3 para a reserva 2
$p_{31} = 0,3 =$ probabilidade de que o leão migre da reserva 1 para a reserva 3
$p_{32} = 0,4 =$ probabilidade de que o leão migre da reserva 2 para a reserva 3
$p_{33} = 0,1 =$ probabilidade de que o leão permaneça na reserva 3 quando está na reserva 3

Se t estiver em meses e sabendo que o leão é largado na reserva 2 no instante $t = 0$, acompanhe sua localização provável ao longo de um período de seis meses.

Solução Sejam $x_1(k)$, $x_2(k)$ e $x_3(k)$ as probabilidades do leão estar na reserva 1, 2 e 3, respectivamente, no instante $t = k$ e seja

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

o vetor de estado naquele instante. Como sabemos com certeza que o leão está na reserva 2 no instante $t = 0$, o vetor de estado inicial é

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deixamos para o leitor mostrar que os vetores de estado ao longo do período de seis meses são

$$\mathbf{x}(1) = P\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0{,}400 \\ 0{,}200 \\ 0{,}400 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(2) = P\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 0{,}520 \\ 0{,}240 \\ 0{,}240 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(3) = P\mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 0{,}500 \\ 0{,}224 \\ 0{,}276 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(4) = P\mathbf{x}(3) \approx \begin{bmatrix} 0{,}505 \\ 0{,}228 \\ 0{,}267 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(5) = P\mathbf{x}(4) \approx \begin{bmatrix} 0{,}504 \\ 0{,}227 \\ 0{,}269 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(6) = P\mathbf{x}(5) \approx \begin{bmatrix} 0{,}504 \\ 0{,}227 \\ 0{,}269 \end{bmatrix}$$

Como no Exemplo 2, aqui os vetores de estado parecem estabilizar ao longo do tempo com uma probabilidade de aproximadamente 0,504 de o leão estar na reserva 1, uma probabilidade de aproximadamente 0,227 de estar na reserva 2 e uma probabilidade de aproximadamente 0,269 de estar na reserva 3. ◀

Cadeias de Markov como potências da matriz de transição

Numa cadeia de Markov com estado inicial $\mathbf{x}(0)$, os sucessivos vetores de estado são

$$\mathbf{x}(1) = P\mathbf{x}(0), \quad \mathbf{x}(2) = P\mathbf{x}(1), \quad \mathbf{x}(3) = P\mathbf{x}(2), \quad \mathbf{x}(4) = P\mathbf{x}(3), \ldots$$

Para simplificar, é costume denotar $\mathbf{x}(k)$ por $\mathbf{x}_k$, o que nos permite escrever os sucessivos vetores de estado mais sucintamente como

$$\mathbf{x}_1 = P\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_2 = P\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_3 = P\mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_4 = P\mathbf{x}_3, \ldots \tag{11}$$

Alternativamente, esses vetores de estado podem ser expressos em termos do vetor de estado inicial $\mathbf{x}_0$ como

$$\mathbf{x}_1 = P\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_2 = P(P\mathbf{x}_0) = P^2\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_3 = P(P^2\mathbf{x}_0) = P^3\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_4 = P(P^3\mathbf{x}_0) = P^4\mathbf{x}_0, \ldots$$

do que segue que

$$\mathbf{x}_k = P^k\mathbf{x}_0 \tag{12}$$

sem calcular todos os estados intermediários. Adiante discutiremos métodos eficazes de calcular potências de matrizes que tornam essa fórmula ainda mais útil.

Note que a Fórmula (12) torna possível calcular o vetor de estado $\mathbf{x}_k$ sem precisar calcular antes os vetores de estado anteriores, como é exigido na Fórmula (11).

▶ EXEMPLO 5 Encontrando um vetor de estado diretamente de x_0

Use a Fórmula (12) para encontrar o vetor de estado $\mathbf{x}(3)$ do Exemplo 2.

Solução Por (1) e (7), o vetor de estado inicial e matriz de transição são

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{bmatrix}$$

Deixamos para o leitor calcular P^3 e mostrar que

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{x}_3 = P^3\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0{,}562 & 0{,}219 \\ 0{,}438 & 0{,}781 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3905 \\ 0{,}6095 \end{bmatrix}$$

o que confere com o resultado em (8). ◀

Comportamento a longo prazo de uma cadeia de Markov

Vimos dois exemplos de cadeias de Markov nos quais os vetores de estado parecem estabilizar depois de um certo período de tempo. Assim, é razoável perguntar se todas as cadeias de Markov têm essa propriedade. O próximo exemplo mostra que isso não ocorre.

▶ EXEMPLO 6 Uma cadeia de Markov que não estabiliza

A matriz

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é estocástica e pode, portanto, ser considerada como a matriz de transição de uma cadeia de Markov. Um cálculo simples mostra que $P^2 = I$, do que segue que

$$I = P^2 = P^4 = P^6 = \cdots \quad \text{e} \quad P = P^3 = P^5 = P^7 = \cdots$$

Assim, os estados sucessivos na cadeia de Markov com vetor inicial $\mathbf{x}_0$ são

$$\mathbf{x}_0, \quad P\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_0, \quad P\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_0, \ldots$$

que oscilam entre $\mathbf{x}_0$ e $P\mathbf{x}_0$. Assim, a cadeia de Markov não estabiliza, a menos que ambos componentes de $\mathbf{x}_0$ sejam $\frac{1}{2}$ (verifique). ◀

Uma definição precisa do que significa uma sequência de números ou de vetores estabilizar é dada no Cálculo, mas aquele nível de precisão não será necessário aqui. Informalmente, diremos que uma sequência de vetores

$$\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_2, \ldots, \quad \mathbf{x}_k, \ldots$$

tende a um ***limite*** $\mathbf{q}$ ou que ***converge*** a $\mathbf{q}$ se todas as entradas de $\mathbf{x}_k$ podem se tornar arbitrariamente próximas das entradas correspondentes de $\mathbf{q}$ tomando k suficientemente grande. Vamos denotar isso escrevendo $\mathbf{x}_k \to \mathbf{q}$ quando $k \to \infty$.

Vimos no Exemplo 6 que os vetores de estado de uma cadeia de Markov não precisam se aproximar de um limite em todos os casos. Contudo, podemos garantir que os vetores de estado tendem a um limite impondo mais uma condição na matriz de transição de uma cadeia de Markov.

DEFINIÇÃO 2 Uma matriz estocástica P é dita ***regular*** se P ou alguma potência positiva de P tiver todas as entradas positivas, e uma cadeia de Markov com matriz de transição regular é dita uma ***cadeia de Markov regular***.

▶ EXEMPLO 7 Matrizes estocásticas regulares

As matrizes de transição nos Exemplos 2 e 4 são regulares, pois suas entradas são positivas. A matriz

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 1 \\ 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$$

é regular porque

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0{,}75 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

tem entradas positivas. A matriz P no Exemplo 6 não é regular porque P e cada potência positiva de P têm algumas entradas nulas (verifique). ◀

O próximo teorema, que enunciamos sem prova, é o resultado fundamental sobre o comportamento a longo termo de cadeias de Markov.

TEOREMA 4.12.1 *Se P for a matriz de transição de uma cadeia de Markov regular, então*

(*a*) *Existe um único vetor probabilidade $\mathbf{q}$ tal que $P\mathbf{q} = \mathbf{q}$.*

(*b*) *Dado qualquer vetor probabilidade inicial $\mathbf{x}_0$, a sequência de vetores de estado*

$$\mathbf{x}_0, \quad P\mathbf{x}_0, \ldots, \quad P^k\mathbf{x}_0, \ldots$$

converge a $\mathbf{q}$.

O vetor **q** desse teorema é denominado ***vetor de estado estacionário*** da cadeia de Markov. Esse vetor pode ser encontrado reformulando a equação da parte (*a*) como

$$(I - P)\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

e, então, resolvendo essa equação para **q** condicionada à exigência que **q** deve ser um vetor probabilidade. Vejamos alguns exemplos.

▶ EXEMPLO 8 De novo os Exemplos 1 e 2

A matriz de transição da cadeia de Markov do Exemplo 2 é

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{bmatrix}$$

Como as entradas de P são positivas, a cadeia de Markov é regular e tem, portanto, um único vetor de estado estacionário **q**. Para encontrar **q**, resolvemos o sistema $(I - P)\mathbf{q} = \mathbf{0}$, que pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução geral desse sistema é

$$q_1 = 0{,}5s, \quad q_2 = s$$

(verifique), que pode ser escrito em formato vetorial como

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}s \\ s \end{bmatrix} \tag{13}$$

Para **q** ser um vetor probabilidade, precisamos ter

$$1 = q_1 + q_2 = \tfrac{3}{2}s$$

que implica $s = \frac{2}{3}$. Substituindo esse valor em (13), obtemos o vetor de estado estacionário

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

o que é consistente com os resultados numéricos obtidos em (9).

▶ EXEMPLO 9 De novo o Exemplo 4

A matriz de transição da cadeia de Markov do Exemplo 4 é

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

Como as entradas de P são positivas, a cadeia de Markov é regular e tem, portanto, um único vetor de estado estacionário **q**. Para encontrar **q**, resolvemos o sistema $(I - P)\mathbf{q} = \mathbf{0}$, que pode ser escrito (usando frações) como

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{9}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

(Convertemos tudo para frações para evitar erros de arredondamento neste exemplo ilustrativo). Deixamos para o leitor confirmar que a forma escalonada reduzida por linhas da matriz de coeficientes é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{15}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{27}{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e que a solução geral de (14) é

$$q_1 = \tfrac{15}{8}s, \quad q_2 = \tfrac{27}{32}s, \quad q_3 = s \tag{15}$$

Para $\mathbf{q}$ ser um vetor probabilidade, precisamos ter $q_1 + q_2 + q_3 = 1$, do que segue que $s = \frac{32}{119}$ (verifique). Substituindo esse valor em (15), obtemos o vetor de estado estacionário

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{60}{119} \\ \frac{27}{119} \\ \frac{32}{119} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}5042 \\ 0{,}2269 \\ 0{,}2689 \end{bmatrix}$$

(verifique), o que é consistente com os resultados obtidos no Exemplo 4. ◀

Revisão de conceitos

- Sistema dinâmico
- Estado de uma variável
- Estado de um sistema dinâmico
- Processo estocástico
- Probabilidade
- Vetor probabilidade
- Matriz estocástica
- Cadeia de Markov
- Matriz de transição
- Matriz estocástica regular
- Cadeia de Markov regular
- Vetor de estado estacionário

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se uma matriz é estocástica.
- Calcular os vetores de estado a partir da matriz de transição e um estado inicial.
- Determinar se uma matriz estocástica é regular.
- Determinar se uma cadeia de Markov é regular.
- Encontrar o vetor de estado estacionário de uma matriz de transição regular.

Conjunto de exercícios 4.12

▶ Nos Exercícios 1–2, em cada parte determine se A é uma matriz estocástica. Se A não for estocástica, explique por que não é. ◀

1. (a) $A = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}7 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$

2. (a) $A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}9 \\ 0{,}8 & 0{,}1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{12} & \frac{8}{9} & 0 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 3–4, use as Fórmulas (11) e (12) para calcular o vetor de estado $\mathbf{x}_4$ de duas maneiras diferentes. ◀

3. $P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$

4. $P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 5–6, em cada parte, determine se P é uma matriz estocástica regular. ◀

5. (a) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \\ \frac{4}{5} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$ (b) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix}$ (c) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 1 \\ \frac{4}{5} & 0 \end{bmatrix}$

6. (a) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ (b) $P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (c) $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **7–10**, verifique que P é uma matriz estocástica regular e encontre o vetor de estado estacionário da cadeia de Markov associada. ◀

7. $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

8. $P = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 0{,}4 \end{bmatrix}$

9. $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

10. $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

11. Considere um processo de Markov com matriz de transição

	Estado 1	**Estado 2**
Estado 1	0,2	0,1
Estado 2	0,8	0,9

(a) O que representa a entrada 0,2?

(b) O que representa a entrada 0,1?

(c) Se inicialmente o sistema estiver no estado 1, com qual probabilidade ele estará no estado 2 na próxima observação?

(d) Se o sistema tiver uma chance de 50% de estar inicialmente no estado 1, com qual probabilidade ele estará no estado 2 na próxima observação?

12. Considere um processo de Markov com matriz de transição

	Estado 1	**Estado 2**
Estado 1	0	$\frac{1}{7}$
Estado 2	1	$\frac{6}{7}$

(a) O que representa a entrada $\frac{6}{7}$?

(b) O que representa a entrada 0?

(c) Se inicialmente o sistema estiver no estado 1, com qual probabilidade ele estará no estado 1 na próxima observação?

(d) Se o sistema tiver uma chance de 50% de estar inicialmente no estado 1, com qual probabilidade ele estará no estado 2 na próxima observação?

13. Num dado dia, a qualidade do ar numa certa cidade é boa ou má. Os registros mostram que quando a qualidade do ar é boa num dado dia, então existe uma chance de 95% de que venha a ser boa no próximo dia; e quando a qualidade do ar é má num dado dia, então existe uma chance de 45% de que venha ser má no próximo dia.

(a) Encontre uma matriz de transição para esse fenômeno.

(b) Se hoje a qualidade do ar for boa, com qual probabilidade também será boa daqui a dois dias?

(c) Se hoje a qualidade do ar for má, com qual probabilidade também será má daqui a três dias?

(d) Se a qualidade do ar tem uma chance de 20% de ser boa hoje, com qual probabilidade também será boa amanhã?

14. Um rato num experimento de laboratório pode escolher um entre dois tipos de comida a cada dia: o tipo I ou o tipo II. Os registros mostram que se o rato escolhe o tipo I num certo dia, então a chance de escolher o tipo I no dia seguinte é de 75%; e se o rato escolhe o tipo II num certo dia, então a chance de escolher o tipo II no dia seguinte é de 50%.

(a) Encontre uma matriz de transição para esse fenômeno.

(b) Se hoje o rato escolher o tipo I, com qual probabilidade escolherá o tipo I daqui a dois dias?

(c) Se hoje o rato escolher o tipo II, com qual probabilidade escolherá o tipo II daqui a três dias?

(d) Se o tipo I tem uma chance de 10% de ser escolhido hoje, com qual probabilidade também será escolhido amanhã?

15. Num certo instante de tempo inicial, havia 100.000 habitantes numa certa cidade e 25.000 habitantes nos arredores da cidade. A Comissão de Planejamento Regional detectou que, a cada ano, 5% da população da cidade muda para os arredores e 3% da população dos arredores muda para a cidade.

(a) Supondo que a população total permaneça constante, faça uma tabela mostrando a população da cidade e dos arredores ao longo de um período de cinco anos (arredonde para o inteiro mais próximo).

(b) A longo prazo, qual será a distribuição da população entre a cidade e os arredores?

16. Num certo instante de tempo inicial, cada um de dois canais de televisão concorrentes, os canais 1 e 2, tem 50% da audiência. A cada período de um ano, o canal 1 atrai 5% da audiência do canal 2 e o canal 2 captura 10% da audiência do canal 1.

(a) Faça uma tabela mostrando a participação na audiência dos dois canais ao longo de um período de cinco anos.

(b) A longo prazo, qual será a participação na audiência dos dois canais?

17. Uma locadora de automóveis possui três agências, numeradas 1, 2 e 3. Um cliente pode alugar um carro de qualquer uma das três agências e retorná-lo a qualquer uma das três agências. Os registros da locadora mostram que os carros são retirados e devolvidos de acordo com as probabilidades seguintes.

		Alugados da agência		
		1	**2**	**3**
Retornados à agência	**1**	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
	2	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$
	3	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

(a) Se um carro for alugado na agência 1, com qual probabilidade será retornado à agência 1 depois de duas locações?

(b) Supondo que esse sistema dinâmico possa ser modelado como uma cadeia de Markov, encontre seu vetor estacionário.

(c) Se a locadora possui uma frota de 120 carros, qual deveria ser a quantidade de vagas de estacionamento em cada agência para haver garantia razoável de ter suficiente espaço para os carros a longo prazo? Explique seu raciocínio.

18. Os traços físicos são determinados pelos genes que um descendente recebe de seus dois ascendentes. No caso mais simples, um traço no descendente é determinado por um par de genes, um de cada um dos dois ascendentes. Em geral, cada gene num par pode tomar uma de duas formas, denotadas por A e a, que são os ***alelos***. Isso leva a três pareamentos possíveis, a saber,

$$AA, \quad Aa, \quad aa$$

denominados ***genótipos*** (os pares Aa e aA determinam o mesmo traço e são, portanto, indistinguíveis). Mostra-se, no estudo da hereditariedade, que se um dos ascendentes tiver genótipo conhecido e o outro ascendente for de genótipo aleatório, então o descendente terá a probabilidade de genótipo dada na próxima tabela, que pode ser vista como uma matriz de transição de um processo de Markov.

		Genótipo de ascendente		
		AA	***Aa***	***aa***
Genótipo de descendente	***AA***	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
	Aa	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	aa	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Assim, por exemplo, o descendente de um ascendente de genótipo AA e de outro escolhido aleatoriamente e de genótipo desconhecido tem uma chance de 50% de ser AA, 50% de ser Aa e nenhuma chance de ser aa.

(a) Mostre que a matriz de transição é regular.

(b) Encontre o vetor estacionário e discuta sua interpretação física.

19. Encontre as entradas que faltam na matriz estocástica

$$P = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & * & \frac{1}{5} \\ * & \frac{3}{10} & * \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

e encontre seu vetor de estado estacionário.

20. Se P for uma matriz estocástica $n \times n$ e se M for uma matriz $1 \times n$ cujas entradas são todas iguais a 1, então $MP =$ _____.

21. Se P for uma matriz estocástica regular com vetor de estado estacionário $\mathbf{q}$, o que pode ser dito sobre a sequência de produtos

$$P\mathbf{q}, \quad P^2\mathbf{q}, \quad P^3\mathbf{q}, \ldots, \quad P^k\mathbf{q}, \ldots$$

quando $k \to \infty$?

22. (a) Se P for uma matriz estocástica regular $n \times n$ com vetor de estado estacionário $\mathbf{q}$ e se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ forem os vetores unitários canônicos em forma de coluna, o que pode ser dito sobre o comportamento da sequência

$$P\mathbf{e}_i, \quad P^2\mathbf{e}_i, \quad P^3\mathbf{e}i, \ldots, \quad P^k\mathbf{e}_i, \ldots$$

quando $k \to \infty$, com $i = 1, 2, \ldots, n$?

(b) O que isso diz sobre o comportamento dos vetores coluna de P^k quando $k \to \infty$?

23. Prove que o produto de duas matrizes estocásticas é uma matriz estocástica. [*Sugestão*: escreva cada coluna do produto como uma combinação linear das colunas do primeiro fator.]

24. Prove que se P for uma matriz estocástica cujas entradas são todas maiores do que ou iguais a ρ, então as entradas de P^2 serão maiores do que ou iguais a ρ.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) O vetor $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ é um vetor probabilidade.

(b) A matriz $\begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 \\ 0{,}8 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz estocástica regular.

(c) Os vetores coluna de uma matriz de transição são vetores probabilidade.

(d) O vetor de estado estacionário de uma cadeia de Markov com matriz de transição P é qualquer solução do sistema linear $(I - P)\mathbf{q} = \mathbf{0}$.

(e) O quadrado de qualquer matriz estocástica regular é estocástica.

Capítulo 4 Exercícios suplementares

1. Seja V o conjunto de todos os ternos ordenados de números reais e considere as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ por

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), \quad a\mathbf{u} = (au_1, 0, 0)$$

(a) Calcule $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $a\mathbf{u}$ com $\mathbf{u} = (3, -2, 4)$, $\mathbf{v} = (1, 5, -2)$ e $a = -1$.

(b) Explique em palavras por que V é fechado na adição e na multiplicação por escalar.

(c) Como a adição em V é a operação de adição padrão de R^3, alguns axiomas de espaço vetorial valem em V porque é sabido que valem em R^3. Quais axiomas da Definição 1 da Seção 4.1 são esses?

(d) Mostre que valem os Axiomas 7, 8 e 9.

(e) Mostre que o Axioma 10 falha com as operações dadas.

2. Em cada parte, o espaço solução do sistema é um subespaço de R^3 e, portanto, deve ser uma reta pela origem, um plano pela origem, todo o R^3 ou só a origem. Para cada sistema, determine qual é o caso. Se o subespaço for um plano, encontre uma equação desse plano; e se for uma reta, obtenha equações paramétricas.

(a) $0x + 0y + 0z = 0$

(b)
$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ 6x - 9y + 3z &= 0 \\ -4x + 6y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x - 2y + 7z &= 0 \\ -4x + 8y + 5z &= 0 \\ 2x - 4y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x + 4y + 8z &= 0 \\ 2x + 5y + 6z &= 0 \\ 3x + y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

3. Com quais valores de s é o espaço solução de

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + sx_3 &= 0 \\ x_1 + sx_2 + \ \ x_3 &= 0 \\ sx_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

uma reta pela origem, um plano pela origem, a origem ou todo o R^3?

4. (a) Expresse $(4a, a - b, a + 2b)$ como uma combinação linear de $(4, 1, 1)$ e $(0, -1, 2)$.

(b) Expresse $(3a + b + 3c, -a + 4b - c, 2a + b + 2c)$ como uma combinação linear de $(3, -1, 2)$ e $(1, 4, 1)$.

(c) Expresse $(2a - b + 4c, 3a - c, 4b + c)$ como uma combinação linear de três vetores não nulos.

5. Seja W o espaço gerado por $\mathbf{f} = \text{sen}\, x$ e $\mathbf{g} = \cos x$.

(a) Mostre que dado qualquer valor de θ, $\mathbf{f}_1 = \text{sen}(x + \theta)$ e $\mathbf{g}_1 = \cos(x + \theta)$ são vetores em W.

(b) Mostre que $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{g}_1$ formam uma base de W.

6. (a) Expresse $\mathbf{v} = (1, 1)$ como uma combinação linear de $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (2, 1)$ de duas maneiras distintas.

(b) Explique por que isso não contradiz o Teorema 4.4.1.

7. Seja A uma matriz $n \times n$ e sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vetores linearmente independentes em R^n expressos como matrizes $n \times 1$. Para ter $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_n$ linearmente independentes, o que A deve satisfazer?

8. Uma base de P_n necessariamente contém algum polinômio de grau k com qualquer $k = 0, 1, 2, \ldots, n$? Justifique sua resposta.

9. Para uso neste exercício, definimos uma "matriz tabuleiro" como sendo uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i + j \text{ for par} \\ 0 & \text{se } i + j \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Em cada caso, encontre o posto e a nulidade da matriz tabuleiro dada.

(a) A matriz tabuleiro 3×3.

(b) A matriz tabuleiro 4×4.

(c) A matriz tabuleiro $n \times n$.

10. Para uso neste exercício, definimos uma "matriz X" como sendo uma matriz quadrada com um número ímpar de linhas e colunas que tem 0 em cada entrada, exceto nas diagonais principal e secundária, onde tem todas entradas iguais a 1. Encontre o posto e a nulidade das matrizes X a seguir.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) A matriz X de tamanho $(2n + 1) \times (2n + 1)$.

11. Em cada parte, mostre que o conjunto de polinômios é um subespaço de P_n e encontre uma base desse subespaço.

(a) Todos os polinômios em P_n tais que $p(-x) = p(x)$.

(b) Todos os polinômios em P_n tais que $p(0) = 0$.

12. (***Requer Cálculo***) Mostre que o conjunto de todos os polinômios em P_n que têm uma tangente horizontal em $x = 0$ é um subespaço de P_n. Encontre uma base desse subespaço.

13. (a) Encontre uma base do espaço vetorial de todas as matrizes 3×3 simétricas.

(b) Encontre uma base do espaço vetorial de todas as matrizes 3×3 antissimétricas.

14. Em Álgebra Linear avançada, prova-se o critério de posto seguinte usando determinantes. *O posto de uma matriz A é r se, e só se, A tem alguma submatriz r × r de determinante não nulo e todas as submatrizes de tamanho maior têm determinante nulo.* [*Observação*: uma submatriz de A é qualquer matriz obtida de A por eliminação de linhas ou colunas de A. A própria matriz A também é considerada uma submatriz de A.] Em cada parte, use esse critério para encontrar o posto da matriz.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

15. Use o resultado do Exercício 14 para encontrar os postos possíveis das matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{bmatrix}$$

16. Prove: se S for uma base de um espaço vetorial V, então valem as relações seguintes com quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e qualquer escalar k.

(a) $(\mathbf{u} + \mathbf{v})_S = (\mathbf{u})_S + (\mathbf{v})_S$

(b) $(k\mathbf{v})_S = k(\mathbf{v})_S$

Esta página foi deixada em branco intencionalmente.

CAPÍTULO 5

Autovalores e Autovetores

CONTEÚDO DO CAPÍTULO

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, abordamos as classes de escalares e vetores conhecidas como "autovalores" e "autovetores", que são especiais por suas características peculiares. A ideia subjacente surgiu no estudo do movimento rotacional e, mais tarde, foi usada para classificar vários tipos de superfícies e para descrever soluções de certas equações diferenciais. No início do século XX, foi aplicada a matrizes e transformações matriciais e hoje tem aplicações a áreas tão diversas como computação gráfica, vibrações mecânicas, fluxo do calor, dinâmica populacional, mecânica quântica e até economia.

5.1 Autovalores e autovetores

Nesta seção, definimos os conceitos de "autovalor" e "autovetor" e discutimos algumas de suas propriedades básicas.

Começamos com a definição principal desta seção.

Definição de autovalor e autovetor

DEFINIÇÃO 1 Se A for uma matriz $n \times n$, então um vetor não nulo $\mathbf{x}$ em R^n é denominado ***autovetor*** de A (ou do operador matricial T_A) se $A\mathbf{x}$ for um múltiplo escalar de x, isto é,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

com algum escalar λ. O escalar λ é denominado ***autovalor*** de A (ou de T_A), e dizemos que $\mathbf{x}$ é um ***autovetor associado a*** λ.

Em geral, a imagem de um vetor $\mathbf{x}$ pela multiplicação com uma matriz quadrada A defere de $\mathbf{x}$ tanto em magnitude quanto em direção e sentido. No entanto, no caso especial em que $\mathbf{x}$ for um autovetor de A, a multiplicação por A deixa a direção inalterada. Por exemplo, em R^2 ou R^3, a multiplicação por A aplica cada autovetor $\mathbf{x}$ de A (se houver) sobre a mesma reta pela origem determinada por $\mathbf{x}$. Dependendo do sinal e da magnitude do autovalor λ associado a $\mathbf{x}$, a operação $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ comprime ou expande $\mathbf{x}$ pelo fator λ, invertendo o sentido no caso em que λ for negativo (Figura 5.5.1).

Impomos a exigência de um autovetor ser não nulo para evitar o caso irrelevante $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$, que vale com quaisquer A e λ.

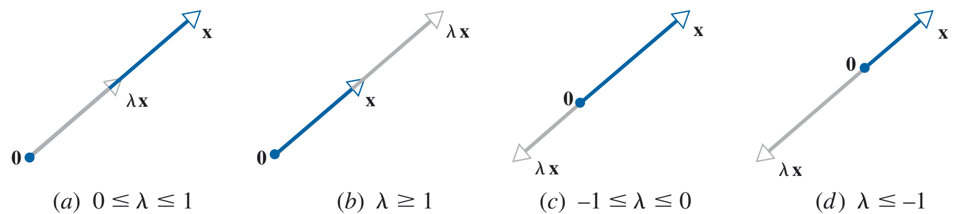


Figura 5.1.1

▶ EXEMPLO 1 Autovetor de uma matriz 2 × 2

O vetor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um autovetor de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

associado ao autovalor $\lambda = 3$, pois

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$$

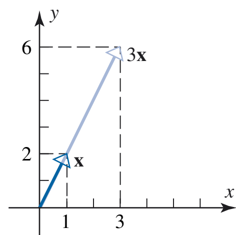


Figura 5.1.2

Geometricamente, a multiplicação por A expandiu o vetor $\mathbf{x}$ pelo fator 3 (Figura 5.1.2). ◀

Calculando autovalores e autovetores

Nosso próximo objetivo é elaborar um procedimento geral para encontrar autovalores e autovetores de uma matriz A de tamanho $n \times n$. Começamos com um procedimento para encontrar os autovalores de A. Inicialmente, observe que a equação $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ pode ser reescrita como $A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$, ou, equivalentemente, como

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$$

Para que λ seja um autovalor de A, essa equação deve possuir alguma solução $\mathbf{x}$ não nula. No entanto, segue das partes (*b*) e (*g*) do Teorema 4.10.4 que isso ocorre se, e só se, a matriz de coeficientes $\lambda I - A$ tem determinante nulo. Assim, temos o resultado seguinte.

TEOREMA 5.1.1 *Se A for uma matriz $n \times n$, então λ é um autovalor de A se, e só se, λ satisfaz a equação*

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{1}$$

*Essa equação é a **equação característica** de A.*

▶ EXEMPLO 2 Encontrando autovalores

No Exemplo 1, observamos que $\lambda = 3$ é um autovalor da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

mas não explicamos como foi encontrado. Use a equação característica para encontrar todos os autovalores dessa matriz.

Solução Segue da Fórmula (1) que os autovalores de A são as soluções da equação $\det(\lambda I - A) = 0$, que pode ser escrita como

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

da qual obtemos

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \tag{2}$$

Isso mostra que os autovalores de A são $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$. Assim, além do autovalor $\lambda = 3$ usado no Exemplo 1, descobrimos o segundo autovalor $\lambda = -1$. ◀

Quando o determinante $\det(\lambda I - A)$ do lado esquerdo de (1) é expandido, resulta um polinômio $p(\lambda)$ de grau n denominado ***polinômio característico*** de A. Por exemplo, segue de (2) que o polinômio característico da matriz A de tamanho 2×2 do Exemplo 2 é

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

que é um polinômio de grau 2. Em geral, o polinômio característico de uma matriz $n \times n$ é da forma

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

em que 1 é o coeficiente de λ^n (Exercício 17). Como um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes distintas, segue que a equação

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0 \tag{3}$$

tem, no máximo, n soluções distintas e, consequentemente, que uma matriz $n \times n$ tem, no máximo, n autovalores distintos. Como algumas dessas soluções podem ser números complexos, é possível que uma matriz tenha autovalores complexos, mesmo se a própria matriz tiver entradas reais. Discutiremos esse assunto numa seção posterior, pois agora vamos nos concentrar em exemplos nos quais os autovalores são números reais.

▶ EXEMPLO 3 Autovalores de uma matriz 3×3

Encontre os autovalores de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Solução O polinômio característico de A é

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

Portanto, os autovalores de A satisfazem a equação cúbica

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0 \tag{4}$$

Para resolver essa equação, começamos procurando soluções inteiras. Essa tarefa pode ser simplificada se lembrarmos do fato de que todas as soluções inteiras (se houver) de uma equação polinomial

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

de *coeficientes inteiros* são divisores do termo constante c_n. Assim, as únicas possíveis soluções inteiras de (4) são os divisores de -4, ou seja, ± 1, ± 2, ± 4. Substituir sucessivamente cada um desses valores em (4) mostra que $\lambda - 4$ é uma solução inteira. Consequentemente, $\lambda = 4$ deve ser um fator do lado esquerdo de (4). Dividindo $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$ por $\lambda - 4$, temos que (4) pode ser reescrita como

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

Assim, as demais soluções de (4) satisfazem a equação quadrática

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

Nas aplicações que envolvem matrizes grandes, muitas vezes não é factível calcular a equação característica diretamente, de modo que devem ser usados outros métodos para encontrar autovalores. Esses métodos serão abordados no Capítulo 9.

que pode ser resolvida pela fórmula quadrática. Assim, os autovalores de A são

$$\lambda = 4, \quad \lambda = 2 + \sqrt{3}, \quad \text{e} \quad \lambda = 2 - \sqrt{3}$$

▶ EXEMPLO 4 Autovalores de uma matriz triangular superior

Encontre os autovalores da matriz triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Solução Lembrando que o determinante de uma matriz triangular é o produto das entradas na diagonal principal (Teorema 2.1.2), obtemos

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ 0 & \lambda - a_{12} & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a_{44} \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44})$$

Assim, a equação característica é

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) = 0$$

e os autovalores são

$$\lambda = a_{11}, \quad \lambda = a_{22}, \quad \lambda = a_{33}, \quad \lambda = a_{44}$$

que são precisamente as entradas na diagonal principal de A. ◀

O teorema geral seguinte deveria ser evidente a partir das contas no exemplo precedente.

TEOREMA 5.1.2 *Se A for uma matriz $n \times n$ triangular (superior, inferior, ou diagonal), então os autovalores de A são as entradas na diagonal principal de A.*

▶ EXEMPLO 5 Autovalores de uma matriz triangular inferior

Por inspeção, os autovalores da matriz triangular inferior

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -8 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

são $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{2}{3}$ e $\lambda = -\frac{1}{4}$. ◀

Se tivéssemos o Teorema 5.1.2 à nossa disposição no Exemplo 2, poderíamos ter antecipado o resultado obtido naquele exercício.

TEOREMA 5.1.3 *Se A for uma matriz $n \times n$, são equivalentes as afirmações seguintes.*

(*a*) *λ é um autovalor de A.*

(*b*) *O sistema $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de equações tem soluções não triviais.*

(*c*) *Existe algum vetor não nulo $\mathbf{x}$ tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.*

(*d*) *λ é uma solução da equação característica* $\det(\lambda I - A) = 0$.

Encontrando autovetores e bases para autoespaços

Agora que sabemos como encontrar autovalores de uma matriz, passamos ao problema de encontrar os autovetores associados. Como os autovetores associados a um autovalor λ de uma matriz A são os vetores não nulos que satisfazem a equação

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

esses autovetores são os vetores não nulos do espaço nulo da matriz $\lambda I - A$. Dizemos que esse espaço nulo é o ***autoespaço*** de A associado a λ. Enunciado de outra forma, *o autoespaço de A associado ao autovalor λ é o espaço solução do sistema homogêneo* $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

> Observe que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ está em cada autoespaço, mesmo não sendo um autovetor. Assim, são os vetores *não nulos* de um autoespaço que são os autovetores.

▶ EXEMPLO 6 Bases de autoespaços

Encontre bases dos autoespaços da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução No Exemplo 1, vimos que a equação característica de A é

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

da qual obtemos os autovalores $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$. Assim, temos dois autoespaços de A, cada um associado a um autovalor.

Por definição,

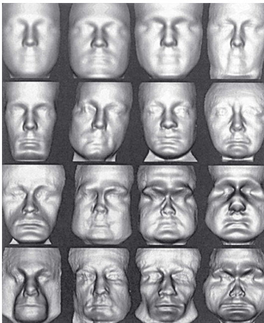
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = 3$ se, e só se, $\mathbf{x}$ é uma solução não trivial de $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ou seja, de

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se $\lambda = 3$, essa equação é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Nota histórica Os métodos da Álgebra Linear estão sendo utilizados no novo campo do reconhecimento facial computadorizado. Os pesquisadores da área estão trabalhando com a ideia que toda face humana num certo grupo racial é uma combinação de umas poucas dúzias de formatos primários. Por exemplo, analisando as imagens tridimensionais escaneadas de muitas faces, pesquisadores da Universidade Rockefeller produziram tanto um formato facial médio do grupo caucásico, denominado ***face média*** (à esquerda na linha superior na figura dada), quanto um conjunto de variações padronizadas daquele formato, denominadas ***autofaces*** (15 das quais estão exibidas na figura dada). Essas formas são assim denominadas por serem autovetores de uma certa matriz que armazena a informação facial digitalizada. Os formatos faciais são representados matematicamente como combinações lineares das autofaces.

[Imagem: Cortesia Dr. Joseph Atick, Dr. Norman Redlich e Dr. Paul Griffith.]

cuja solução geral é

$$x_1 = \tfrac{1}{2}t, \quad x_2 = t$$

(verifique) ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

é uma base do autoespaço associado a $\lambda = 3$. Deixamos para o leitor seguir o padrão dessas contas para mostrar que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é uma base do autoespaço associado a $\lambda = -1$.

► EXEMPLO 7 Autovetores e bases de autoespaços

Encontre bases dos autoespaços de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução A equação característica de A é $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$ ou, fatorada, $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$ (verifique). Assim, os autovalores distintos de A são $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$, e existem dois autoespaços de A.

Por definição,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

é um autovetor de A associado a λ se, e só se, $\mathbf{x}$ é uma solução não trivial de $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

No caso $\lambda = 2$, a Fórmula (5) se torna

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse sistema por eliminação gaussiana, obtemos (verifique)

$$x_1 = -s, \quad x_2 = t, \quad x_3 = s$$

Assim, os autovetores de A associados a $\lambda = 2$ são os vetores não nulos da forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

são linearmente independentes, (por quê?), esses vetores formam uma base do autoespaço associado a $\lambda = 2$.

Se $\lambda = 1$, então (5) se torna

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos (verifique)

$$x_1 = -2s, \quad x_2 = s, \quad x_3 = s$$

Assim, os autovetores associados a $\lambda = 1$ são os vetores não nulos da forma

$$\begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{de modo que} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é uma base do autoespaço associado a $\lambda = 1$. ◀

Potências de uma matriz

Uma vez obtidos os autovalores e autovetores de uma matriz A, é uma questão simples obter os autovalores e autovetores de qualquer potência inteira positiva de A; por exemplo, se λ for um autovalor de A e $\mathbf{x}$ um autovetor associado, então

$$A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}$$

o que mostra que λ^2 é um autovalor de A^2 e que $\mathbf{x}$ é um autovetor associado. Em geral, temos o resultado seguinte.

TEOREMA 5.1.4 *Se k for um inteiro positivo, λ um autovalor de uma matriz A e $\mathbf{x}$ um autovetor associado, então λ^k é um autovalor de A^k e $\mathbf{x}$ é um autovetor associado.*

▶ EXEMPLO 8 Potências de uma matriz

No Exemplo 7, mostramos que os autovalores de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

são $\lambda = 2$ e $\lambda = 1$, de modo que, pelo Teorema 5.1.4, ambos $\lambda = 2^7 = 128$ e $\lambda = 1^7 = 1$ são autovalores de A^7. Também mostramos que

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

são autovetores de A associados ao autovetor $\lambda = 2$, de modo que, pelo Teorema 5.1.4, esses vetores também são autovetores de A^7 associados a $\lambda = 2^7 = 128$. Analogamente, o autovetor

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de A associado a $\lambda = 1$ também é um autovetor de A^7 associado a $\lambda = 1^7 = 1$. ◀

Autovalores e invertibilidade

O teorema seguinte estabelece uma relação entre os autovalores e a invertibilidade de uma matriz.

TEOREMA 5.1.5 *Uma matriz quadrada A é invertível se, e só se, $\lambda = 0$ não é um autovalor de A.*

Prova Suponha que A seja uma matriz $n \times n$ e observe primeiro que $\lambda = 0$ é uma solução da equação característica

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

se, e só se, o termo constante c_n for zero. Assim, é suficiente provar que A é invertível se, e só se, $c_n \neq 0$. Mas

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

ou, tomando $\lambda = 0$,

$$\det(-A) = c_n \quad \text{ou} \quad (-1)^n \det(A) = c_n$$

Segue da última equação que $\det(A) = 0$ se, e só se, $c_n = 0$ e isso, por sua vez, implica que A é invertível se, e só se, $c_n \neq 0$. ◀

▶ EXEMPLO 9 Autovalores e invertibilidade

A matriz A no Exemplo 7 é invertível, pois tem autovalores $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$, nenhum dos quais é zero. Deixamos para o leitor conferir essa conclusão mostrando que $\det(A) \neq 0$. ◀

Mais sobre o teorema da equivalência

Como nosso resultado final nesta seção, usamos o Teorema 5.1.5 para acrescentar mais uma parte ao Teorema 4.10.4.

TEOREMA 5.1.6 Afirmações equivalentes

Se A for uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) *A é invertível.*
(b) *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.*
(c) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.*
(d) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*
(e) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$.*
(f) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$.*
(g) $\det(A) \neq 0$.
(h) *Os vetores coluna de A são linearmente independentes.*
(i) *Os vetores linha de A são linearmente independentes.*
(j) *Os vetores coluna de A geram R^n.*
(k) *Os vetores linha de A geram R^n.*
(l) *Os vetores coluna de A formam uma base de R^n.*
(m) *Os vetores linha de A formam uma base de R^n.*
(n) *A tem posto n.*
(o) *A tem nulidade 0.*
(p) *O complemento ortogonal do espaço nulo de A é R^n.*
(q) *O complemento ortogonal do espaço linha de A é $\{\mathbf{0}\}$.*
(r) *A imagem de T_A é R^n.*
(s) *T_A é um operador injetor.*
(t) *$\lambda = 0$ não é um autovalor de A.*

Esse teorema relaciona todos os principais tópicos que estudamos até aqui.

Revisão de conceitos
- Autovetor
- Autovalor
- Equação característica
- Polinômio característico
- Autoespaço
- Teorema das equivalências

Aptidões desenvolvidas
- Encontrar os autovalores de uma matriz.
- Encontrar bases dos autoespaços de uma matriz.

Conjunto de exercícios 5.1

▶ Nos Exercícios **1–2**, confirme por multiplicação que $\mathbf{x}$ é um autovetor de A e encontre o autovalor correspondente. ◀

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Em cada parte, encontre a equação característica da matriz.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Encontre os autovalores das matrizes no Exercício 3.

5. Encontre bases dos autoespaços das matrizes do Exercício 3.

6. Em cada parte, encontre a equação característica da matriz.

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

7. Encontre os autovalores das matrizes no Exercício 6.

8. Encontre bases dos autoespaços das matrizes do Exercício 6.

9. Em cada parte, encontre a equação característica da matriz.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

10. Encontre os autovalores das matrizes no Exercício 9.

11. Encontre bases dos autoespaços das matrizes do Exercício 9.

12. Em cada parte, encontre os autovalores por inspeção.

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

13. Encontre os autovalores de A^9, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

14. Encontre os autovalores e bases dos autoespaços de A^{25}, sendo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

15. Seja A uma matriz 2×2. Dizemos que uma reta pela origem de R^2 é ***invariante*** por A se $A\mathbf{x}$ estiver nessa reta sempre que $\mathbf{x}$ estiver. Em cada parte, obtenha as equações de todas as retas de R^2 que são invariantes pela matriz dada.

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

16. Encontre $\det(A)$, sabendo que A tem polinômio característico $p(\lambda)$.

(a) $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 5$

(b) $p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - 7$

[*Sugestão*: ver a prova do Teorema 5.1.5.]

17. Seja A uma matriz $n \times n$.

(a) Prove que o polinômio característico de A tem grau n.

(b) Prove que o coeficiente de λ^n no polinômio característico é 1.

18. Mostre que a equação característica de uma matriz A de tamanho 2×2 pode ser expressa como $\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$, onde $\text{tr}(A)$ é o traço de A.

19. Use o resultado do Exercício 18 para mostrar que se

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

então as soluções da equação característica de A são

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\left[(a + d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}\,\right]$$

Use esse resultado para mostrar que A tem

(a) dois autovalores reais distintos se $(a - d)^2 + 4bc > 0$.

(b) um autovalor real se $(a - d)^2 + 4bc = 0$.

(c) nenhum autovalor real se $(a - d)^2 + 4bc < 0$.

20. Seja A a matriz do Exercício 19. Mostre que se $b \neq 0$, então

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -b \\ a - \lambda_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -b \\ a - \lambda_2 \end{bmatrix}$$

são autovetores de A associados, respectivamente, aos autovalores

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\left[(a + d) + \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}\,\right]$$

e

$$\lambda_2 = \tfrac{1}{2}\left[(a + d) - \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}\,\right]$$

21. Use o resultado do Exercício 18 para provar que se $p(\lambda)$ for o polinômio característico de uma matriz A de tamanho 2×2, então $p(A) = 0$.

22. Prove: se a, b, c e d são números inteiros tais que $a + b = c + d$, então

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tem autovalores inteiros, a saber, $\lambda_1 = a + b$ e $\lambda_2 = a - c$.

23. Prove: se λ for um autovalor de uma matriz invertível A com autovetor associado $\mathbf{x}$, então $1/\lambda$ é um autovalor de A^{-1} com autovetor associado $\mathbf{x}$.

24. Prove: se λ for um autovalor de A com autovetor associado $\mathbf{x}$ e se s for um escalar, então $\lambda - s$ é um autovalor de $A - sI$ com autovetor associado $\mathbf{x}$.

25. Prove: se λ for um autovalor de A com autovetor associado $\mathbf{x}$, então λ é um autovalor de sA com autovetor associado $\mathbf{x}$, qualquer que seja o escalar s.

26. Encontre os autovalores e bases dos autoespaços de

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

e use os Exercícios 23 e 24 para encontrar os autovalores e bases dos autoespaços de

(a) A^{-1} (b) $A - 3I$ (c) $A + 2I$

27. (a) Prove que se A for uma matriz quadrada, então A e A^T têm os mesmos autovalores. [*Sugestão*: olhe para a equação característica $\det(\lambda I - A) = 0$.]

(b) Mostre que A e A^T não precisam ter os mesmos autoespaços. [*Sugestão*: use o resultado do Exercício 20 para encontrar uma matriz 2×2 tal que A e A^T têm autoespaços diferentes.]

28. Suponha que o polinômio característico de alguma matriz A seja $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2(\lambda - 4)^3$. Em cada parte responda a pergunta e explique seu raciocínio.

(a) Qual é o tamanho de A?

(b) A é invertível?

(c) Quantos autoespaços tem A?

29. Às vezes, os autovetores que estudamos nesta seção são denominados ***autovetores à direita***, para distingui-los de ***autovetores à esquerda***, que são matrizes coluna $\mathbf{x}$ de tamanho $n \times 1$ que satisfazem a equação $\mathbf{x}^T A = \mu \mathbf{x}^T$ com algum escalar μ. Qual será a relação, se houver, entre os autovetores à direita e autovalores correspondentes e os autovetores à esquerda e autovalores correspondentes?

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(g), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se A for uma matriz quadrada e $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ com algum escalar não nulo λ, então $\mathbf{x}$ é um autovetor de A.

(b) Se λ for um autovalor de uma matriz A, então o sistema linear $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ só tem a solução trivial.

(c) Se o polinômio característico de uma matriz A for $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, então A é invertível.

(d) Se λ for um autovalor de uma matriz A, então o autoespaço de A associado a λ é o conjunto de autovetores de A associados a λ.

(e) Se 0 for um autovalor de uma matriz A, então A^2 é singular.

(f) Os autovalores de uma matriz A são iguais aos autovalores da forma escalonada reduzida por linhas de A.

(g) Se 0 for um autovalor de uma matriz A, então o conjunto de vetores coluna de A é linearmente independente.

5.2 Diagonalização

Nesta seção, abordamos o problema de encontrar uma base de R^n que consista em autovetores de uma dada matriz A de tamanho $n \times n$. Essas bases podem ser usadas para estudar propriedades geométricas de A e para simplificar muitas contas envolvendo A. Essas bases também têm significado físico numa variedade de aplicações, algumas das quais consideramos mais adiante neste texto.

O problema da diagonalização matricial

Nosso primeiro objetivo nesta seção é mostrar que são equivalentes os dois problemas a seguir que, aparentemente, são bastante diferentes.

Problema 1 Dada uma matriz A de tamanho $n \times n$, existe alguma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal?

Problema 2 Dada uma matriz A de tamanho $n \times n$, existem n autovetores de A linearmente independentes?

Semelhança

O produto matricial $P^{-1}AP$ que aparece no Problema 1 é denominado uma ***transformação de semelhança*** da matriz A. Esses produtos são importantes no estudo de autovetores e autovalores, de modo que começamos com alguma terminologia associada.

DEFINIÇÃO 1 Se A e B forem matrizes quadradas, dizemos que B é ***semelhante*** a A se existir alguma matriz invertível P tal que $B = P^{-1}AP$.

Note que se B for semelhante a A, então também é verdade que A é semelhante a B, já que podemos expressar A como $A = Q^{-1}BQ$ tomando $Q = P^{-1}$. Por isso, em geral dizemos que A e B são ***matrizes semelhantes*** se uma delas for semelhante à outra.

Invariantes de semelhança

As matrizes semelhantes têm muitas propriedades em comum. Por exemplo, se $B = P^{-1}AP$, então decorre que A e B têm o mesmo determinante, já que

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P)$$
$$= \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) = \det(A)$$

Em geral, dizemos que uma propriedade de matrizes é ***invariante por semelhança*** ou que a propriedade é um ***invariante de semelhança***, se ela for compartilhada por quaisquer duas matrizes semelhantes. A Tabela 1 lista os invariantes de semelhança mais importantes. As provas de alguns desses resultados são dadas nos exercícios.

Expresso na linguagem de semelhança, o Problema 1 é equivalente a perguntar se a matriz A é semelhante a alguma matriz diagonal. Nesse caso, a matriz diagonal terá todas as propriedades invariantes por semelhança de A, mas por ter uma forma mais simples, é mais simples analisar e trabalhar com a matriz diagonal. Essa importante ideia tem uma terminologia associada.

DEFINIÇÃO 2 Uma matriz quadrada A é dita ***diagonalizável*** se for semelhante a alguma matriz diagonal, ou seja, se existir alguma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal. Nesse caso, dizemos que a matriz P ***diagonaliza*** A.

Tabela 1 Invariantes de semelhança

Propriedade	Descrição
Determinante	A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo determinante.
Invertibilidade	A é invertível se, e só se, $P^{-1}AP$ é invertível.
Posto	A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo posto.
Nulidade	A e $P^{-1}AP$ têm a mesma nulidade.
Traço	A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo traço.
Polinômio característico	A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo polinômio característico.
Autovalores	A e $P^{-1}AP$ têm os mesmos autovalores.
Dimensão de autoespaço	Se λ for um autovalor de A e, portanto, de $P^{-1}AP$, então o autoespaço de A associado a λ e o autoespaço de $P^{-1}AP$ associado a λ têm a mesma dimensão.

O teorema seguinte mostra que os Problemas 1 e 2 colocados no início desta seção são, na verdade, formas diferentes do mesmo problema matemático.

TEOREMA 5.2.1 *Se A for uma matriz $n \times n$, são equivalentes as afirmações seguintes.*

(*a*) *A é diagonalizável.*

(*b*) *A tem n autovetores linearmente independentes.*

A parte (*b*) do Teorema 5.2.1 é equivalente a dizer que existe alguma base de R^n consistindo em autovetores de A. Por quê?

Prova (a) ⇒ (b) Como estamos supondo que A é diagonalizável, existem uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$ ou, equivalentemente,

$$AP = PD \tag{1}$$

Denotando os vetores coluna de P por $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ e supondo que as entradas diagonais de D sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ segue, pela Fórmula (6) da Seção 1.3, que o lado esquerdo de (1) pode ser expresso por

$$AP = A[\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] = [A\mathbf{p}_1 \quad A\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{p}_n]$$

e, como observamos logo depois do Exemplo 1 da Seção 1.7, o lado direito de (1) pode ser expresso por

$$PD = [\lambda_1\mathbf{p}_1 \quad \lambda_2\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\mathbf{p}_n]$$

Assim, segue de (1) que

$$A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1, \quad A\mathbf{p}_2 = \lambda_2\mathbf{p}_2, \ldots, \quad A\mathbf{p}_n = \lambda_n\mathbf{p}_n \tag{2}$$

Como P é invertível, sabemos do Teorema 5.1.6 que seus vetores coluna $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ são linearmente independentes (e, portanto, não nulos). Assim, segue de (2) que esses n vetores coluna são autovetores de A.

Prova (b) ⇒ (a) Suponha que A tenha n autovetores linearmente independentes $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ com autovalores associados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Escrevendo

$$P = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n]$$

e denotando por D a matriz diagonal de entradas diagonais sucessivas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, obtemos

$$\begin{aligned} AP &= A[\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] = [A\mathbf{p}_1 \quad A\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{p}_n] \\ &= [\lambda_1\mathbf{p}_1 \quad \lambda_2\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\mathbf{p}_n] = PD \end{aligned}$$

Como os vetores coluna de P são linearmente independentes, segue do Teorema 5.1.6 que P é invertível, de modo que essa última equação pode ser reescrita como $P^{-1}AP = D$, mostrando que A é diagonalizável. ◀

Um procedimento para diagonalizar uma matriz

O teorema precedente garante que uma matriz A de tamanho $n \times n$ com n autovetores linearmente independentes é diagonalizável, e a prova sugere o método seguinte para diagonalizar A.

Procedimento para diagonalizar uma matriz

Passo 1. Confirme que a matriz é realmente diagonalizável encontrando n autovetores linearmente independentes. Uma maneira de fazer isso é encontrar uma base de cada autoespaço e juntar todos esses vetores num único conjunto S. Se esse conjunto tiver menos do que n elementos, a matriz não é diagonalizável.

Passo 2. Forme a matriz $P = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n]$ que tem os vetores de S como vetores coluna.

Passo 3. A matriz $P^{-1}AP$ será diagonal com os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ correspondentes aos autovetores $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ como entradas diagonais sucessivas.

▶ **EXEMPLO 1** **Encontrando uma matriz *P* que diagonaliza uma matriz *A***

Encontre uma matriz P que diagonalize

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução No Exemplo 7 da seção precedente, verificamos que a equação característica de A é

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

e encontramos as seguintes bases dos autoespaços,

$$\lambda = 2: \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \lambda = 1: \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Há um total de três vetores de base, portanto, a matriz

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonaliza A. Para conferir, deixamos para o leitor verificar que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ◀

Em geral, não existe uma ordem preferencial para as colunas de P. Como a i-ésima entrada diagonal de $P^{-1}AP$ é um autovalor do i-ésimo vetor coluna de P, mudar a ordem das colunas de P só muda a ordem dos autovalores na diagonal de $P^{-1}AP$. Assim, se tivéssemos escrito

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

no exemplo precedente, teríamos obtido

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

▶ EXEMPLO 2 Uma matriz que não é diagonalizável

Encontre uma matriz P que diagonalize

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução O polinômio característico de A é

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 3 & -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

de modo que a equação característica é

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

Assim, os autovalores distintos de A são $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$. Deixamos para o leitor mostrar que são bases dos autoespaços os vetores

$$\lambda = 1: \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \lambda = 2: \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como A é 3×3 e só há um total de dois vetores de base, A não é diagonalizável.

Solução alternativa Se só estivermos interessados em determinar se uma dada matriz é ou não diagonalizável, sem precisar encontrar uma matriz P que diagonalize A, então não é necessário calcular bases para os autoespaços, bastando encontrar as dimensões dos autoespaços. Nesse exemplo, o autoespaço associado a $\lambda = 1$ é o espaço solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como a matriz de coeficientes tem posto 2 (verifique), o Teorema 4.8.2 traz que a nulidade dessa matriz é 1 e, portanto, o autoespaço associado a $\lambda = 1$ é unidimensional.

O autoespaço associado a $\lambda = 2$ é o espaço solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Essa matriz de coeficientes também tem posto 2 e nulidade 1 (verifique), de modo que o autoespaço associado a $\lambda = 2$ também é unidimensional. Como os autoespaços produzem um total de dois vetores de base, sendo necessários três, a matriz A não é diagonalizável. ◀

No Exemplo 1, usamos, sem justificar, que são linearmente independentes os vetores coluna de P, que consistem em vetores de bases dos vários autoespaços de A. O próximo teorema, demonstrado ao final desta seção, mostra que isso realmente é justificável.

TEOREMA 5.2.2 *Se* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ *forem autovetores de uma matriz A associados a autovalores distintos, então* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ *é um conjunto linearmente independente.*

Observação O Teorema 5.2.2 é um caso especial de um resultado mais geral, como segue. Suponha que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sejam autovalores distintos e que escolhamos um conjunto linearmente independente em cada autoespaço correspondente. Se juntarmos todos esses vetores num único conjunto, o resultado será um conjunto que ainda é linearmente independente. Por exemplo, escolhendo três vetores linearmente independentes de um autoespaço e dois vetores linearmente independentes de um outro autoespaço, então os cinco vetores juntos formam um conjunto linearmente independente. Omitimos a prova.

Como uma consequência do Teorema 5.2.2, obtemos o resultado importante a seguir.

TEOREMA 5.2.3 *Se uma matriz A de tamanho* $n \times n$ *tem n autovalores distintos, então A é diagonalizável.*

Prova Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ são autovetores associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ então, pelo Teorema 5.2.2, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes. Assim, A é diagonalizável pelo Teorema 5.2.1. ◀

▶ EXEMPLO 3 Usando o Teorema 5.2.3

Vimos, no Exemplo 3 da seção anterior, que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

tem três autovalores distintos, $\lambda = 4$, $\lambda = 2 + \sqrt{3}$ e $\lambda = 2 - \sqrt{3}$. Portanto, A é diagonalizável e

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

com alguma matriz invertível P. Se quisermos, poderemos obter a matriz P pelo método mostrado no Exemplo 1 desta seção.

▶ EXEMPLO 4 Diagonalizabilidade de matrizes triangulares

Pelo Teorema 5.1.2, os autovalores de uma matriz triangular são as entradas na diagonal principal. Assim, uma matriz triangular com entradas distintas na diagonal principal é diagonalizável. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonalizável de autovalores $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$, $\lambda_4 = -2$. ◀

Calculando as potências de uma matriz

Em muitas aplicações, é necessário calcular potências elevadas de uma matriz quadrada. Veremos a seguir que se a matriz for diagonalizável, podemos simplificar as contas diagonalizando essa matriz.

Para começar, digamos que A seja uma matriz diagonalizável de tamanho $n \times n$, que P diagonaliza A e que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = D$$

Elevando ambos os lados dessa equação ao quadrado, obtemos

$$(P^{-1}AP)^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} = D^2$$

Podemos reescrever o lado esquerdo dessa equação como

$$(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AIAP = P^{-1}A^2P$$

de onde encontramos a relação $P^{-1}A^2P = D^2$. Mais geralmente, se k for um inteiro positivo, então uma conta análoga mostra que

$$P^{-1}A^kP = D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

que pode ser reescrita como

$$A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1} \tag{3}$$

A Fórmula (3) revela que elevar uma matriz diagonalizável A a uma potência inteira positiva tem o efeito de elevar seus autovalores a essa potência.

Observe que o cálculo do lado direito dessa fórmula envolve somente três multiplicações matriciais e as potências das entradas diagonais de D. Para matrizes grandes e potências elevadas de λ, isso envolve substancialmente menos operações que calcular A^k diretamente.

▶ EXEMPLO 5 Potência de uma matriz

Use (3) para calcular A^{13}, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução Mostramos no Exemplo 1 que a matriz A é diagonalizada por

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e que

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, segue de (3) que

$$A^{13} = PD^{13}P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$= \begin{bmatrix} -8.190 & 0 & -16.382 \\ 8.191 & 8.192 & 8.191 \\ 8.191 & 0 & 16.383 \end{bmatrix}$$ ◀

Observação A maior parte do trabalho no método do exemplo precedente é diagonalizar A. Uma vez concluído esse trabalho, podemos utilizá-lo para calcular qualquer potência de A. Assim, para calcular λ, só precisamos trocar os expoentes de 13 para 1.000 em (4).

Autovalores de potências de uma matriz

Uma vez encontrados os autovalores e autovetores de uma matriz quadrada A qualquer, é uma tarefa simples encontrar os autovalores e autovetores de qualquer potência inteira positiva de A. Por exemplo, se λ for um autovalor de A e $\mathbf{x}$ um autovetor associado, então

$$A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}$$

o que mostra que não só λ^2 é um autovalor de A^2, mas que $\mathbf{x}$ é um autovetor associado. Em geral, temos o resultado seguinte.

TEOREMA 5.2.4 *Se λ for um autovalor de uma matriz quadrada A com autovetor associado $\mathbf{x}$ e se k for algum inteiro positivo qualquer, então λ^k é um autovalor de A^k e $\mathbf{x}$ é um autovetor associado.*

Note que a diagonalizabilidade não é exigida no Teorema 5.2.4.

Alguns problemas em que se utiliza esse teorema estão dados nos exercícios.

Multiplicidades geométrica e algébrica

O Teorema 5.2.3 não resolve totalmente o problema da diagonalização, pois somente garante que uma matriz quadrada com n autovalores distintos é diagonalizável, mas não impede a possibilidade de existirem matrizes diagonalizáveis com menos que n autovalores distintos. O exemplo seguinte mostra que isso realmente pode ocorrer.

▶ EXEMPLO 6 A recíproca do Teorema 5.2.3 é falsa

Considere as matrizes

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue do Teorema 5.1.2 que ambas as matrizes têm somente um autovalor distinto, a saber, $\lambda = 1$ e, portanto, somente um autoespaço. Deixamos para o leitor resolver as equações características

$$(\lambda I - I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (\lambda I - J)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

com $\lambda = 1$ e mostrar que, para I o autoespaço é tridimensional (todo o R^3) e que, para J é unidimensional, consistindo em todos os múltiplos escalares de

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso mostra que a recíproca do Teorema 5.2.3 é falsa, pois produzimos duas matrizes 3×3 com menos do que 3 autovalores distintos, uma sendo diagonalizável e a outra não. ◀

Uma excursão completa no estudo da diagonalização é deixada para textos mais avançados, mas queremos tocar num teorema que é importante para um melhor entendimento da diagonalizabilidade. Pode ser provado que se λ_0 for um autovalor de A, então a dimensão do autoespaço associado a λ_0 não pode exceder o número de vezes que $\lambda - \lambda_0$ aparece como um fator do polinômio característico de A. Por exemplo, nos Exemplos 1 e 2, o polinômio característico é

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

Assim, o autoespaço associado a $\lambda = 1$ é, no máximo, unidimensional (e, portanto, exatamente unidimensional) e o autoespaço associado a $\lambda = 2$ é, no máximo, bidimensional. No Exemplo 1, o autoespaço associado a $\lambda = 2$ de fato tem dimensão 2, resultando em diagonalizabilidade, mas no Exemplo 2, o autoespaço associado a $\lambda = 2$ tem dimensão somente 1, resultando na não diagonalizabilidade.

Existe alguma terminologia relacionada com esse assunto. Se λ_0 for um autovalor de uma matriz A de tamanho $n \times n$, então a dimensão do autoespaço associado a λ_0 é denominada ***multiplicidade geométrica*** de λ_0, e o número de vezes que $\lambda - \lambda_0$ aparece como um fator do polinômio característico de A é denominado ***multiplicidade algébrica*** de λ_0. O teorema a seguir, que apresentamos sem prova, resume a discussão precedente.

TEOREMA 5.2.5 Multiplicidades geométrica e algébrica

Se A for uma matriz quadrada, valem as afirmações seguintes.

(*a*) *Dado qualquer autovalor de A, a multiplicidade geométrica é menor do que ou igual à multiplicidade algébrica.*

(*b*) *A é diagonalizável se, e só se, a multiplicidade geométrica de cada autovalor é igual à multiplicidade algébrica.*

OPCIONAL

Completamos esta seção com uma prova opcional do Teorema 5.2.2.

Prova do Teorema 5.2.2 Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ autovetores de A associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Vamos supor que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ sejam linearmente dependentes e obter uma contradição. Assim, poderemos concluir que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ são linearmente independentes.

Como um autovetor é não nulo por definição, $\{\mathbf{v}_1\}$ é linearmente independente. Seja r o maior inteiro tal que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ é linearmente independente. Como estamos supondo que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é linearmente dependente, r satisfaz $1 \leq r < k$. Além disso, pela definição de r, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{r+1}\}$ é linearmente dependente. Assim, existem escalares c_1, $c_2, \ldots, c_{r+1}$, não todos nulos, tais que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0} \tag{5}$$

Multiplicando ambos os lados de (5) por A e usando o fato de que

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1, \quad A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2, \ldots, \quad A\mathbf{v}_{r+1} = \lambda_{r+1}\mathbf{v}_{r+1}$$

obtemos

$$c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{r+1}\lambda_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0} \tag{6}$$

Multiplicando, agora, ambos os lados de (5) por λ_{r+1} e subtraindo a equação resultante de (6), obtemos

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_2 + \cdots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Como $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ é um conjunto linearmente independente, essa equação implica

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1}) = \cdots = c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0$$

e, como os $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r+1}$ são distintos, segue que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0 \qquad (7)$$

Substituindo esses valores em (5) obtemos

$$c_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0}$$

Como o autovetor $\mathbf{v}_{r+1}$ é não nulo, segue que

$$c_{r+1} = 0 \qquad (8)$$

Mas as Equações (7) e (8) contradizem o que supomos a respeito dessas constantes, a saber, que $c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}$ não são todos nulos, e completamos a prova. ◀

Revisão de conceitos

- Transformação de semelhança
- Invariante de semelhança
- Matrizes semelhantes
- Matriz diagonalizável
- Multiplicidade geométrica
- Multiplicidade algébrica

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se uma matriz quadrada é diagonalizável.
- Diagonalizar uma matriz quadrada.
- Encontrar potências de uma matriz usando semelhança.
- Encontrar as multiplicidades geométrica e algébrica de um autovalor.

Conjunto de exercícios 5.2

▶ Nos Exercícios **1–4**, mostre que A e B não são matrizes semelhantes. ◀

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5. Seja A uma matriz 6×6 com equação característica $\lambda^2(\lambda - 1)(\lambda - 2)^3 = 0$. Quais são as possíveis dimensões dos autoespaços de A?

6. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre os autovalores de A.

(b) Para cada autovalor λ, encontre o posto da matriz $\lambda I - A$.

(c) Será A diagonalizável? Justifique sua conclusão.

▶ Nos Exercícios **7–11**, use o método do Exercício 6 para determinar se a matriz é diagonalizável. ◀

7. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **12–15**, encontre uma matriz P que diagonalize A e calcule $P^{-1}AP$. ◀

12. $A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$ **13.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **15.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **16–21**, encontre as multiplicidades geométrica e algébrica de cada autovalor de A e determine se A é diagonalizável. Se for, encontre uma matriz P que diagonalize A e calcule $P^{-1}AP$. ◀

16. $A = \begin{bmatrix} 19 & -9 & -6 \\ 25 & -11 & -9 \\ 17 & -9 & -4 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

22. Use o método do Exemplo 5 para calcular A^{10}, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

23. Use o método do Exemplo 5 para calcular A^{11}, sendo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}$$

24. Em cada parte, calcule a potência indicada de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) $A^{1.000}$ (b) $A^{-1.000}$ (c) $A^{2.301}$ (d) $A^{-2.301}$

25. Encontre A^n se n for um inteiro positivo e

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

26. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Mostre que

(a) A é diagonalizável se $(a - d)^2 + 4bc > 0$.

(b) A não é diagonalizável se $(a - d)^2 + 4bc < 0$.

[*Sugestão*: ver o Exercício 19 da Seção 5.1.]

27. No caso em que a matriz A do Exercício 26 for diagonalizável, encontre uma matriz P que diagonalize A. [*Sugestão*: ver o Exercício 20 da Seção 5.1.]

28. Prove que matrizes semelhantes têm o mesmo posto.

29. Prove que matrizes semelhantes têm a mesma nulidade.

30. Prove que matrizes semelhantes têm o mesmo traço.

31. Prove que se A for uma matriz diagonalizável, então A^k é diagonalizável, qualquer que seja o inteiro positivo k.

32. Prove que se A for uma matriz diagonalizável, então o posto de A é o número de autovalores não nulos de A.

33. Suponha que o polinômio característico de alguma matriz A seja $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2(\lambda - 4)^3$. Em cada parte, responda a pergunta e explique seu raciocínio.

(a) O que pode ser dito sobre as dimensões dos autoespaços de A?

(b) O que pode ser dito sobre as dimensões dos autoespaços sabendo que A é diagonalizável?

(c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ for um conjunto linearmente independente de vetores de A, cada um dos quais está associado ao mesmo autovalor de A, o que pode ser dito sobre esse autovalor?

34. Este problema conduz a uma prova do fato de que a multiplicidade algébrica de um autovalor de uma matriz A de tamanho $n \times n$ é maior do que ou igual à multiplicidade geométrica. Para isso, suponha que λ_0 seja um autovalor de multiplicidade geométrica k.

(a) Prove que existe alguma base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de R^n na qual os primeiros k vetores formam uma base do autoespaço associado a λ_0.

(b) Seja P a matriz cujos vetores coluna são os vetores de B. Prove que o produto AP pode ser dado por

$$AP = P\begin{bmatrix} \lambda_0 I_k & X \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

[*Sugestão*: compare os k primeiros vetores coluna de ambos os lados.]

(c) Use o resultado da parte (b) para provar que A é semelhante a

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_0 I_k & X \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

e que, portanto, A e C têm o mesmo polinômio característico.

(d) Considerando $\det(\lambda I - C)$, prove que o polinômio característico de C (e, portanto, de A) contém o fator $(\lambda - \lambda_0)$ pelo menos k vezes, provando, assim, que a multiplicidade algébrica de λ_0 é maior do que ou igual à multiplicidade geométrica k.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(h), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Toda matriz quadrada é semelhante a si mesma.

(b) Se A, B e C forem matrizes tais que A é semelhante a B e B é semelhante a C, então A é semelhante a C.

(c) Se A e B forem matrizes invertíveis semelhantes, então A^{-1} e B^{-1} são semelhantes.

(d) Se A for diagonalizável, então existe uma única matriz P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.

(e) Se A for diagonalizável e invertível, então A^{-1} será diagonalizável.

(f) Se A for diagonalizável, então A^T é diagonalizável.

(g) Se existir alguma base de R^n consistindo em autovetores de uma matriz A de tamanho $n \times n$, então A é diagonalizável.

(h) Se todo autovalor de uma matriz A tiver multiplicidade algébrica 1, então A é diagonalizável.

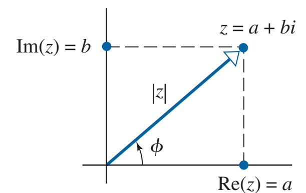
5.3 Espaços vetoriais complexos

As noções de autovalor e autovetor complexos surgem naturalmente, mesmo no contexto de matrizes de entradas reais, porque a equação característica de qualquer matriz quadrada pode ter soluções complexas. Nesta seção, discutimos essa ideia e aplicamos nossos resultados ao estudo mais aprofundado de matrizes simétricas. No final deste texto, apresentamos uma revisão das propriedades essenciais dos números complexos.

Revisão de números complexos

Lembre que se $z = a + bi$ for um número complexo, então

- $\text{Re}(z) = a$ e $\text{Im}(z) = b$ são denominados ***parte real*** de z e ***parte imaginária*** de z, respectivamente,
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é denominado ***módulo***, ou ***valor absoluto***, de z,
- $\bar{z} = a - bi$ é denominado ***conjugado complexo*** de z,
- $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$,
- dizemos que o ângulo ϕ na Figura 5.3.1 é um ***argumento*** de z,
- $\text{Re}(z) = |z| \cos \phi$
- $\text{Im}(z) = |z| \text{ sen } \phi$
- $z = |z|(\cos \phi + i \text{ sen } \phi)$ é denominada ***forma polar*** de z.



▲ **Figura 5.3.1**

Autovalores complexos

Observamos, na Fórmula (3) da Seção 5.1, que a equação característica de uma matriz A de tamanho $n \times n$ arbitrária tem a forma

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0 \qquad (1)$$

em que o coeficiente da maior potência de λ é 1. Até aqui, limitamos nossa discussão a matrizes tais que as soluções de (1) eram números reais. Contudo, é possível que a equação característica de uma matriz A de entradas reais tenha soluções imaginárias. Por exemplo, o polinômio característico da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

é

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

que tem as soluções imaginárias $\lambda = i$ e $\lambda = -i$. Para tratar desse caso, precisamos explorar as noções de espaço vetorial complexo e algumas ideias relacionadas.

Vetores em C^n

Um espaço vetorial em que os escalares podem ser números complexos é denominado ***espaço vetorial complexo***. Nesta seção, vamos nos ocupar somente da generalização seguinte do espaço vetorial real R^n.

> **DEFINIÇÃO 1** Se n for um inteiro positivo, então uma ***ênupla complexa*** é uma sequência de n números complexos $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. O conjunto de todas as ênuplas complexas é denominado ***espaço complexo de dimensão n*** e denotado por C^n. Os escalares são os números complexos, e as operações de adição, subtração e multiplicação por escalar são efetuadas componente a componente.

A terminologia usada para ênuplas reais é aplicável igualmente a ênuplas complexas. Assim, se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ forem números complexos, dizemos que $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é um ***vetor*** em C^n e que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são seus ***componentes***. Alguns exemplos de vetores em C^3 são

$$\mathbf{u} = (1 + i, -4i, 3 + 2i), \quad \mathbf{v} = (0, i, 5), \quad \mathbf{w} = \left(6 - \sqrt{2}i, 9 + \tfrac{1}{2}i, \pi i\right)$$

Qualquer vetor

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i, \ldots, a_n + b_n i)$$

em C^n pode ser repartido nas ***partes real*** e ***imaginária*** como

$$\mathbf{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + i(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

que também denotamos por

$$\mathbf{v} = \mathrm{Re}(\mathbf{v}) + i\,\mathrm{Im}(\mathbf{v})$$

em que

$$\mathrm{Re}(\mathbf{v}) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(\mathbf{v}) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

O vetor

$$\overline{\mathbf{v}} = (\overline{v}_1, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n) = (a_1 - b_1 i, a_2 - b_2 i, \ldots, a_n - b_n i)$$

é denominado ***conjugado complexo*** de $\mathbf{v}$ e pode ser expresso em termos de $\mathrm{Re}(\mathbf{v})$ e $\mathrm{Im}(\mathbf{v})$ por

$$\overline{\mathbf{v}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) - i(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \mathrm{Re}(\mathbf{v}) - i\,\mathrm{Im}(\mathbf{v}) \tag{2}$$

Segue que os vetores em R^n podem ser vistos como aqueles vetores em C^n cuja parte imaginária é nula; dito de outra forma, um vetor $\mathbf{v}$ em C^n está em R^n se, e só se, $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$.

Nesta seção, também precisaremos considerar matrizes com entradas complexas e, por isso, passamos a dizer que uma matriz A é uma ***matriz real*** se suas entradas são necessariamente números reais, e uma ***matriz complexa*** se suas entradas podem ser números complexos. As operações conhecidas com as matrizes reais passam sem modificações para matrizes complexas, e todas as propriedades familiares de matrizes continuam valendo.

Se A for uma matriz complexa, então $\mathrm{Re}(A)$ e $\mathrm{Im}(A)$ são as matrizes formadas com as partes real e imaginária das entradas de A, e $\overline{A}$ é a matriz formada tomando o conjugado complexo de cada entrada de A.

▶ EXEMPLO 1 Partes real e imaginária de vetores e matrizes

Sejam

$$\mathbf{v} = (3 + i, -2i, 5) \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 + i & -i \\ 4 & 6 - 2i \end{bmatrix}$$

Então

$$\overline{\mathbf{v}} = (3 - i, 2i, 5), \quad \text{Re}(\mathbf{v}) = (3, 0, 5), \quad \text{Im}(\mathbf{v}) = (1, -2, 0)$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-i & i \\ 4 & 6+2i \end{bmatrix}, \quad \text{Re}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{Im}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1+i & -i \\ 4 & 6-2i \end{vmatrix} = (1+i)(6-2i) - (-i)(4) = 8 + 8i \blacktriangleleft$$

Propriedades algébricas do conjugado complexo

Os dois teoremas seguintes listam algumas propriedades de vetores e matrizes complexos que utilizamos nesta seção. Algumas das provas são deixadas como exercícios.

TEOREMA 5.3.1 *Se* **u** *e* **v** *forem vetores em* C^n *e a algum escalar, então*

(*a*) $\overline{\overline{\mathbf{u}}} = \mathbf{u}$

(*b*) $\overline{a\mathbf{u}} = \overline{a}\,\overline{\mathbf{u}}$

(*c*) $\overline{\mathbf{u} + \mathbf{v}} = \overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{v}}$

(*d*) $\overline{\mathbf{u} - \mathbf{v}} = \overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{v}}$

TEOREMA 5.3.2 *Se A for uma matriz complexa de tamanho m × k e B uma matriz complexa de tamanho k × n, então*

(*a*) $\overline{\overline{A}} = A$

(*b*) $(\overline{A^T}) = (\overline{A})^T$

(*c*) $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$

Produto interno euclidiano complexo

A próxima definição estende os conceitos de produto escalar e norma a C^n.

DEFINIÇÃO 1 *Se* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ forem vetores em C^n, então o ***produto escalar complexo*** de **u** e **v**, também denominado ***produto interno euclidiano complexo***, é denotado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e definido por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1\overline{v}_1 + u_2\overline{v}_2 + \cdots + u_n\overline{v}_n \tag{3}$$

Também definimos a ***norma euclidiana*** em C^n por

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_n|^2} \tag{4}$$

Os conjugados complexos em (3) garantem que $\|\mathbf{v}\|$ é um número real, pois sem os conjugados, a quantidade $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ em (4) pode ser imaginária.

Como no caso real, dizemos que **v** é um ***vetor unitário*** em C^n se $\|\mathbf{v}\| = 1$ e dizemos que dois vetores **u** e **v** são ***ortogonais*** se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

▶ EXEMPLO 2 Produto interno e norma euclidiana complexos

Encontre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$, $\|\mathbf{u}\|$ e $\|\mathbf{v}\|$ com os vetores

$$\mathbf{u} = (1 + i, i, 3 - i) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (1 + i, 2, 4i)$$

Solução

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (1+i)(\overline{1+i}) + i(\overline{2}) + (3-i)(\overline{4i}) = (1+i)(1-i) + 2i + (3-i)(-4i) = -2-10i$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = (1+i)(\overline{1+i}) + 2(\overline{i}) + (4i)(\overline{3-i}) = (1+i)(1-i) - 2i + 4i(3+i) = -2+10i$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{|1+i|^2 + |i|^2 + |3-i|^2} = \sqrt{2+1+10} = \sqrt{13}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{|1+i|^2 + |2|^2 + |4i|^2} = \sqrt{2+4+16} = \sqrt{22} \blacktriangleleft$$

Na Tabela 1 da Seção 3.2, vimos que se **u** e **v** forem *vetores coluna* em R^n, então seu produto escalar poderá ser expresso por

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}$$

A fórmula análoga em C^n é dada por (verifique)

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}^T\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}^T\mathbf{u} \tag{5}$$

O Exemplo 2 revela uma diferença essencial entre o produto escalar em R^n e o produto escalar complexo em C^n. No produto escalar em R^n, sempre temos $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ (a *propriedade de simetria*), mas no produto escalar complexo, a relação correspondente é $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}$, que denominamos a propriedade de ***antissimetria*** desse produto. O próximo teorema é o análogo do Teorema 3.2.2.

TEOREMA 5.3.3 *O produto escalar complexo tem as propriedades seguintes com quaisquer vetores* **u**, **v** *e* **w** *em* C^n *e qualquer escalar a.*

(*a*) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}$ **[Antissimetria]**

(*b*) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$ **[Distributividade]**

(*c*) $a(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = (a\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}$ **[Homogeneidade]**

(*d*) $\mathbf{u}\cdot a\mathbf{v} = \overline{a}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$ **[Anti-homogeneidade]**

(*e*) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \geq 0$ *e* $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 0$ *se, e só se,* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ **[Positividade]**

As partes (*c*) e (*d*) desse teorema afirmam que um escalar multiplicando um produto escalar complexo de dois vetores pode ser reagrupado com o primeiro vetor, mas para reagrupá-lo com o segundo vetor, precisamos primeiro tomar seu conjugado complexo. Provamos a parte (*d*) e deixamos as demais como exercício.

Prova (d)

$$a(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = a(\overline{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}) = \overline{\overline{a}}\,(\overline{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}) = \overline{\overline{a}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})} = \overline{(\overline{a}\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}} = \mathbf{u}\cdot(\overline{a}\mathbf{v})$$

Para completar a prova, substitua a por $\overline{a}$ e use o fato de que $\overline{\overline{a}} = a$. ◀

Conceitos vetoriais em C^n

R^n será um subespaço de C^n? Explique.

Exceto pelo uso de escalares complexos, as noções de combinação linear, independência linear, subespaço, espaço gerado, base e dimensão passam para C^n sem modificações.

Os autovalores e autovetores de matrizes complexas são definidos exatamente da mesma maneira que para matrizes reais. Se A for uma matriz $n \times n$ com entradas complexas, então as raízes complexas da equação característica $\det(\lambda I - A) = 0$ são denominadas ***autovalores complexos*** de A. Como no caso real, λ é um autovalor complexo de A se, e só se, existe um vetor não nulo **x** em C^n tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Cada um desses vetores **x** é um ***autovetor complexo*** de A associado a λ. Os autovetores complexos de A associados a λ são as soluções não nulas do sistema linear $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, e o conjunto de todas essas soluções é um subespaço de C^n, denominado ***autoespaço*** de A associado a λ.

O próximo teorema afirma que se uma matriz *real* tem autovalores complexos, então esses autovalores e seus autovetores associados ocorrem em pares conjugados.

TEOREMA 5.3.4 *Se λ for um autovalor de uma matriz real A de tamanho $n \times n$ e* $\mathbf{x}$ *um autovetor associado, então $\overline{\lambda}$ também é um autovalor de A, e $\overline{\mathbf{x}}$ é um autovetor associado.*

Prova Como λ é um autovalor de A e $\mathbf{x}$ é um autovetor associado, temos

$$\overline{A\mathbf{x}} = \overline{\lambda\mathbf{x}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}} \tag{6}$$

Contudo, $\overline{A} = A$, já que A tem entradas reais, portanto, segue da parte (c) do Teorema 5.3.2 que

$$\overline{A\mathbf{x}} = \overline{A}\overline{\mathbf{x}} = A\overline{\mathbf{x}} \tag{7}$$

Juntando as Equações (6) e (7), obtemos

$$A\overline{\mathbf{x}} = \overline{A\mathbf{x}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}$$

onde $\overline{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ (por quê?); isso significa que $\overline{\lambda}$ é um autovalor de A e que $\overline{\mathbf{x}}$ é um autovetor associado. ◀

▶ EXEMPLO 3 Autovalores e autovetores complexos

Encontre os autovalores e uma base do autoespaço de

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução O polinômio característico de A é

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

de modo que os autovalores de A são $\lambda = i$ e $\lambda = -i$. Observe que esses autovalores são complexos conjugados, como garante o Teorema 5.3.4. Para encontrar os autovetores, devemos resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com $\lambda = i$ e depois com $\lambda = -i$. Com $\lambda = i$, o sistema é dado por

$$\begin{bmatrix} i + 2 & 1 \\ -5 & i - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Poderíamos resolver esse sistema reduzindo a matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} i + 2 & 1 & 0 \\ -5 & i - 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

à forma escalonada reduzida por linhas usando eliminação de Gauss-Jordan, mesmo que a aritmética complexa seja um pouco tediosa. Um procedimento mais simples é observar primeiro que a forma escalonada reduzida por linhas de (9) deve ter uma linha de zeros, pois (8) tem soluções não triviais. Por isso, cada linha de (9) é um múltiplo escalar da outra e, portanto, a primeira linha pode ser zerada pela soma com um múltiplo apropriado da segunda linha. Por esse motivo, podemos simplesmente igualar a zero as entradas da

primeira linha, permutar as linhas e então multiplicar a nova primeira linha por $-\frac{1}{5}$ para obter a forma escalonada reduzida por linhas

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, uma solução geral do sistema é

$$x_1 = \left(-\tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{5}i\right)t, \quad x_2 = t$$

Isso nos diz que o autoespaço associado a $\lambda = 1$ é unidimensional e que consiste em todos os múltiplos escalares complexos do vetor da base

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Para conferir, mostremos que $A\mathbf{x} = i\mathbf{x}$. Temos

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right) - 1 \\ 5\left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right) + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ i \end{bmatrix} = i\mathbf{x}$$

Poderíamos encontrar uma base do autoespaço associado a $\lambda = -i$ de maneira análoga, mas isso é desnecessário, pois o Teorema 5.3.4, afirma que

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

deve ser uma base desse autoespaço. As contas a seguir confirmam que $\overline{\mathbf{x}}$ é um autovetor de A associado a $\lambda = -i$.

$$\begin{aligned} A\overline{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2\left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right) - 1 \\ 5\left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right) + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \\ -i \end{bmatrix} = -i\overline{\mathbf{x}} \end{aligned}$$ ◀

Como muitos de nossos exemplos subsequentes envolvem matrizes 2×2 de entradas reais, é útil discutir alguns resultados gerais sobre os autovalores de tais matrizes. Observe que o polinômio característico da matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$



Olga Taussky-Todd
(1906–1995)

Nota histórica Olga Taussky-Todd foi uma das mulheres pioneiras na Análise Matricial e a primeira mulher a ocupar um cargo de professora no Instituto Tecnológico da Califórnia. Ela trabalhou no Laboratório Nacional de Física, em Londres, durante a Segunda Guerra Mundial, onde foi encarregada de estudar as vibrações em aeronaves supersônicas. Ela logo observou que alguns resultados sobre os autovalores de uma certa matriz complexa 6×6 poderiam ser usados para responder questões fundamentais sobre o problema dessas vibrações que, de outra forma, exigiriam cálculos trabalhosos. Depois da Segunda Guerra Mundial, ela continuou seu trabalho em assuntos relacionados a matrizes e ajudou a trazer muitos resultados conhecidos, mas discrepantes, sobre matrizes para um assunto coerente, que hoje conhecemos como a teoria de matrizes.

[Imagem: cortesia dos Arquivos do California Institute of Technology]

é

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

Podemos expressar isso em termos do traço e do determinante de A como

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) \tag{12}$$

do que segue que a equação característica de A é

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0 \tag{13}$$

Agora lembre da Álgebra que se $ax^2 + bx + c = 0$ for uma equação quadrática de coeficientes reais, então o ***discriminante*** $b^2 - 4ac$ determina a natureza das raízes.

$b^2 - 4ac > 0$ **[Duas raízes reais distintas]**

$b^2 - 4ac = 0$ **[Uma raiz real repetida]**

$b^2 - 4ac < 0$ **[Duas raízes complexas conjugadas]**

Aplicando isso a (13) com $a = 1$, $b = -\text{tr}(A)$ e $c = \det(A)$, obtemos o teorema seguinte.

TEOREMA 5.3.5 *Se A for uma matriz 2×2 com entradas reais, então a equação característica de A é $\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$ e*

(*a*) *A tem dois autovalores reais distintos se* $\text{tr}(A)^2 - 4\det(A) > 0$;

(*b*) *A tem um autovalor real repetido se* $\text{tr}(A)^2 - 4\det(A) = 0$;

(*c*) *A tem dois autovalores complexos conjugados se* $\text{tr}(A)^2 - 4\det(A) < 0$.

▶ EXEMPLO 4 Autovalores de uma matriz 2 × 2

Em cada parte, use a Fórmula (13) da equação característica para encontrar os autovalores de

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Solução (a) Temos $\text{tr}(A) = 7$ e $\det(A) = 12$, portanto, a equação característica de A é

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

Fatorando, obtemos $(\lambda - 4)(\lambda - 3) = 0$, de modo que os autovalores de A são $\lambda = 4$ e $\lambda = 3$.

Solução (b) Temos $\text{tr}(A) = 2$ e $\det(A) = 1$, portanto, a equação característica de A é

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

Fatorando essa equação, obtemos $(\lambda - 1)^2 = 0$, de modo que $\lambda = 1$ é o único autovalor de A; sua multiplicidade algébrica é 2.

Solução (c) Temos $\text{tr}(A) = 4$ e $\det(A) = 13$, portanto, a equação característica de A é

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

Resolvendo essa equação pela fórmula quadrática, obtemos

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(13)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 2 \pm 3i$$

Assim, os autovalores de A são $\lambda = 2 + 3i$ e $\lambda = 2 - 3i$. ◀

Matrizes simétricas têm autovalores reais

Nosso próximo resultado, que se refere aos autovalores de matrizes reais simétricas, é importante numa grande variedade de aplicações. O ponto crucial da prova é considerar as matrizes simétricas reais como matrizes complexas cujas entradas têm parte imaginária nula.

TEOREMA 5.3.6 *Se A for uma matriz simétrica real, então A tem autovalores reais.*

Prova Sejam λ um autovalor de A e $\mathbf{x}$ um autovetor associado, sendo que λ pode ser complexo e $\mathbf{x}$ pode estar em C^n. Assim,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

onde $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Multiplicando ambos os lados dessa equação por $\overline{\mathbf{x}}^T$ e usando o fato de que

$$\overline{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}^T(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}) = \lambda\|\mathbf{x}\|^2$$

obtemos

$$\lambda = \frac{\overline{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}$$

Como o denominador dessa expressão é real, podemos concluir que λ é real mostrando que

$$\overline{\overline{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} \tag{14}$$

Mas A é simétrica e tem entradas reais, portanto, segue da segunda igualdade em (14) e de propriedades da conjugação que

$$\overline{\overline{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x}} = \overline{\overline{\mathbf{x}}}^T\,\overline{A\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T\,\overline{A\mathbf{x}} = (\overline{A\mathbf{x}})^T\mathbf{x} = (\overline{A}\overline{\mathbf{x}})^T\mathbf{x} = (A\overline{\mathbf{x}})^T\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}^T A^T\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x}$$ ◀

Uma interpretação geométrica de autovalores complexos

O teorema seguinte é fundamental no entendimento do significado geométrico de autovalores complexos de matrizes reais 2×2.

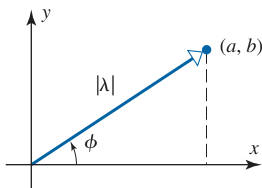
TEOREMA 5.3.7 *Os autovalores da matriz real*

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \tag{15}$$

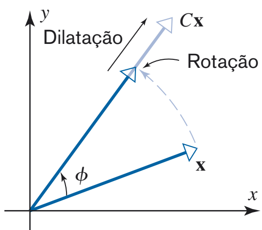
são $\lambda = a \pm bi$. Se a e b não forem ambos nulos, então essa matriz pode ser fatorada como

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\lambda| & 0 \\ 0 & |\lambda| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{16}$$

onde ϕ é o ângulo do eixo x positivo ao raio que vai desde a origem até o ponto (a, b) (Figura 5.3.2).



▲ **Figura 5.3.2**



▲ **Figura 5.3.3**

Geometricamente, esse teorema afirma que a multiplicação por uma matriz da forma (15) pode ser vista como uma rotação pelo ângulo ϕ seguida de uma dilatação (ou contração) de fator $|\lambda|$ (Figura 5.3.3).

Prova A equação característica de C é $(\lambda - a)^2 + b^2 = 0$ (verifique), portanto, os autovalores de C são $\lambda = a \pm bi$. Supondo a e b não ambos nulos, seja ϕ o ângulo do eixo x positivo ao raio desde a origem até o ponto (a, b). O ângulo ϕ é o argumento do autovalor $\lambda = a + bi$, portanto, vemos na Figura 5.3.2 que

$$a = |\lambda|\cos\phi \quad \text{e} \quad b = |\lambda|\operatorname{sen}\phi$$

Segue disso que a matriz em (15) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\lambda| & 0 \\ 0 & |\lambda| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{a}{|\lambda|} & -\dfrac{b}{|\lambda|} \\ \dfrac{b}{|\lambda|} & \dfrac{a}{|\lambda|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\lambda| & 0 \\ 0 & |\lambda| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$ ◀

O próximo teorema, cuja prova é discutida nos exercícios, mostra que cada matriz real 2×2 com autovalores complexos é semelhante a uma matriz da forma (15).

TEOREMA 5.3.8 *Seja A uma matriz real 2×2 com autovalores complexos $\lambda = a \pm bi$ (em que $b \neq 0$). Se $\mathbf{x}$ for um autovetor de A associado a $\lambda = a - bi$, então a matriz $P = [\operatorname{Re}(\mathbf{x}) \quad \operatorname{Im}(\mathbf{x})]$ é invertível e*

$$A = P \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} P^{-1} \tag{17}$$

▶ EXEMPLO 5 Uma fatoração matricial usando autovalores complexos

Fatore a matriz no Exemplo 3 na forma (17) usando o autovalor $\lambda = -i$ e o autovetor associado que foi dado em (11).

Solução Para manter a notação do Teorema 5.3.8, denotemos o autovetor em (11) associado a $\lambda = -i$ por $\mathbf{x}$ (em vez de $\bar{\mathbf{x}}$, como antes). Para esses λ e $\mathbf{x}$, temos

$$a = 0, \quad b = 1, \quad \operatorname{Re}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{Im}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$P = [\operatorname{Re}(\mathbf{x}) \quad \operatorname{Im}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que A pode ser fatorada na forma (17) como

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

O leitor pode querer conferir isso, multiplicando o lado direito. ◀

Uma interpretação geométrica do Teorema 5.3.8

Para entender o significado geométrico do Teorema 5.3.8, denotemos as matrizes do lado direito de (16) por S e R_ϕ, respectivamente, e então usemos (16) para reescrever (17) como

$$A = PSR_\phi P^{-1} = P \begin{bmatrix} |\lambda| & 0 \\ 0 & |\lambda| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} P^{-1} \tag{18}$$

Interpretando, agora, P como a matriz de transição da base $B = \{\operatorname{Re}(\mathbf{x}), \operatorname{Im}(\mathbf{x})\}$ para a base canônica, vemos que (18) diz que o cálculo do produto $A\mathbf{x}_0$ pode ser decomposto num processo de três passos, como segue.

Passo 1. Aplicamos $\mathbf{x}_0$ das coordenadas canônicas para as coordenadas na base B formando o produto $P^{-1}\mathbf{x}_0$.

Passo 2. Aplicamos uma rotação e uma dilatação ou contração ao vetor $P^{-1}\mathbf{x}_0$ formando o produto $SR_\phi P^{-1}\mathbf{x}_0$.

Passo 3. Aplicamos o vetor girado e dilatado ou contraído de volta às coordenadas canônicas para obter $A\mathbf{x}_0 = PSR_\phi P^{-1}\mathbf{x}_0$.

Sequências de potências

Há muitos problemas nos quais estamos interessados em entender como as sucessivas aplicações de uma transformação matricial afetam um vetor específico. Por exemplo, se A for matriz canônica de um operador de R^n e $\mathbf{x}_0$ algum vetor fixado em R^n, então podemos estar interessados no comportamento da sequência de potências

$$\mathbf{x}_0, \quad A\mathbf{x}_0, \quad A^2\mathbf{x}_0, \ldots, \quad A^k\mathbf{x}_0, \ldots$$

Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{5} & \frac{11}{10} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

então, com a ajuda de um computador ou calculadora, podemos mostrar que os cinco primeiros termos da sequência de potências são

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1{,}25 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}, \quad A^2\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ -0{,}2 \end{bmatrix}, \quad A^3\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0{,}35 \\ -0{,}82 \end{bmatrix}$$

Com a ajuda de MATLAB ou de algum outro sistema de computação simbólica, podemos mostrar que se os primeiros 100 termos forem desenhados como pares ordenados (x, y), então os pontos se movem ao longo da trajetória elíptica mostrada na Figura 5.3.4*a*.

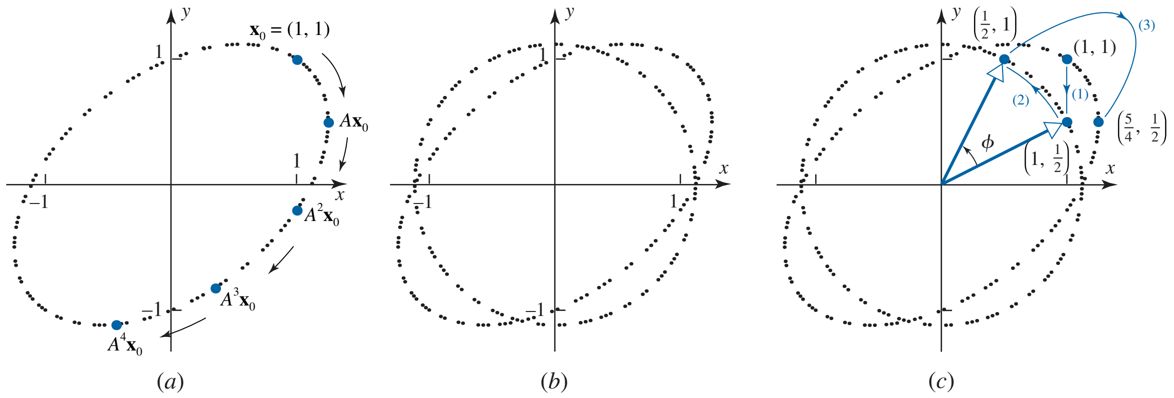


Figura 5.3.4

Para entender por que os pontos se movem ao longo de uma trajetória elíptica, precisamos examinar os autovalores e autovetores de A. Deixamos para o leitor mostrar que os autovalores de A são $\lambda = \frac{4}{5} \pm \frac{3}{5}i$ e que autovetores associados são

$$\lambda_1 = \tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5}i: \quad \mathbf{v}_1 = \left(\tfrac{1}{2} + i, 1\right) \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \tfrac{4}{5} + \tfrac{3}{5}i: \quad \mathbf{v}_2 = \left(\tfrac{1}{2} - i, 1\right)$$

Tomando $\lambda = \lambda_1 = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ e $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{2} + i, 1\right)$ em (17) e usando o fato de que $|\lambda| = 1$, obtemos a fatoração

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{5} & \frac{11}{10} \end{bmatrix}} = \underset{P}{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \underset{R_\phi}{\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}} \underset{P^{-1}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}} \tag{19}$$

em que R_ϕ é uma rotação em torno da origem pelo ângulo ϕ cuja tangente é

$$\text{tg}\,\phi = \frac{\text{sen}\,\phi}{\cos\phi} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4} \qquad \left(\phi = \text{arctg}\,\tfrac{3}{4} \approx 36{,}9°\right)$$

A matriz P em (19) é a matriz de transição da base

$$B = \{\text{Re}(\mathbf{x}), \text{Im}(\mathbf{x})\} = \left\{\left(\tfrac{1}{2}, 1\right), (1, 0)\right\}$$

para a base canônica e P^{-1} é a matriz de transição da matriz canônica para a base B (Figura 5.3.5). Agora observe que se n for um inteiro positivo, então (19) implica

$$A^n\mathbf{x}_0 = (PR_\phi P^{-1})^n\mathbf{x}_0 = PR_\phi{}^n P^{-1}\mathbf{x}_0$$

de modo que o produto $A^n\mathbf{x}_0$ pode ser calculado transformando primeiro $\mathbf{x}_0$ no ponto $P^{-1}\mathbf{x}_0$ em coordenadas B, depois multiplicando por $R_\phi{}^n$ para girar esse ponto em torno da origem pelo ângulo $n\phi$ e finalmente multiplicando $R_\phi{}^n P^{-1}\mathbf{x}_0$ por P para transformar o ponto resultante de volta às coordenadas canônicas. Agora podemos ver o que está acontecendo geometricamente. Nas coordenadas B, cada multiplicação sucessiva por A faz com que o ponto $P^{-1}\mathbf{x}_0$ avance por um ângulo ϕ, traçando, assim, uma órbita circular em torno da origem. Contudo, B é uma base *torcida* e não ortogonal, de modo que quando os pontos da órbita circular são transferidos de volta para as coordenadas canônicas, sofrem uma distorção da órbita circular para a órbita elíptica percorrida por $A^n\mathbf{x}_0$ (Figura 5.3.4*b*). As contas para a primeira iterada são as seguintes (as iteradas sucessivas estão ilustradas na Figura 5.3.4*c*).

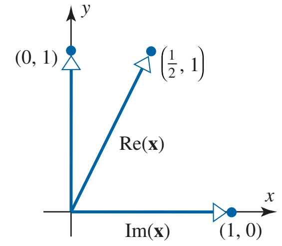


Figura 5.3.5

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{5} & \frac{11}{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad [\mathbf{x}_0 \text{ é transformado nas coordenadas } B.]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad [\text{O ponto } \left(1, \tfrac{1}{2}\right) \text{ é girado pelo ângulo } \phi.]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad [\text{O ponto } \left(\tfrac{1}{2}, 1\right) \text{ é transformado nas coordenadas canônicas.}]$$

Revisão de conceitos

- Parte real de z
- Parte imaginária de z
- Módulo de z
- Conjugado complexo de z
- Argumento de z
- Forma polar de z
- Espaço vetorial complexo
- Ênupla complexa
- Espaço complexo de dimensão n
- Matriz real
- Matriz complexa
- Produto escalar complexo (produto interno euclidiano complexo)
- Norma euclidiana em C^n
- Propriedade de antissimetria
- Autovalor complexo
- Autovetor complexo
- Autoespaço em C^n
- Discriminante

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar a parte real, a parte imaginária e o conjugado de uma matriz complexa ou de um vetor complexo.
- Encontrar o determinante de uma matriz complexa.
- Encontrar produtos internos complexos e normas de vetores complexos.
- Encontrar os autovalores e as bases dos autoespaços de matrizes complexas.
- Fatorar uma matriz real 2×2 com autovalores complexos num produto de matrizes de contração ou dilatação e rotação.

Conjunto de exercícios 5.3

▶ Nos Exercícios 1–2, encontre $\bar{\mathbf{u}}$, Re($\mathbf{u}$), Im($\mathbf{u}$) e $\|\mathbf{u}\|$. ◀

1. $\mathbf{u} = (2 - i, 4i, 1 + i)$

2. $\mathbf{u} = (6, 1 + 4i, 6 - 2i)$

▶ Nos Exercícios 3–4, mostre que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e a satisfazem o Teorema 5.3.1. ◀

3. $\mathbf{u} = (3 - 4i, 2 + i, -6i)$, $\mathbf{v} = (1 + i, 2 - i, 4)$, $a = i$

4. $\mathbf{u} = (6, 1 + 4i, 6 - 2i)$, $\mathbf{v} = (4, 3 + 2i, i - 3)$, $a = -i$

5. Resolva a equação $i\mathbf{x} - 3\mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}}$ em $\mathbf{x}$, sendo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ os vetores no Exercício 3.

6. Resolva a equação $(1 + i)\mathbf{x} + 2\mathbf{u} = \bar{\mathbf{v}}$ em $\mathbf{x}$, sendo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ os vetores no Exercício 4.

▶ Nos Exercícios 7–8, encontre $\overline{A}$ e Re(A), Im(A), det(A) e tr(A) ◀

7. $A = \begin{bmatrix} -5i & 4 \\ 2 - i & 1 + 5i \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 4i & 2 - 3i \\ 2 + 3i & 1 \end{bmatrix}$

9. Sejam A a matriz dada no Exercício 7 e B a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 - i \\ 2i \end{bmatrix}$$

Confirme que essas matrizes têm as propriedades enunciadas no Teorema 5.3.2.

10. Sejam A a matriz dada no Exercício 8 e B a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 5i \\ 1 - 4i \end{bmatrix}$$

Confirme que essas matrizes têm as propriedades enunciadas no Teorema 5.3.2.

▶ Nos Exercícios 11–12, calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ e mostre que os vetores satisfazem a Fórmula (5) e as partes (a), (b) e (c) do Teorema 5.3.3. ◀

11. $\mathbf{u} = (i, 2i, 3)$, $\mathbf{v} = (4, -2i, 1 + i)$, $\mathbf{w} = (2 - i, 2i, 5 + 3i)$, $a = 2i$

12. $\mathbf{u} = (1 + i, 4, 3i)$, $\mathbf{v} = (3, -4i, 2 + 3i)$, $\mathbf{w} = (1 - i, 4i, 4 - 5i)$, $a = 1 + i$

13. Calcule $\overline{(\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}}) - \overline{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}}}$ com os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ no Exercício 11.

14. Calcule $\overline{(i\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w}) + (\|\mathbf{u}\|\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}}$ com os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ no Exercício 12.

▶ Nos Exercícios 15–18, encontre os autovalores e as bases dos autoespaços de A. ◀

15. $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 19–22, cada matriz C tem a forma (15). O Teorema 5.3.7 implica que C é o produto de uma matriz de contração ou dilatação de fator $|\lambda|$ pela matriz de rotação de ângulo ϕ. Encontre $|\lambda|$ e o ângulo ϕ tal que $-\pi < \phi \leq \pi$. ◀

19. $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

20. $C = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$

21. $C = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$

22. $C = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 23–26, encontre uma matriz invertível P e uma matriz C da forma (15) tais que $A = PCP^{-1}$. ◀

23. $A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

27. Em cada parte, encontre, se houver, todos os escalares complexos k com os quais $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais em C^3.

(a) $\mathbf{u} = (2i, i, 3i)$, $\mathbf{v} = (i, 6i, k)$

(b) $\mathbf{u} = (k, k, 1 + i)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 1 - i)$

28. Mostre que se A for uma matriz real $n \times n$ e $\mathbf{x}$ um vetor coluna em C^n, então Re($A\mathbf{x}$) = A(Re($\mathbf{x}$)) e Im($A\mathbf{x}$) = A(Im($\mathbf{x}$)).

29. As matrizes

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

denominadas ***matrizes spin de Pauli***, são utilizadas na Mecânica Quântica para estudar o *spin* de partículas. As ***matrizes de Dirac***, que também são utilizadas na Mecânica Quântica, são expressas em termos das matrizes *spin* de Pauli e a matriz identidade I_2 de tamanho 2×2 por

$$\beta = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{bmatrix}, \quad \alpha_x = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_y = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_z = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que $\beta^2 = \alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2$.

(b) Duas matrizes A e B tais que $AB = -BA$ são ditas ***anticomutativas***. Mostre que as matrizes de Dirac são anticomutativas.

30. Se k for um escalar real e $\mathbf{v}$ um vetor em R^n, então o Teorema 3.2.1 afirma que $\|k\mathbf{v}\| = |k|\,\|\mathbf{v}\|$. Essa relação continuará válida se k for um escalar complexo e $\mathbf{v}$ um vetor em C^n? Justifique sua reposta.

31. Prove a parte (c) do Teorema 5.3.1.

32. Prove o Teorema 5.3.2.

33. Prove que se **u** e **v** forem vetores em C^n, então

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 + \frac{i}{4}\|\mathbf{u}+i\mathbf{v}\|^2 - \frac{i}{4}\|\mathbf{u}-i\mathbf{v}\|^2$$

34. Segue do Teorema 5.3.7 que os autovalores da matriz de rotação

$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\,\phi \\ \text{sen}\,\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

são $\lambda = \cos\phi \pm i\,\text{sen}\,\phi$. Prove que se **x** for um autovetor associado a um desses autovalores, então Re(**x**) e Im(**x**) são ortogonais e têm o mesmo comprimento. [*Nota*: isso implica que $P = [\text{Re}(\mathbf{x}) \mid \text{Im}(\mathbf{x})]$ é um múltiplo escalar real de uma matriz ortogonal.]

35. As duas partes deste exercício indicam o caminho para provar o Teorema 5.3.8.

(a) Para simplificar a notação, seja

$$M = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

e escreva $\mathbf{u} = \text{Re}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{v} = \text{Im}(\mathbf{x})$, de modo que $P = [\mathbf{u} \mid \mathbf{v}]$. Mostre que a relação $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ implica

$$A\mathbf{x} = (a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) + i(-b\mathbf{u} + a\mathbf{v})$$

e então iguale as partes real e imaginária nessa equação para mostrar que

$$AP = [A\mathbf{u} \mid A\mathbf{v}] = [a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \mid -b\mathbf{u} + a\mathbf{v}] = PM$$

(b) Mostre que P é invertível, com o que termina a prova, pois o resultado da parte (a) implica $A = PMP^{-1}$. [*Sugestão*: se P não for invertível, então um de seus vetores coluna é um múltiplo escalar real do outro, digamos $\mathbf{v} = d\mathbf{u}$. Substituindo isso nas equações $A\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ e $A\mathbf{v} = -b\mathbf{u} + a\mathbf{v}$ obtidas na parte (a), mostre que $(1 + d^2)b\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Finalmente, mostre que isso leva a uma contradição, provando que P é invertível.]

36. Neste problema, provamos o análogo complexo da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

(a) Prove: se k for um número complexo e **u** e **v** vetores em C^n, então

$$(\mathbf{u} - k\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u} - k\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \bar{k}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) - k\overline{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})} + k\bar{k}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})$$

(b) Use o resultado da parte (a) para provar que

$$0 \le \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \bar{k}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) - k\overline{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})} + k\bar{k}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})$$

(c) Tomando $k = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})/(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})$ na parte (b), prove que

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \le \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$$

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(f), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Existe alguma matriz real 5×5 sem autovalores reais.

(b) Os autovalores de uma matriz complexa 2×2 são as soluções da equação $\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$.

(c) Matrizes que têm os mesmos autovalores complexos com as mesmas multiplicidades algébricas têm o mesmo traço.

(d) Se λ for um autovalor complexo de uma matriz real A com autovetor complexo associado **v**, então $\bar{\lambda}$ é um autovalor complexo de A e $\bar{\mathbf{v}}$ é um autovetor complexo de A associado a $\bar{\lambda}$.

(e) Todo autovalor de uma matriz complexa simétrica é real.

(f) Se uma matriz A real 2×2 tiver autovalores complexos e $\mathbf{x}_0$ for um vetor em R^2, então os vetores $\mathbf{x}_0, A\mathbf{x}_0, A^2\mathbf{x}_0, \ldots, A^n\mathbf{x}_0, \ldots$ pertencem a uma elipse.

5.4 Equações diferencias

Muitas leis da Física, da Química, da Biologia, da Engenharia e da Economia são descritas em termos de "equações diferenciais", ou seja, equações envolvendo funções e suas derivadas. Nesta seção, abordamos uma maneira pela qual Álgebra Linear, autovalores e autovetores podem ser aplicados na resolução de sistemas de equações diferenciais. O Cálculo é um pré-requisito para esta seção.

Terminologia

Uma ***equação diferencial*** é uma equação que envolve funções desconhecidas e suas derivadas. A ***ordem*** de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação. As equações diferenciais mais simples são as de primeira ordem da forma

$$y' = ay \qquad (1)$$

em que $y = f(x)$ é uma função desconhecida a ser determinada, $y' = dy/dx$ é sua derivada e a é uma constante. Como ocorre com a maioria das equações diferenciais, essa equação tem uma infinidade de soluções, que são as funções da forma

$$y = ce^{ax} \tag{2}$$

em que c é uma constante arbitrária. Cada função dessa forma é uma solução de (1), pois

$$y' = cae^{ax} = ay$$

e é mostrado nos exercícios que essas são as únicas soluções. Em vista disso, dizemos que (2) é a ***solução geral*** de (1). Por exemplo, a solução geral da equação diferencial $y' = 5y$ é

$$y = ce^{5x} \tag{3}$$

Com frequência, um problema físico que leva a uma equação diferencial impõe algumas condições que nos permitem isolar uma solução particular da solução geral. Por exemplo, se exigirmos que a solução (3) da equação $y' = 5y$ satisfaça a condição adicional

$$y(0) = 6 \tag{4}$$

(ou seja, que $y = 6$ quando $x = 0$), então substituindo esses valores em (3), obteremos $6 = ce^0 = c$, pelo que concluímos que

$$y = 6e^{5x}$$

é a única solução de $y' = 5y$ que satisfaz (4).

Uma condição como (4), que especifica o valor da solução geral num ponto, é denominada ***condição inicial***, e o problema de resolver uma equação diferencial sujeita a uma condição inicial é denominado ***problema de valor inicial***.

Sistemas lineares de primeira ordem

Nesta seção, vamos nos ocupar com a resolução de sistemas de equações diferenciais da forma

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ &\ \ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_n' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned} \tag{5}$$

em que $y_1 = f_1(x), y_2 = f_2(x), \ldots, y_n = f_n(x)$ são funções a determinar e os coeficientes a_{ij} são constantes. Em notação matricial, (5) pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Um sistema de equações diferenciais da forma (5) é denominado ***sistema linear de primeira ordem***.

ou, mais concisamente,

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \tag{6}$$

em que a notação $\mathbf{y}'$ denota o vetor obtido derivando cada componente de y.

► EXEMPLO 1 Solução de um sistema linear com condições iniciais

(a) Escreva o sistema dado em forma matricial.

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 \\ y_2' &= -2y_2 \\ y_3' &= 5y_3 \end{aligned} \tag{7}$$

(b) Resolva o sistema.

(c) Encontre uma solução do sistema que satisfaça as condições iniciais $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 4$ e $y_3(0) = -2$.

Solução (a)

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \tag{8}$$

ou

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{y} \tag{9}$$

Solução (b) Como cada equação em (7) envolve só uma função incógnita, podemos resolver as equações individualmente. Segue de (2) que essas soluções são

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{3x} \\ y_2 &= c_2 e^{-2x} \\ y_3 &= c_3 e^{5x} \end{aligned}$$

ou, em notação matricial,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{3x} \\ c_2 e^{-2x} \\ c_3 e^{5x} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Solução (c) Pelas condições iniciais dadas, obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= y_1(0) = c_1 e^0 = c_1 \\ 4 &= y_2(0) = c_2 e^0 = c_2 \\ -2 &= y_3(0) = c_3 e^0 = c_3 \end{aligned}$$

de modo que a solução que satisfaz essas condições é

$$y_1 = e^{3x}, \quad y_2 = 4e^{-2x}, \quad y_3 = -2e^{5x}$$

ou, em notação matricial,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3x} \\ 4e^{-2x} \\ -2e^{5x} \end{bmatrix}$$ ◀

Resolução por diagonalização

O que facilitou a resolução do sistema no Exemplo 1 foi o fato de que cada equação envolveu somente uma função incógnita, de modo que, na formulação matricial do sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, aparece uma matriz de coeficientes A *diagonal* [Fórmula (9)]. Uma situação mais complicada ocorre quando uma ou todas as equações do sistema envolvem mais de uma das funções incógnitas, pois, nesse caso, a matriz de coeficientes não é mais diagonal. Passamos a considerar uma maneira de resolver um sistema desses.

A ideia básica para resolver um sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ cuja matriz de coeficientes A não é diagonal é introduzir um novo vetor incógnito $\mathbf{u}$ que esteja relacionado com o vetor incógnito $\mathbf{y}$ por uma equação da forma $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$, em que P é uma matriz invertível que diagonaliza A. É claro que tal matriz pode existir ou não, mas se existir, poderemos reescrever a equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ como

$$P\mathbf{u}' = A(P\,\mathbf{u})$$

ou, alternativamente, como

$$\mathbf{u}' = (P^{-1}AP)\mathbf{u}$$

Como estamos supondo que P diagonaliza A, essa equação tem a forma

$$\mathbf{u}' = D\mathbf{u}$$

com D diagonal. Agora podemos resolver essa equação em $\mathbf{u}$ usando o método do Exemplo 1 e então obter $\mathbf{y}$ por multiplicação matricial, a partir da relação $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$.

Resumindo, temos o procedimento seguinte para resolver um sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ no caso em que A seja diagonalizável.

Um procedimento para resolver y′ = Ay se a for diagonalizável

Passo 1. Encontre uma matriz P que diagonaliza A.

Passo 2. Faça as substituições $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$ e $\mathbf{y}' = P\mathbf{u}'$ para obter um novo "sistema diagonal" $\mathbf{u}' = D\mathbf{u}$, com $D = P^{-1}AP$.

Passo 3. Resolva $\mathbf{u}' = D\mathbf{u}$.

Passo 4. Determine $\mathbf{y}$ a partir da equação $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$.

▶ EXEMPLO 2 Solução usando diagonalização

(a) Resolva o sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= 4y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

(b) Encontre a solução que satisfaz as condições iniciais $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 6$.

Solução (a) A matriz de coeficientes do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Como vimos na Seção 5.2, a matriz A será diagonalizável por qualquer matriz P cujas colunas sejam autovetores linearmente independentes de A. Como

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

os autovalores de A são $\lambda = 2$ e $\lambda = -3$. Por definição,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

é um autovetor de A associado a λ se, e só se, $\mathbf{x}$ é uma solução não trivial de

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se $\lambda = 2$, esse sistema se torna

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $x_1 = t$, $x_2 = t$, de modo que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é uma base do autoespaço associado a $\lambda = 2$. Analogamente, o leitor pode mostrar que

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

é uma base do autoespaço associado a $\lambda = -3$. Assim,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonaliza A e

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Conforme observado no Passo 2 do procedimento enunciado acima, a substituição

$$\mathbf{y} = P\mathbf{u} \quad \text{e} \quad \mathbf{y}' = P\mathbf{u}'$$

fornece o "sistema diagonal"

$$\mathbf{u}' = D\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{u} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} u_1' &= 2u_1 \\ u_2' &= -3u_2 \end{aligned}$$

Por (2), a solução desse sistema é

$$\begin{aligned} u_1 &= c_1e^{2x} \\ u_2 &= c_2e^{-3x} \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} c_1e^{2x} \\ c_2e^{-3x} \end{bmatrix}$$

de modo que a equação $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$ fornece, como solução para $\mathbf{y}$,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1e^{2x} \\ c_2e^{-3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^{2x} - \frac{1}{4}c_2e^{-3x} \\ c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1e^{2x} - \tfrac{1}{4}c_2e^{-3x} \\ y_2 &= c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} \end{aligned} \tag{11}$$

Solução (b) Substituindo as condições iniciais dadas em (11), obtemos

$$\begin{aligned} c_1 - \tfrac{1}{4}c_2 &= 1 \\ c_1 + c_2 &= 6 \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $c_1 = 2$, $c_2 = 4$, de modo que de (11) segue que a solução satisfazendo as condições iniciais é

$$\begin{aligned} y_1 &= 2e^{2x} - e^{-3x} \\ y_2 &= 2e^{2x} + 4e^{-3x} \end{aligned}$$ ◀

Observação Não esqueça que o método do Exemplo 2 funciona porque a matriz de coeficientes do sistema pode ser diagonalizada. Quando isso não ocorrer, necessitamos de outros métodos, que são discutidos em textos dedicados a equações diferenciais.

Revisão de conceitos

- Equação diferencial
- Ordem de uma equação diferencial
- Solução geral
- Solução particular
- Condição inicial
- Problema de valor inicial
- Sistema linear de primeira ordem

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar a forma matricial de um sistema de equações diferenciais lineares.
- Encontrar a solução geral de um sistema de equações diferenciais lineares por diagonalização.
- Encontrar a solução particular de um sistema de equações diferenciais lineares satisfazendo uma condição inicial.

Conjunto de exercícios 5.4

1. (a) Resolva o sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= 2y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

(b) Encontre a solução que satisfaz as condições iniciais $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$.

2. (a) Resolva o sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= 4y_1 + 5y_2 \end{aligned}$$

(b) Encontre a solução que satisfaz as condições iniciais $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 1$.

3. (a) Resolva o sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + y_3 \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 \\ y_3' &= -2y_1 + y_3 \end{aligned}$$

(b) Encontre a solução que satisfaz as condições iniciais $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) - 0$

4. Resolva o sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ y_2' &= 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \\ y_3' &= 2y_1 + 2y_2 + 4y_3 \end{aligned}$$

5. Mostre que qualquer solução de $y' = ay$ tem a forma $y = ce^{ax}$. [*Sugestão*: considere uma solução $y = f(x)$ e mostre que $f(x)e^{-ax}$ é constante.]

6. Mostre que se A for diagonalizável e

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

é uma solução do sistema $y = A\mathbf{y}$, então cada y_i é uma combinação linear de $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$, onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de A.

7. Às vezes, é possível resolver uma só equação diferencial linear de coeficientes constantes de ordem superior expressando-a como um sistema e usando os métodos desta seção. Para a equação diferencial $y'' - y' - 6y = 0$, mostre que as substituições $y_1 = y$ e $y_2 = y'$ levam ao sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= 6y_1 + y_2 \end{aligned}$$

Resolva esse sistema e use o resultado para resolver a equação diferencial original.

8. Use o procedimento do Exercício 7 para resolver $y'' + y' - 12y = 0$.

9. Explique como o procedimento do Exercício 7 poderia ser usado para resolver $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$. Use sua ideia para resolver a equação.

10. (a) Reescrevendo (11) em forma matricial, mostre que a solução do sistema no Exemplo 2 pode ser expressa por

$$\mathbf{y} = c_1 e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3x} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Essa solução é denominada ***solução geral*** do sistema.

(b) Observe que, na parte (a), o vetor no primeiro termo é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$, e o vetor no segundo termo é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = -3$. Isso é um caso especial do resultado geral a seguir.

Teorema *Se a matriz de coeficientes A do sistema* $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ *for diagonalizável, então a solução geral do sistema pode ser expressa por*

$$\mathbf{y} = c_1 e^{\lambda_1 x}\mathbf{x}_1 + c_2 e^{\lambda_2 x}\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}\mathbf{x}_n$$

sendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *os autovalores de A e* $\mathbf{x}_i$ *um autovetor de A de autovalor* λ_i.

Prove esse resultado seguindo o procedimento de quatro passos discutido antes do Exemplo 2 com

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{x}_n]$$

11. Considere o sistema de equações diferenciais $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, em que A é uma matriz 2×2. Com quais valores de $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ os componentes $y_1(t), y_2(t)$ das soluções tendem a zero com $t \to \infty$? Em particular, o que deve ser verdade sobre o determinante e o traço de A para isso ocorrer?

12. Resolva o sistema não diagonal

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_2 \end{aligned}$$

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Qualquer sistema de equações diferenciais $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ tem alguma solução.

(b) Se $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ então $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(c) Se $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ então $(c\mathbf{x} + d\mathbf{y})' = A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y})$, quaisquer que sejam os escalares c e d.

(d) Se A for uma matriz quadrada com autovalores reais distintos, então é possível resolver $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ por diagonalização.

(e) Se A e P forem matrizes semelhantes, então $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ e $\mathbf{u}' = P\mathbf{u}$ têm as mesmas soluções.

Capítulo 5 Exercícios suplementares

1. (a) Mostre que se $0 < \theta < \pi$, então

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

não possui autovalores e, consequentemente, autovetores.

(b) Dê uma explicação geométrica para o resultado na parte (a).

2. Encontre os autovalores de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k^3 & -3k^2 & 3k \end{bmatrix}$$

3. (a) Mostre que se D for uma matriz diagonal com entradas não negativas na diagonal principal, então existe uma matriz S tal que $S^2 = D$.

(b) Mostre que se A for uma matriz diagonalizável com autovalores não negativos, então existe uma matriz S tal que $S^2 = A$.

(c) Encontre uma matriz S tal que $S^2 = A$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

4. Prove: se A for uma matriz quadrada, então A e A^T têm o mesmo polinômio característico.

5. Prove: se A for uma matriz quadrada e $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ o polinômio característico de A, então o coeficiente de λ^{n-1} em $p(\lambda)$ é o negativo do traço de A.

6. Prove: se $b \neq 0$, então

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

não é diagonalizável.

7. Em textos avançados de Álgebra Linear, prova-se o ***Teorema de Cayley-Hamilton***, que afirma que uma matriz quadrada A satisfaz sua equação característica, ou seja, se

$$c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \cdots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0$$

for a equação característica de A, então

$$c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_{n-1}A^{n-1} + A^n = 0$$

Verifique esse resultado com

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **8–10**, use o Teorema de Cayley-Hamilton enunciado no Exercício 7. ◀

8. (a) Use o Exercício 18 da Seção 5.1 para provar o Teorema de Cayley-Hamilton com matrizes 2×2.

(b) Prove o Teorema de Cayley-Hamilton com matrizes $n \times n$ diagonalizáveis.

9. O Teorema de Cayley-Hamilton fornece um método para calcular potências de uma matriz. Por exemplo, se A for uma matriz 2×2 de equação característica

$$c_0 + c_1\lambda + \lambda^2 = 0$$

então $c_0 I + c_1 A + A^2 = 0$, de modo que

$$A^2 = -c_1 A - c_0 I$$

Multiplicando ambos os lados por A, temos $A^3 = -c_1A^2 - c_0A$, que expressa A^3 em termos de A^2 e A, e multiplicando por A^3, temos $A^4 = -c_1A^3 - c_0A^2$, que expressa A^4 em termos de A^3 e A^2. Continuando assim, podemos calcular potências sucessivas de A expressando-as em termos de potências menores. Use esse procedimento para calcular A^2, A^3, A^4 e A^5 com

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

10. Use o método do exercício precedente para calcular A^3 e A^4 com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

11. Encontre os autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

12. (a) No Exercício 17 da Seção 5.1, foi mostrado que se A for uma matriz $n \times n$, então 1 é o coeficiente de λ^n no polinômio característico de A. (Um polinômio com essa propriedade é denominado ***mônico***.) Mostre que a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}$$

tem polinômio característico

$$p(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

Isso mostra que cada polinômio mônico é o polinômio característico de alguma matriz. A matriz nesse exemplo é denominada ***matriz companheira*** de $p(\lambda)$. [*Sugestão*: calcule todos os determinantes nesse problema somando um múltiplo da segunda linha à primeira para introduzir um zero no topo da primeira coluna e, então, expandir por cofatores ao longo da primeira coluna.]

(b) Encontre uma matriz cujo polinômio característico seja

$$p(\lambda) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 3\lambda^3 + \lambda^4$$

13. Uma matriz quadrada A é dita ***nilpotente*** se $A^n = 0$ com algum inteiro positivo n. O pode ser dito sobre os autovalores de uma matriz nilpotente?

14. Prove: se A for uma matriz $n \times n$ com n ímpar, então A tem pelo menos um autovalor real.

15. Encontre uma matriz A de tamanho 3×3 com autovalores $\lambda = 0$ e -1 e autovetores associados

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

respectivamente.

16. Suponha que uma matriz A de tamanho 4×4 tenha autovalores $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$ e $\lambda_4 = -3$.

(a) Use o método do Exercício 16 da Seção 5.1 para encontrar det(A).

(b) Use o Exercício 5 precedente para encontrar tr(A).

17. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^3 = A$. O que pode ser dito sobre os autovalores de A?

18. (a) Resolva o sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= 2y_1 + 4y_2 \end{aligned}$$

(b) Encontre a solução que satisfaz as condições iniciais $y_1(0) = 5$ e $y_2(0) = 6$.

CAPÍTULO 6

Espaços com Produto Interno

CONTEÚDO DO CAPÍTULO

INTRODUÇÃO

No Capítulo 3, definimos o produto escalar de vetores em R^n e utilizamos esse conceito para definir as noções de comprimento, ângulo, distância e ortogonalidade. Neste capítulo, generalizamos aquelas ideias para que sejam aplicáveis a qualquer espaço vetorial e não só ao R^n. Também discutimos várias aplicações dessas ideias.

6.1 Produtos internos

Nesta seção, utilizamos as propriedades mais importantes do produto escalar de R^n como axiomas que, sendo satisfeitos pelos vetores num espaço vetorial V, permitem a extensão das noções de comprimento, distância, ângulo e perpendicularidade a espaços vetoriais arbitrários.

Produtos internos gerais

Na Definição 4 da Seção 3.2, definimos o produto escalar de dois vetores em R^n, e no Teorema 3.2.2, listamos as quatro propriedades fundamentais desses produtos. Nosso primeiro objetivo nesta seção é estender a noção de produto escalar para espaços vetoriais arbitrários usando essas quatro propriedades como axiomas. Apresentamos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1 Um ***produto interno*** num espaço vetorial real V é uma função que associa um número real $\langle u, v\rangle$ a cada par de vetores em V de tal maneira que os seguintes axiomas são satisfeitos por quaisquer vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ de V e qualquer escalar a.

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle$ [**Axioma de simetria**]
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ [**Axioma de aditividade**]
3. $\langle a\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ [**Axioma de homogeneidade**]
4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \geq 0$ e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = 0$ *se, e só se,* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ [**Axioma de positividade**]

Um espaço vetorial real com um produto interno é chamado ***espaço com produto interno real***.

Observe que a Definição 1 só contempla espaços vetoriais *reais*. Uma definição de produto interno em espaços vetoriais *complexos* é dada nos exercícios. Como quase nunca utilizamos espaços vetoriais complexos neste texto, o leitor pode supor que, daqui em diante, todos os espaços vetoriais em consideração são reais, mesmo que alguns dos teoremas sejam igualmente válidos em espaços vetoriais complexos.

Como os axiomas de produto interno real têm por base as propriedades do produto escalar, esses axiomas de espaço com produto interno estão automaticamente satisfeitos se definirmos o produto interno de dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em R^n por

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Esse produto interno costuma ser denominado ***produto interno euclidiano*** (ou ***produto interno canônico***) em R^n, para distingui-lo de outros produtos internos que possam ser definidos em R^n. Dizemos que o espaço R^n com o produto interno euclidiano é o ***espaço euclidiano de dimensão n***.

Os produtos internos podem ser usados para definir as noções de comprimento e distância em espaços com produto interno arbitrários da mesma forma que o fizemos com o produto escalar em R^n. Nas Fórmulas (11) e (19) da Seção 3.2, vimos que se **u** e **v** forem vetores no espaço euclidiano de dimensão n, a norma e a distância podem ser expressas em termos do produto escalar por

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \quad \text{e} \quad d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})}$$

Motivados por essas fórmulas, apresentamos a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 1 Se V for um espaço com produto interno real, então a ***norma*** (ou ***comprimento***) de um vetor **v** em V é definida por

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

e a ***distância*** entre dois vetores é denotada por $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e definida por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle}$$

Dizemos que um vetor de norma 1 é um ***vetor unitário***.

O próximo teorema, que enunciamos sem prova, mostra que a norma e a distância num espaço com produto interno real têm muitas das propriedades esperadas.

TEOREMA 6.1.1 *Se* **u** *e* **v** *forem vetores num espaço com produto interno real V e k um escalar, então*

(*a*) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$, *com igualdade valendo se, e só se,* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(*b*) $\|k\mathbf{v}\| = |k|\,\|\mathbf{v}\|$.

(*c*) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

(*d*) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$, *com igualdade valendo se, e só se,* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Embora o produto interno euclidiano seja o produto interno mais importante do R^n, existem várias aplicações nas quais é desejável modificar o produto interno euclidiano *ponderando* cada termo diferentemente. Mais precisamente, se

$$w_1, w_2, \ldots, w_n$$

forem números reais *positivos*, que denominamos ***pesos***, e se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ forem vetores em R^n, então pode ser mostrado que a fórmula

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = w_1 u_1 v_1 + w_2 u_2 v_2 + \cdots + w_n u_n v_n \tag{1}$$

define um produto interno em R^n que denominamos ***produto interno euclidiano ponderado com pesos*** $w_1, w_2, \ldots, w_n$.

Observe que o produto interno euclidiano canônico é o caso especial de produto interno euclidiano ponderado em que todos os pesos são iguais a 1.

▶ EXEMPLO 1 Produto interno euclidiano ponderado

Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ vetores em R^2. Verifique que o produto interno euclidiano ponderado

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 \tag{2}$$

satisfaz os quatro axiomas de produto interno.

> No Exemplo 1, utilizamos a letra w com índices para denotar os componentes do vetor $\mathbf{w}$ e não os pesos. Os pesos são os números 2 e 3 na Fórmula (2).

Solução

Axioma 1: Trocar $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ de lugar na Fórmula (2) não altera a soma do lado direito, portanto, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

Axioma 2: Se $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, então

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= 3(u_1 + v_1)w_1 + 2(u_2 + v_2)w_2 \\ &= 3(u_1 w_1 + v_1 w_1) + 2(u_2 w_2 + v_2 w_2) \\ &= (3u_1 w_1 + 2u_2 w_2) + (3v_1 w_1 + 2v_2 w_2) \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \end{aligned}$$

Axioma 3: $\langle a\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3(au_1)v_1 + 2(au_2)v_2$

$$\begin{aligned} &= a(3u_1 v_1 + 2u_2 v_2) \\ &= a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

Axioma 4: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 3(v_1 v_1) + 2(v_2 v_2) = 3v_1^2 + 2v_2^2 \geq 0$, com igualdade se, e só se, $v_1 = v_2 = 0$, ou seja, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. ◀

Uma aplicação dos produtos internos euclidianos ponderados

Para ilustrar uma maneira pela qual pode surgir um produto interno euclidiano ponderado, digamos que um experimento físico possa produzir qualquer um entre n possíveis valores numéricos

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

e que uma série de m repetições do experimento forneçam esses valores com várias frequências. Mais especificamente, digamos que x_1 ocorra f_1 vezes, x_2 ocorra f_2 vezes, e assim por diante. Como há um total de m repetições do experimento, obtemos

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = m$$

Assim, a ***média aritmética*** dos valores numéricos observados (denotada por $\bar{x}$) é

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = \frac{1}{m}(f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_n x_n) \tag{3}$$

Se escrevermos

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (f_1, f_2, \ldots, f_n) \\ \mathbf{x} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ w_1 = w_2 = \cdots &= w_n = 1/m \end{aligned}$$

então (3) pode ser expresso como o produto interno euclidiano ponderado

$$\bar{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{x} \rangle = w_1 f_1 x_1 + w_2 f_2 x_2 + \cdots + w_n f_n x_n$$

▶ EXEMPLO 2 Usando um produto interno euclidiano ponderado

É importante não esquecer que a norma e a distância dependem do produto interno que está sendo usado. Se o produto interno for mudado, então as normas e as distâncias entre vetores também mudam. Por exemplo, para os vetores $\mathbf{u} = (1, 0)$ e $\mathbf{v} = (0, 1)$ em R^2 com o produto interno euclidiano, temos

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

e

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|(1, -1)\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

No entanto, mudando para o produto interno euclidiano ponderado

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1 v_1 + 2u_2 v_2$$

temos

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = [3(1)(1) + 2(0)(0)]^{1/2} = \sqrt{3}$$

e

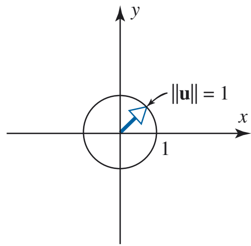
$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \langle (1, -1), (1, -1) \rangle^{1/2}$$
$$= [3(1)(1) + 2(-1)(-1)]^{1/2} = \sqrt{5} \quad ◀$$

Círculos unitários e esferas em espaços com produto interno

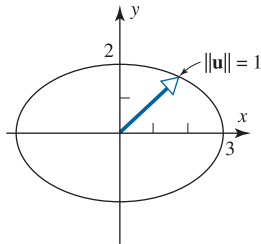
Se V for um espaço com produto interno, então o conjunto de todos os pontos em V que satisfazem

$$\|\mathbf{u}\| = 1$$

é denominado ***esfera unitária***, ou ***círculo unitário***, de V.



(a) O círculo unitário usando um produto interno euclidiano canônico.



(b) O círculo unitário usando um produto interno euclidiano ponderado.

▲ **Figura 6.1.1**

▶ **EXEMPLO 3 Círculos unitários incomuns em R^2**

(a) Esboce o círculo unitário num sistema de coordenadas xy em R^2 usando o produto interno euclidiano $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$.

(b) Esboce o círculo unitário num sistema de coordenadas xy em R^2 usando o produto interno euclidiano ponderado $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{9}u_1 v_1 + \frac{1}{4}u_2 v_2$.

Solução (a) Se $\mathbf{u} = (x, y)$, então $\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, de modo que a equação do círculo unitário é $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ ou, elevando ao quadrado ambos os lados,

$$x^2 + y^2 = 1$$

Como era de se esperar, o gráfico dessa equação é um círculo de raio 1 centrado na origem (Figura 6.1.1a).

Solução (b) Se $\mathbf{u} = (x, y)$, então $\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2}$, de modo que a equação do círculo unitário é $\sqrt{\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2} = 1$ ou, elevando ao quadrado ambos os lados,

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

O gráfico dessa equação é a elipse mostrada na Figura 6.1.1b. ◀

Observação Pode parecer estranho que o "círculo unitário" na segunda parte do exemplo precedente tenha um formato elíptico. Isso faz mais sentido se pensarmos em círculos e esferas em espaços vetoriais arbitrários do ponto de vista *algébrico* ($\|\mathbf{u}\| = 1$) em vez de geométrico. A mudança na geometria ocorre porque a norma, não sendo euclidiana, tem o efeito de distorcer o espaço que estamos acostumados a ver com "olhos euclidianos".

Produtos internos gerados por matrizes

Os produtos internos euclidiano e ponderado são casos particulares de uma classe geral de produtos internos do R^n denominados ***produtos internos matriciais***. Para definir essa classe de produtos internos, sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores em R^n dados em *forma de coluna* e seja A uma matriz $n \times n$ *invertível*. Pode ser mostrado (Exercício 31) que se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ denota o produto interno euclidiano em R^n, então a fórmula

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} \tag{4}$$

também define um produto interno, denominado ***produto interno em R^n gerado por A***.

Na Tabela 1 da Seção 3.2, vimos que se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ estiverem em forma de coluna, então $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ pode ser escrito como $\mathbf{v}^T\mathbf{u}$, do que segue que (4) pode ser expresso por

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (A\mathbf{v})^T A\mathbf{u}$$

ou, equivalentemente,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^T A^T A \mathbf{u} \tag{5}$$

▶ EXEMPLO 4 Produtos internos euclidianos ponderados gerados por matrizes

Os produtos internos euclidianos canônico e ponderado são exemplos de produtos internos matriciais. O produto interno euclidiano canônico de R^n é gerado pela matriz identidade $n \times n$, pois, tomando $A = I$ na Fórmula (4), obtemos

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = I\mathbf{u} \cdot I\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

e o produto interno euclidiano ponderado

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = w_1 u_1 v_1 + w_2 u_2 v_2 + \cdots + w_n u_n v_n \tag{6}$$

é gerado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Isso pode ser visto observando primeiramente que $A^T A$ é a matriz diagonal cujas entradas na diagonal são os pesos $w_1, w_2, \ldots, w_n$ e, depois, observando que (5) simplifica para (6) quando A for a matriz na Fórmula (7).

▶ EXEMPLO 5 De novo o Exemplo 1

O produto interno euclidiano ponderado $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1 v_1 + 2u_2 v_2$ discutido no Exemplo 1 é o produto interno de R^2 gerado por

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad ◀$$

Qualquer matriz diagonal de entradas diagonais positivas gera um produto interno ponderado. Por quê?

Outros exemplos de produtos internos

Até aqui, consideramos somente exemplos de produtos internos em R^n. Agora consideramos exemplos de produtos internos em alguns dos outros tipos de espaços vetoriais discutidos previamente.

▶ EXEMPLO 6 Um produto interno em M_{nn}

Se U e V forem matrizes $n \times n$, então a fórmula

$$\langle U, V \rangle = \operatorname{tr}(U^T V) \tag{8}$$

define um produto interno no espaço vetorial M_{nn} (ver a Definição 8 da Seção 1.3 para uma definição de traço). Podemos provar que isso ocorre confirmando que os quatro axiomas de espaços vetoriais com produtos internos são satisfeitos, mas podemos ver por que isso ocorre calculando (8) para as matrizes 2×2

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$

Obtemos

$$\langle U, V \rangle = \operatorname{tr}(U^T V) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4$$

que é simplesmente o produto escalar das entradas correspondentes das duas matrizes. Por exemplo, se

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

então

$$\langle U, V \rangle = 1(-1) + 2(0) + 3(3) + 4(2) = 16$$

A norma de uma matriz U em relação a esse produto interno é

$$\|U\| = \langle U, U \rangle^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}$$

▶ EXEMPLO 7 O produto interno canônico em P_n

Se

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

forem polinômios em P_n, então a fórmula seguinte define um produto interno em P_n (verifique) que denominamos ***produto interno canônico*** nesse espaço.

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \tag{9}$$

A norma de um polinômio **p** em relação a esse produto interno é

$$\|\mathbf{p}\| = \sqrt{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2}$$

▶ EXEMPLO 8 O produto interno de avaliação em P_n

Se

$$\mathbf{p} = p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

forem polinômios em P_n e se $x_0, x_1, \ldots, x_n$ forem números reais distintos (denominados ***pontos amostrais***), então a fórmula

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p(x_0)q(x_0) + p(x_1)q(x_1) + \cdots + p(x_n)q(x_n) \tag{10}$$

define um produto interno em P_n que denominamos ***produto interno de avaliação*** em x_0, $x_1, \ldots, x_n$. Algebricamente, isso pode ser visto como o produto escalar das ênuplas

$$(p(x_0), p(x_1), \ldots, p(x_n)) \quad \text{e} \quad (q(x_0), q(x_1), \ldots, q(x_n))$$

e, portanto, os três primeiros axiomas de produto interno seguem das propriedades do produto escalar. O quarto axioma de produto interno segue do fato de que

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = [p(x_0)]^2 + [p(x_1)]^2 + \cdots + [p(x_n)]^2 \geq 0$$

com igualdade valendo se, e só se,

$$p(x_0) = p(x_1) = \cdots = p(x_n) = 0$$

Como um polinômio não nulo de grau n não pode ter mais que n raízes distintas, necessariamente $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, provando que é válido o quarto axioma de produto interno.

A norma de um polinômio **p** em relação ao produto interno de avaliação é

$$\|\mathbf{p}\| = \sqrt{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} = \sqrt{[p(x_0)]^2 + [p(x_1)]^2 + \cdots + [p(x_n)]^2} \tag{11}$$

▶ EXEMPLO 9 Trabalhando com o produto interno de avaliação

Considere em P_2 o produto interno de avaliação nos pontos

$$x_0 = -2, \quad x_1 = 0, \quad \text{e} \quad x_2 = 2$$

Calcule $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ e $\|\mathbf{p}\|$ com os polinômios $\mathbf{p} = p(x) = x^2$ e $\mathbf{q} = q(x) = 1 + x$.

Solução Segue de (10) e (11) que

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p(-2)q(-2) + p(0)q(0) + p(2)q(2) = (4)(-1) + (0)(1) + (4)(3) = 8$$

$$\|\mathbf{p}\| = \sqrt{[p(x_0)]^2 + [p(x_1)]^2 + [p(x_2)]^2} = \sqrt{[p(-2)]^2 + [p(0)]^2 + [p(2)]^2}$$
$$= \sqrt{4^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

▶ EXEMPLO 10 Um produto interno em $C[a, b]$

REQUER CÁLCULO

Sejam $\mathbf{f} = f(x)$ e $\mathbf{g} = g(x)$ duas funções contínuas em $C[a, b]$ e defina

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \tag{12}$$

Mostremos que essa fórmula define um produto interno em $C[a, b]$ verificando os quatro axiomas de produto interno com as funções $\mathbf{f} = f(x)$, $\mathbf{g} = g(x)$ e $\mathbf{h} = h(x)$ em $C[a, b]$.

1. $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)f(x)\,dx = \langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle$

mostra que vale o Axioma 1.

2. $$\langle \mathbf{f} + \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle = \int_a^b (f(x) + g(x))h(x)\,dx$$
$$= \int_a^b f(x)h(x)\,dx + \int_a^b g(x)h(x)\,dx$$
$$= \langle \mathbf{f}, \mathbf{h} \rangle + \langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle$$

mostra que vale o Axioma 2.

3. $\langle k\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b kf(x)g(x)\,dx = k\int_a^b f(x)g(x)\,dx = k\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$

mostra que vale o Axioma 3.

4. Se $\mathbf{f} = f(x)$ for uma função qualquer em $C[a, b]$, então

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = \int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0 \tag{13}$$

pois $f^2(x) \geq 0$ cada x do intervalo $[a, b]$. Além disso, por f ser contínua em $[a, b]$, a igualdade na Fórmula (13) vale se, e só se, a função f for identicamente nula em $[a, b]$, ou seja, se $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, mostrando que vale o Axioma 4.

▶ EXEMPLO 11 Norma de um vetor em $C[a, b]$

REQUER CÁLCULO

Se $C[a, b]$ tem o produto interno definido no Exemplo 10, então a norma de uma função $\mathbf{f} = f(x)$ em relação a esse produto interno é

$$\|\mathbf{f}\| = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle^{1/2} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \tag{14}$$

e a esfera unitária nesse espaço consiste em todas as funções $\mathbf{f}$ em $C[a, b]$ que satisfazem a equação

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = 1 \quad ◀$$

Observação Observe que o espaço vetorial P_n é um subespaço de $C[a, b]$, porque os polinômios são funções contínuas. Assim, a Fórmula (12) define um produto interno em P_n.

Observação No Cálculo, mostra-se que o comprimento de arco de uma curva $y = f(x)$ ao longo de um intervalo $[a, b]$ é dado pela fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \tag{15}$$

Não confunda esse conceito de comprimento de arco com $\|\mathbf{f}\|$, que é o comprimento (norma) de $\mathbf{f}$ quando $\mathbf{f}$ for visto como um vetor em $C[a, b]$. As duas Fórmulas (14) e (15) são bem diferentes.

Propriedades algébricas dos produtos internos

O próximo teorema lista algumas das propriedades algébricas de produtos internos que seguem dos axiomas de produto interno. Esse resultado generaliza o Teorema 3.2.3, relativo ao produto escalar em R^n.

TEOREMA 6.1.2 *Se* **u**, **v** *e* **w** *forem vetores num espaço com produto interno real V, e k for um escalar, então*

(*a*) $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0}\rangle = 0$

(*b*) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle$

(*c*) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle$

(*d*) $\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$

(*e*) $k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, k\mathbf{v}\rangle$

Prova Provamos a parte (*b*) e deixamos a prova das demais partes como exercícios.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}\rangle &= \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle && \textbf{[Por simetria]} \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle && \textbf{[Por aditividade]} \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle && \textbf{[Por simetria]} \end{aligned}$$ ◀

O exemplo a seguir ilustra como o Teorema 6.1.2 e as propriedades que definem os produtos internos podem ser usados para efetuar cálculos algébricos com produtos internos. É instrutivo o leitor justificar cada passo da argumentação a seguir.

▶ EXEMPLO 12 Calculando com produtos internos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} - 2\mathbf{v}, 3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}\rangle &= \langle \mathbf{u}, 3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}\rangle - \langle 2\mathbf{v}, 3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}\rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, 3\mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u}, 4\mathbf{v}\rangle - \langle 2\mathbf{v}, 3\mathbf{u}\rangle - \langle 2\mathbf{v}, 4\mathbf{v}\rangle \\ &= 3\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - 6\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle - 8\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \\ &= 3\|\mathbf{u}\|^2 + 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - 6\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - 8\|\mathbf{v}\|^2 \\ &= 3\|\mathbf{u}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - 8\|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned}$$ ◀

Revisão de conceitos

- Axiomas de produto interno
- Produto interno euclidiano
- Espaço euclidiano de dimensão *n*
- Produto interno euclidiano ponderado
- Círculo (esfera) unitário
- Produto interno matricial
- Norma num espaço com produto interno
- Distância entre dois vetores num espaço com produto interno
- Exemplos de produtos internos
- Propriedades de produtos internos

Aptidões desenvolvidas

- Calcular o produto interno de dois vetores.
- Encontrar a norma de um vetor.
- Encontrar a distância entre dois vetores.
- Mostrar que uma dada fórmula define um produto interno.
- Mostrar que uma dada fórmula não define um produto interno provando que não vale pelo menos um dos axiomas de produto interno.

Conjunto de exercícios 6.1

1. Sejam $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ o produto interno euclidiano em R^2 e $\mathbf{u} = (1, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 2)$, $\mathbf{w} = (0, -1)$ e $k = 3$. Calcule as expressões dadas.

(a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ (b) $\langle k\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ (c) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

(d) $\|\mathbf{v}\|$ (e) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ (f) $\|\mathbf{u} - k\mathbf{v}\|$

2. Repita o Exercício 1 com o produto interno euclidiano ponderado $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2$.

3. Sejam $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ o produto interno euclidiano em R^2 e $\mathbf{u} = (3, -2)$, $\mathbf{v} = (4, 5)$, $\mathbf{w} = (-1, 6)$ e $k = -4$. Verifique as expressões dadas.

(a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

(b) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

(c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$

(d) $\langle a\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, a\mathbf{v} \rangle$

(e) $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$

4. Repita o Exercício 3 com o produto interno euclidiano ponderado $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 4u_1v_1 + 5u_2v_2$.

5. Sejam $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ o produto interno euclidiano em R^2 gerado por $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u} = (2, 1)$, $\mathbf{v} = (-1, 1)$, $\mathbf{w} = (0, -1)$. Calcule as expressões dadas.

(a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ (b) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ (c) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

(d) $\|\mathbf{v}\|$ (e) $d(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ (f) $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2$

6. Repita o Exercício 5 com o produto interno em R^2 gerado por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

7. Em cada parte, calcule $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ usando o produto interno do Exemplo 6.

(a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

8. Em cada parte, calcule $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ usando o produto interno do Exemplo 7.

(a) $\mathbf{p} = -2 + x + 3x^2$, $\mathbf{q} = 4 - 7x^2$

(b) $\mathbf{p} = -5 + 2x + x^2$, $\mathbf{q} = 3 + 2x - 4x^2$

9. (a) Use a Fórmula (4) para mostrar que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 9u_1v_1 + 4u_2v_2$ é o produto interno em R^2 gerado por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Use o produto interno da parte (a) para calcular $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ com $\mathbf{u} = (-3, 2)$ e $\mathbf{v} = (1, 7)$.

10. (a) Use a Fórmula (4) para mostrar que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 5u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 10u_2v_2$$

é o produto interno em R^2 gerado por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) Use o produto interno da parte (a) para calcular $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ com $\mathbf{u} = (0, -3)$ e $\mathbf{v} = (6, 2)$.

11. Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Em cada parte, a expressão dada é um produto interno em R^2. Encontre a matriz que gera esse produto interno.

(a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2$ (b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 4u_1v_1 + 6u_2v_2$

12. Suponha que P_2 tenha o produto interno do Exemplo 7. Em cada parte, encontre $\|\mathbf{p}\|$.

(a) $\mathbf{p} = -2 + 3x + 2x^2$ (b) $\mathbf{p} = 4 - 3x^2$

13. Suponha que M_{22} tenha o produto interno do Exemplo 6. Em cada parte, encontre $\|A\|$.

(a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

14. Suponha que P_2 tenha o produto interno do Exemplo 7. Encontre $d(\mathbf{p}, \mathbf{p})$ com

$$\mathbf{p} = 3 - x + x^2, \quad \mathbf{q} = 2 + 5x^2$$

15. Suponha que M_{22} tenha o produto interno do Exemplo 6. Em cada parte, encontre $d(A, B)$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

16. Suponha que P_2 tenha o produto interno do Exemplo 9 e considere $\mathbf{p} = 1 + x + x^2$ e $\mathbf{q} = 1 - 2x^2$. Em cada parte, calcule a expressão.

(a) $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ (b) $\|\mathbf{p}\|$ (c) $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$

17. Suponha que P_3 tenha o produto interno de avaliação nos pontos amostrais

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2$$

Encontre $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ e $\|\mathbf{p}\|$ com $\mathbf{p} = x + x_3$ e $\mathbf{q} = 1 + x^2$.

18. Em cada parte, use o produto interno em R^2 dado para calcular $\|\mathbf{w}\|$, com $\mathbf{w} = (-1, 3)$.

(a) o produto interno euclidiano

(b) o produto interno euclidiano ponderado $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$, com $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.

(c) o produto interno gerado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

19. Use os produtos internos do Exercício 18 para encontrar $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ com $\mathbf{u} = (-1, 2)$ e $\mathbf{v} = (2, 5)$

20. Suponha que **u**, **v** e **w** sejam vetores tais que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 2, \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = -3, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle = 5$$
$$\|\mathbf{u}\| = 1, \quad \|\mathbf{v}\| = 2, \quad \|\mathbf{w}\| = 7$$

Em cada parte, calcule a expressão.

(a) $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle$ (b) $\langle 2\mathbf{v}-\mathbf{w}, 3\mathbf{u}+2\mathbf{w}\rangle$

(c) $\langle \mathbf{u}-\mathbf{v}-2\mathbf{w}, 4\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle$ (d) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$

(e) $\langle 2\mathbf{w}-\mathbf{v}\rangle$ (f) $\|\mathbf{u}-2\mathbf{v}+4\mathbf{w}\|$

21. Em cada parte, esboce o círculo unitário em R^2 usando o produto interno dado.

(a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \frac{1}{4}u_1v_1 + \frac{1}{16}u_2v_2$

(b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2$

22. Encontre um produto interno euclidiano ponderado em R^2 no qual o círculo unitário seja a elipse mostrada na figura dada.

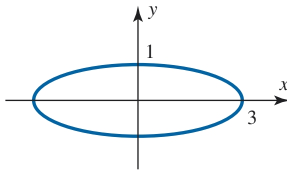


Figura Ex-22

23. Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Em cada parte, mostre que a expressão é um produto interno em R^2 verificando a validade dos axiomas de produto interno.

(a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2$

(b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 4u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 4u_2v_2$

24. Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Em cada parte, determine se a expressão é um produto interno em R^3. Se não for, liste os axiomas que não valem.

(a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = u_1v_1 + u_3v_3$

(b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$

(c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3$

(d) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$

25. Mostre que vale a identidade dada com vetores de qualquer espaço com produto interno.

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

26. Mostre que vale a identidade dada com vetores de qualquer espaço com produto interno.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \tfrac{1}{4}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \tfrac{1}{4}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$$

27. Sejam $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$ e $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$.

Mostre que $\langle U, V\rangle = u_1v_1 + u_2v_3 + u_3v_2 + u_4v_4$ *não define* um produto interno em M_{22}.

28. (***Requer Cálculo***) Suponha que P_2 tenha o produto interno

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

(a) Encontre $\|\mathbf{p}\|$ com $\mathbf{p} = 1$, $\mathbf{p} = x$ e $\mathbf{p} = x^2$

(b) Encontre $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ com $\mathbf{p} = 1$ e $\mathbf{q} = x$.

29. (***Requer Cálculo***) Em cada parte, use o produto interno

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

em P_3 para calcular $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle$.

(a) $\mathbf{p} = 1 - x + x^2 + 5x^3$, $\mathbf{q} = x - 3x^2$

(b) $\mathbf{p} = x - 5x^3$, $\mathbf{q} = 2 + 8x^2$

30. (***Requer Cálculo***) Em cada parte, use o produto interno

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \int_{0}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

em $C[0, 1]$ para calcular $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle$.

(a) $\mathbf{f} = \cos 2\pi x$, $\mathbf{g} = \operatorname{sen} 2\pi x$

(b) $\mathbf{f} = x$, $\mathbf{g} = e^x$

(c) $\mathbf{f} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x$, $\mathbf{g} = 1$

31. Prove que a Fórmula (4) define um produto interno em R^n.

32. A definição de espaço vetorial complexo foi dada na primeira nota marginal da Seção 4.1. A definição de um ***produto interno complexo*** num espaço vetorial complexo V é idêntica à definição 1, exceto que os escalares podem ser números complexos e o Axioma 1 é substituído por $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle}$. Os demais axiomas permanecem inalterados. Um espaço vetorial complexo com um produto interno complexo é denominado ***espaço com produto interno complexo***. Prove que se V for um espaço com produto interno complexo, então $\langle \mathbf{u}, a\mathbf{v}\rangle = \overline{a}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(g), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) O produto escalar em R^2 é um exemplo de produto interno ponderado.

(b) O produto interno de dois vetores não pode ser um número real negativo.

(c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle$.

(d) $\langle a\mathbf{u}, a\mathbf{v}\rangle = a^2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$.

(e) Se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$, então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(f) Se $\|\mathbf{v}\|^2$, então $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(g) Se A for uma matriz $n \times n$, então $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}$ define um produto interno em R^n.

6.2 Ângulo e ortogonalidade em espaços com produto interno

Na Seção 3.2, definimos a noção de "ângulo" entre vetores em R^n. Nesta seção, estendemos essa ideia a espaços com produto interno arbitrários. Com isso, também podemos estender a noção de ortogonalidade, preparando o terreno para uma variedade de novas aplicações.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Na Fórmula (20) da Seção 3.2, vimos que o ângulo θ entre dois vetores **u** e **v** em R^n é

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right) \tag{1}$$

A validade dessa fórmula foi garantida porque seguia da desigualdade de Cauchy--Schwarz (Teorema 3.2.4) que

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \leq 1 \tag{2}$$

o que se exige para definir a função arco cosseno. A generalização seguinte do Teorema 3.2.4 nos permite definir o ângulo entre dois vetores em *qualquer* espaço com produto interno real.

TEOREMA 6.2.1 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Se **u** *e* **v** *forem vetores num espaço com produto interno real V, então*

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \tag{3}$$

Prova Antes de começar, advertimos o leitor que a prova dada aqui depende de um truque que não é fácil de motivar.

No caso em que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, os dois lados de (3) são iguais, pois $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ e $\|\mathbf{u}\|$ são ambos nulos. Logo, basta considerar o caso em que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Com essa hipótese, sejam

$$a = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle, \quad b = 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \quad c = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

e t um número real qualquer. Como o axioma da positividade afirma que o produto interno de qualquer vetor por ele mesmo é sempre não negativo, segue que

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle t\mathbf{u} + \mathbf{v}, t\mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle t^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle t + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= at^2 + bt + c \end{aligned}$$

Essa desigualdade implica que o polinômio quadrático $at^2 + bt + c$ não tem raiz real ou tem uma raiz real dupla. Portanto, seu discriminante deve satisfazer a desigualdade $b^2 - 4ac \leq 0$. Expressando os coeficientes a, b e c em termos dos vetores **u** e **v**, resulta $4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 - 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \leq 0$, ou, equivalentemente,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados e usando o fato que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ são não negativos, obtemos

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle^{1/2} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$$

completando a prova. ◀

É útil conhecer as duas formas alternativas seguintes da desigualdade de Cauchy--Schwarz.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \tag{4}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \tag{5}$$

A primeira dessas fórmulas foi obtida na prova do Teorema 6.2.1, e a segunda é uma variação da primeira.

Ângulo entre vetores

Nosso próximo objetivo é definir o que significa "ângulo" entre vetores num espaço com produto interno real. Como um primeiro passo, deixamos para o leitor usar a desigualdade de Cauchy-Schwarz para mostrar que

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1 \tag{6}$$

Em vista disso, existe um único ângulo θ em radianos com o qual

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \tag{7}$$

(Figura 6.2.1). Isso nos permite definir o ***ângulo θ entre* u *e* v** como

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}\right) \tag{8}$$

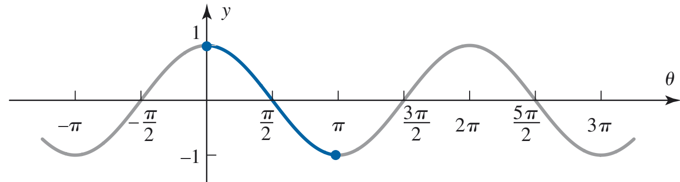


Figura 6.2.1

► EXEMPLO 1 Cosseno de um ângulo entre dois vetores em R^4

Tomando em R^4 o produto interno euclidiano, encontre o cosseno do ângulo θ entre os vetores $\mathbf{u} = (4, 3, 1, -2)$ e $\mathbf{v} = (-2, 1, 2, 3)$

Solução Deixamos para o leitor verificar que

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{30}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{18}, \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -9$$

do que segue que

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = -\frac{9}{\sqrt{30}\sqrt{18}} = -\frac{3}{2\sqrt{15}}$$ ◄

Propriedades de comprimento e distância em espaços com produto interno arbitrários

Na Seção 3.2, usamos o produto escalar para estender as noções de comprimento e distância ao R^n e mostramos que vários teoremas conhecidos permaneceram válidos (ver Teoremas 3.2.5, 3.2.6 e 3.2.7). Com ajustes mínimos nas provas daqueles teoremas, podemos mostrar que eles permanecem válidos em quaisquer espaços com produtos internos reais. Por exemplo, temos a generalização seguinte do Teorema 3.2.5, relativo à desigualdade triangular.

TEOREMA 6.2.2 *Se* **u**, **v** *e* **w** *forem vetores num espaço com produto interno real, então*

(*a*) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ **[Desigualdade triangular de vetores]**

(*b*) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ **[Desigualdade triangular de distâncias]**

Prova (a)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \\ &\le \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + 2|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \quad \text{[Propriedade do valor absoluto]} \\ &\le \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \quad \text{[Por (3)]} \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2\end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada, obtemos $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Prova (b) Idêntica à prova da parte (b) do Teorema 3.2.5. ◀

Ortogonalidade

Embora o Exemplo 1 seja um exercício matemático útil, só há ocasionalmente a necessidade de calcular ângulos em espaços vetoriais distintos de R^2 e R^3. Um problema de maior interesse em todos os espaços com produtos internos arbitrários é determinar se o ângulo entre dois vetores é $\pi/2$. A partir da Fórmula (8), podemos ver que se **u** e **v** forem dois vetores não nulos, então o ângulo entre eles é $\theta = \pi/2$ se, e só se, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$. Em vista disso, apresentamos a definição seguinte, que pode ser aplicada mesmo se um dos vetores (ou ambos) for nulo.

DEFINIÇÃO 1 Dizemos que dois vetores **u** e **v** de um espaço com produto interno são ***ortogonais*** se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$.

Como mostra o próximo exemplo, a ortogonalidade depende do produto interno, pois num mesmo espaço vetorial, dois vetores podem ser ortogonais em relação a um produto interno, mas não em relação a um outro.

▶ EXEMPLO 2 A ortogonalidade depende do produto interno

Os vetores $\mathbf{u} = (1, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, -1)$ são ortogonais em relação ao produto interno euclidiano em R^2, pois

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(1) + (1)(-1) = 0$$

Contudo, não são ortogonais em relação ao produto interno euclidiano ponderado $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$, pois

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 3(1)(1) + 2(1)(-1) = 1 \neq 0$$

▶ EXEMPLO 3 Vetores ortogonais em M_{22}

Tomando em M_{22} o produto interno do Exemplo 6 da seção precedente, as matrizes

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são ortogonais, pois

$$\langle U, V\rangle = 1(0) + 0(2) + 1(0) + 1(0) = 0$$

▶ EXEMPLO 4 Vetores ortogonais em P_2

REQUER CÁLCULO

Consideremos em P_2 o produto interno

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

e sejam $\mathbf{p} = x$ e $\mathbf{q} = x^2$. Então

$$\|\mathbf{p}\| = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} xx\,dx \right]^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} x^2\,dx \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\|\mathbf{q}\| = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} x^2 x^2\,dx \right]^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} x^4\,dx \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} xx^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$$

Como $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$, os vetores $\mathbf{p} = x$ e $\mathbf{q} = x^2$ são ortogonais em relação ao produto interno dado. ◀

Na Seção 3.3, provamos o teorema de Pitágoras para vetores no espaço euclidiano de dimensão n. O próximo teorema estende esse resultado a vetores em qualquer espaço com produto interno real.

TEOREMA 6.2.3 Teorema de Pitágoras generalizado

Se **u** *e* **v** *forem vetores ortogonais num espaço com produto interno, então*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

Prova A ortogonalidade de **u** e **v** implica $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\end{aligned}$$ ◀

REQUER CÁLCULO

▶ EXEMPLO 5 O teorema de Pitágoras em P_2

No Exemplo 4, mostramos que $\mathbf{p} = x$ e $\mathbf{q} = x^2$ são ortogonais em relação ao produto interno

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

em P_2. Segue do Teorema 6.2.3 que

$$\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2$$

Assim, pelas contas feitas no Exemplo 4, temos

$$\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$$

Podemos verificar esse resultado diretamente por integração, como segue.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 &= \langle \mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p} + \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} (x + x^2)(x + x^2)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} x^2\,dx + 2\int_{-1}^{1} x^3\,dx + \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{3} + 0 + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}\end{aligned}$$ ◀

Complementos ortogonais

Na Seção 4.8, definimos a noção de *complemento ortogonal* para subespaços de R^n e usamos aquela definição para estabelecer uma relação geométrica entre os espaços fun-

damentais de uma matriz. A definição seguinte estende essa noção para espaços com produto interno arbitrários.

DEFINIÇÃO 2 Se W for um subespaço de um espaço com produto interno V, então o conjunto de todos os vetores em V que são ortogonais a cada vetor em W é denominado ***complemento ortogonal*** de W e denotado por $W^\perp$.

No Teorema 4.8.8, enunciamos três propriedades do complemento ortogonal em R^n. O teorema seguinte generaliza as partes (a) e (b) daquele teorema para espaços com produto interno arbitrários.

TEOREMA 6.2.4 *Se W for um subespaço de um espaço com produto interno V, então*

(*a*) *$W^\perp$ é um subespaço de V.*

(*b*) $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

Prova (a) O conjunto $W^\perp$ contém, pelo menos, o vetor nulo, pois $\langle \mathbf{0}, \mathbf{w} \rangle = 0$ com qualquer vetor $\mathbf{w}$ em W. Assim, resta mostrar que W é fechado na adição e na multiplicação por escalar. Para ver isso, suponha que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sejam vetores em $W^\perp$, de modo que, dado qualquer $\mathbf{w}$ em W, temos $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$ e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$. Segue dos axiomas de aditividade e homogeneidade de produtos internos que

$$\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 + 0 = 0$$
$$\langle a\mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = a(0) = 0$$

provando que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $a\mathbf{u}$ estão em $W^\perp$.

Prova (b) Se $\mathbf{v}$ for qualquer vetor em ambos W e $W^\perp$, então $\mathbf{v}$ é ortogonal a si mesmo, ou seja, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Segue do axioma da positividade de produtos internos que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. ◀

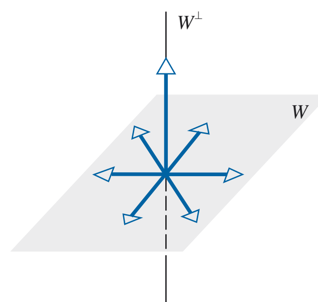
O próximo teorema, que enunciamos sem prova, generaliza a parte (c) do Teorema 4.8.8. Observe, entretanto, que esse teorema só pode ser aplicado a espaços vetoriais com produto interno de dimensão finita, ao passo que o Teorema 4.8.8 não tem essa restrição.

O Teorema 6.2.5 implica que os complementos ortogonais em espaços com produto interno de dimensão finita ocorrem aos pares, cada um sendo ortogonal ao outro (Figura 6.2.2).

TEOREMA 6.2.5 *Se W for um subespaço de um espaço com produto interno de dimensão finita V, então o complemento ortogonal de $W^\perp$ é W, ou seja,*

$$(W^\perp)^\perp = W$$

No nosso estudo dos espaços fundamentas de uma matriz, na Seção 4.8, mostramos que os espaços linha e nulo de uma matriz são complementos ortogonais em relação ao produto interno euclidiano em R^n (Teorema 4.8.9). O exemplo a seguir usa essa informação.



▲ **Figura 6.2.2** Cada vetor em W é ortogonal a cada vetor em $W^\perp$ e vice-versa.

▶ EXEMPLO 6 Uma base de um complemento ortogonal

Seja W o subespaço de R^6 gerado pelos vetores

$$\mathbf{w}_1 = (1, 3, -2, 0, 2, 0), \qquad \mathbf{w}_2 = (2, 6, -5, -2, 4, -3),$$
$$\mathbf{w}_3 = (0, 0, 5, 10, 0, 15), \qquad \mathbf{w}_4 = (2, 6, 0, 8, 4, 18)$$

Encontre uma base do complemento ortogonal de W.

Solução O espaço W é igual ao espaço linha da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

Como o espaço nulo de A é um complemento ortogonal do espaço linha de A, nosso problema se reduz a encontrar uma base do espaço nulo dessa matriz. No Exemplo 4 da Seção 4.7, mostramos que

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

formam uma base desse espaço nulo. Expressando esses vetores em notação com vírgulas (para combinar com a notação de $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ e $\mathbf{w}_4$), obtemos os vetores de base

$$\mathbf{v}_1 = (-3, 1, 0, 0, 0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (-4, 0, -2, 1, 0, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (-2, 0, 0, 0, 1, 0)$$

O leitor pode querer conferir que esses vetores são ortogonais a $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ e $\mathbf{w}_4$ calculando os produtos escalares necessários. ◀

Revisão de conceitos

- Desigualdade de Cauchy-Schwarz
- Ângulo entre vetores
- Vetores ortogonais
- Complemento ortogonal

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar o ângulo entre dois vetores num espaço com produto interno.
- Determinar se dois vetores num espaço com produto interno são ortogonais.
- Encontrar uma base do complemento ortogonal de um subespaço de um espaço com produto interno.

Conjunto de exercícios 6.2

1. Considere R^2, R^3 e R^4 com o produto interno euclidiano. Em cada parte, encontre o cosseno do ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

(a) $\mathbf{u} = (1, -3)$, $\mathbf{v} = (2, 4)$

(b) $\mathbf{u} = (-1, 0)$, $\mathbf{v} = (3, 8)$

(c) $\mathbf{u} = (-1, 5, 2)$, $\mathbf{v} = (2, 4, -9)$

(d) $\mathbf{u} = (4, 1, 8)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -3)$

(e) $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (-3, -3, -3, -3)$

(f) $\mathbf{u} = (2, 1, 7, -1)$, $\mathbf{v} = (4, 0, 0, 0)$

2. Considere P_2 com o produto interno do Exemplo 7 da Seção 6.1. Em cada parte, encontre o cosseno do ângulo entre $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$.

(a) $\mathbf{p} = -1 + 5x + 2x^2$, $\mathbf{q} = 2 + 4x - 9x^2$

(b) $\mathbf{p} = x - x^2$, $\mathbf{q} = 7 + 3x + 3x^2$

3. Considere M_{22} com o produto interno do Exemplo 6 da Seção 6.1. Em cada parte, encontre o cosseno do ângulo entre A e B.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

4. Em cada parte, determine se os vetores dados são ortogonais em relação ao produto interno euclidiano.

(a) $\mathbf{u} = (-1, 3, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 2, -1)$

(b) $\mathbf{u} = (-2, -2, -2)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$

(c) $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (0, 0, 0)$

(d) $\mathbf{u} = (-4, 6, -10, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -2, 9)$

(e) $\mathbf{u} = (0, 3, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (5, 2, -1, 0)$

(f) $\mathbf{u} = (a, b)$, $\mathbf{v} = (-b, a)$

5. Mostre que $\mathbf{p} = 1 - x + 2x^2$ e $\mathbf{q} = 2x + x^2$ são ortogonais em relação ao produto interno do Exercício 2.

6. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Em cada parte, verifique se a matriz dada é ortogonal a A em relação ao produto interno do Exercício 3.

(a) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

7. Verifique se existem escalares k e l tais que os vetores $\mathbf{u} = (2, k, 6)$, $\mathbf{v} = (l, 5, 3)$ e $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$ sejam mutuamente ortogonais em relação ao produto interno euclidiano.

8. Suponha que R^3 tenha o produto interno euclidiano e considere $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$ e $\mathbf{v} = (6, 7, -15)$. Encontre um valor de a com o qual $\|a\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = 13$.

9. Suponha que R^3 tenha o produto interno euclidiano. Em cada parte, encontre os valores de k com os quais os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais.

(a) $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 7, k)$

(b) $\mathbf{u} = (k, k, 1)$, $\mathbf{v} = (k, 5, 6)$

10. Suponha que R^4 tenha o produto interno euclidiano. Encontre dois vetores unitários que sejam ortogonais a cada um dos três vetores $\mathbf{u} = (2, 1, -4, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, -1, 2, 2)$ e $\mathbf{w} = (3, 2, 5, 4)$.

11. Em cada parte, verifique a validade da desigualdade de Cauchy-Schwarz para os vetores dados usando o produto interno euclidiano.

(a) $\mathbf{u} = (3, 2)$, $\mathbf{v} = (4, -1)$

(b) $\mathbf{u} = (-3, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$

(c) $\mathbf{u} = (-4, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (8, -4, -2)$

(d) $\mathbf{u} = (0, -2, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (-1, -1, 1, 1)$

12. Em cada parte, verifique a validade da desigualdade de Cauchy-Schwarz para os vetores dados.

(a) $\mathbf{u} = (-2, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 0)$, usando o produto interno do Exemplo 1 da Seção 6.1.

(b) $U = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ e $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, usando o produto interno do Exemplo 6 da Seção 6.1.

(c) $\mathbf{p} = -1 + 2x + x^2$ e $\mathbf{q} = 2 - 4x^2$, usando o produto interno dado no Exemplo 7 da Seção 6.1.

13. Suponha que R^4 tenha o produto interno euclidiano e seja $\mathbf{u} = (-1, 1, 0, 2)$. Determine se o vetor $\mathbf{u}$ é ortogonal ao subespaço gerado pelos vetores $\mathbf{w}_1 = (1, -1, 3, 0)$ e $\mathbf{w}_2 = (4, 0, 9, 2)$.

▶ Nos Exercícios **14–15**, suponha que R^n tenha o produto interno euclidiano. ◀

14. Seja W a reta em R^2 de equação $y = 2x$. Obtenha uma equação para $W^\perp$.

15. (a) Seja W o plano em R^3 de equação $x - 2y - 3z = 0$. Obtenha equações paramétricas de $W^\perp$.

(b) Seja W a reta em R^3 de equações paramétricas

$$x = 2t, \quad y = -5t, \quad z = 4t$$

Obtenha uma equação de $W^\perp$.

(c) Seja W a interseção dos dois planos

$$x + y + z = 0 \quad \text{e} \quad x - y + z = 0$$

em R^3. Obtenha uma equação de $W^\perp$.

16. Em cada parte, encontre uma base do complemento ortogonal do subespaço de R^n gerado pelos vetores dados.

(a) $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (5, -4, -4)$, $\mathbf{v}_3 = (7, -6, 2)$

(b) $\mathbf{v}_1 = (2, 0, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 0, -2)$

(c) $\mathbf{v}_1 = (1, 4, 5, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 3, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 3, 2, 2)$

(d) $\mathbf{v}_1 = (1, 4, 5, 6, 9)$, $\mathbf{v}_2 = (3, -2, 1, 4, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, -1, -2, -1)$, $\mathbf{v}_4 = (2, 3, 5, 7, 8)$

17. Seja V um espaço com produto interno. Mostre que se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem vetores unitários ortogonais em V, então $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$.

18. Seja V um espaço com produto interno. Mostre que se $\mathbf{w}$ for ortogonal a ambos $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, então $\mathbf{w}$ é ortogonal a $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2$, quaisquer que sejam os escalares k_1 e k_2. Interprete esse resultado geometricamente no caso em que V for R^3 com o produto interno euclidiano.

19. Seja V um espaço com produto interno. Mostre que se $\mathbf{w}$ for ortogonal a cada um dos vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$, então $\mathbf{w}$ é ortogonal a cada vetor em $\text{ger}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$.

20. Seja $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ uma base de um espaço com produto interno V. Mostre que o vetor nulo é o único vetor em V que é ortogonal a cada um dos vetores da base.

21. Seja $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ uma base de algum subespaço W de V. Mostre que $W^\perp$ consiste em todos os vetores de V que são ortogonais a cada um dos vetores da base.

22. Prove a generalização do Teorema 6.2.3 a seguir. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ forem vetores dois a dois ortogonais de um espaço com produto interno V, então

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_r\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + \cdots + \|\mathbf{v}_r\|^2$$

23. Prove: se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem matrizes $n \times 1$ e A uma matriz $n \times n$, então

$$(\mathbf{v}^T A^T A \mathbf{u})^2 \leq (\mathbf{u}^T A^T A \mathbf{u})(\mathbf{v}^T A^T A \mathbf{v})$$

24. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para provar que, dados quaisquer valores reais de a, b e θ, vale

$$(a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta)^2 \leq a^2 + b^2$$

25. Prove: se $w_1, w_2, \ldots, w_n$ forem números reais positivos e se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ forem dois vetores quaisquer em R^n, então

$$|w_1u_1u_1 + w_2u_2u_2 + \cdots + w_nu_nu_n| \\ \leq (w_1u_1^2 + w_2u_2^2 + \cdots + w_nu_n^2)^{1/2}(w_1v_1^2 + w_2v_2^2 + \cdots + w_nv_n^2)^{1/2}$$

26. Mostre que vale a igualdade na desigualdade de Cauchy--Schwarz se, e só se, **u** e **v** são linearmente independentes.

27. Use métodos vetoriais para provar que sempre é retângulo qualquer triângulo inscrito num círculo de tal modo que um de seus lados seja um diâmetro. [*Sugestão*: expresse os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ da figura dada em termos de **u** e **v**.]

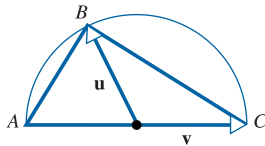


Figura Ex-27

28. Os vetores $\mathbf{u} = (1, \sqrt{3})$ e $\mathbf{v} = (-1, \sqrt{3})$ indicados na figura dada têm norma 2 e o ângulo de 60° entre eles em relação ao produto interno euclidiano. Encontre um produto interno euclidiano ponderado em relação ao qual **u** e **v** sejam vetores unitários ortogonais.

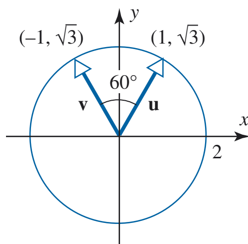


Figura Ex-28

29. (***Requer Cálculo***) Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em [0, 1]. Prove:

(a) $$\left[\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right]^2 \leq \left[\int_0^1 f^2(x)\,dx\right]\left[\int_0^1 g^2(x)\,dx\right]$$

(b) $$\left[\int_0^1 [f(x)+g(x)]^2\,dx\right]^{1/2} \leq \left[\int_0^1 f^2(x)\,dx\right]^{1/2} + \left[\int_0^1 g^2(x)\,dx\right]^{1/2}$$

[*Sugestão*: use a desigualdade de Cauchy-Schwarz.]

30. (***Requer Cálculo***) Suponha que $C[0, \pi]$ tenha o produto interno

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)\,dx$$

e seja $\mathbf{f}_n = \cos nx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Mostre que se $k \neq l$, então $\mathbf{f}_k$ e $\mathbf{f}_l$ são vetores ortogonais.

31. (a) Seja W a reta $y = x$ num sistema de coordenadas xy de R^2. Descreva o subespaço $W^\perp$.

(b) Seja W o eixo y num sistema de coordenadas xyz de R^3. Descreva o subespaço $W^\perp$.

(c) Seja W o plano yz num sistema de coordenadas xyz de R^3. Descreva o subespaço $W^\perp$.

32. Prove que a Fórmula (4) é válida com quaisquer vetores **u** e **v** num espaço com produto interno V.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(f), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se **u** for ortogonal a cada vetor de algum subespaço W, então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(b) Se **u** for um vetor em ambos W e $W^\perp$, então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(c) Se **u** e **v** forem vetores em $W^\perp$, então $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é um vetor em $W^\perp$.

(d) Se **u** for um vetor em $W^\perp$ e a um número real, então $a\mathbf{u}$ é um vetor em $W^\perp$.

(e) Se **u** e **v** forem ortogonais, então $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$.

(f) Se **u** e **v** forem ortogonais, então $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

6.3 Processo de Gram-Schmidt; decomposição *QR*

Em muitos problemas envolvendo espaços vetoriais, temos a liberdade de escolher qualquer base para o espaço vetorial que nos pareça apropriada. Em espaços com produto interno, a solução de um problema muitas vezes é simplificada enormemente pela escolha de uma base na qual os vetores sejam ortogonais entre si. Nesta seção, mostramos como obter tais bases.

Conjuntos ortogonais e ortonormais

Na Seção 6.2, já definimos que dois vetores num espaço com produto interno são *ortogonais* se seu produto interno for nulo. A próxima definição estende a noção de ortogonalidade a conjuntos de vetores num espaço com produto interno.

DEFINIÇÃO 1 Dizemos que um conjunto de dois ou mais vetores num espaço com produto interno real é ***ortogonal*** se quaisquer dois vetores distintos do conjunto forem ortogonais. Um conjunto ortogonal no qual cada vetor tem norma 1 é dito ***ortonormal***.

▶ EXEMPLO 1 Um conjunto ortogonal em R^3

Sejam

$$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (1, 0, 1), \quad \mathbf{u}_3 = (1, 0, -1)$$

e suponha que R^3 tenha o produto interno euclidiano. Então o conjunto de vetores $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é ortogonal, pois $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle = 0$. ◀

Se $\mathbf{v}$ for um vetor não nulo num espaço com produto interno, então segue do Teorema 6.1.1*b* com $k = \|\mathbf{v}\|$ que

$$\left\| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} \right\| = \left| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \right| \|\mathbf{v}\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| = 1$$

do que concluímos que multiplicar um vetor não nulo pelo recíproco de sua norma sempre produz um vetor unitário. Esse processo é denominado ***normalização*** de $\mathbf{v}$. Decorre disso que *qualquer conjunto ortogonal de vetores não nulos pode ser convertido num conjunto ortonormal normalizando cada um de seus vetores*.

▶ EXEMPLO 2 Construindo um conjunto ortonormal

As normas euclidianas dos vetores do Exemplo 1 são

$$\|\mathbf{u}_1\| = 1, \quad \|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{2}, \quad \|\mathbf{u}_3\| = \sqrt{2}$$

Consequentemente, a normalização de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ fornece

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Deixamos para o leitor verificar que o conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é ortonormal, mostrando que

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_3\| = 1 \quad ◀$$

Dois vetores não nulos perpendiculares quaisquer em R^2 são linearmente independentes, pois nenhum deles é um múltiplo escalar do outro e, em R^3, três vetores não nulos mutuamente perpendiculares quaisquer são linearmente independentes, porque nenhum desses vetores está no plano dos outros dois (e, portanto, não é alguma combinação dos outros dois). Essas observações são generalizadas no teorema seguinte.

TEOREMA 6.3.1 *Se* $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *for um conjunto ortogonal de vetores não nulos num espaço com produto interno, então S é linearmente independente.*

Prova Suponha que

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = 0 \tag{1}$$

Para demonstrar que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é linearmente independente, devemos provar que $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$.

Dado qualquer $\mathbf{v}_i$ em S, segue de (1) que

$$\langle k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_i\rangle = 0$$

ou, equivalentemente, que

$$k_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i\rangle + k_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i\rangle + \cdots + k_n\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i\rangle = 0$$

Pela ortogonalidade de S decorre que $\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i\rangle = 0$ com $j = i$, de modo que essa equação é reduzida a

$$k_i \langle \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_i\rangle = 0$$

Como os vetores em S são não nulos por hipótese,segue do axioma de positividade dos produtos internos que $\langle \mathbf{v}i , \mathbf{v}i\rangle = 0$. Assim, a equação precedente implica que cada k_i na Equação (1) é zero, que é o que queríamos provar. ◀

Como todo conjunto ortonormal é ortogonal e como seus vetores são não nulos (têm norma 1), segue do Teorema 6.3.1 que todo conjunto *ortonormal* é linearmente independente.

Num espaço com produto interno, uma base consistindo em vetores ortonormais é denominada ***base ortonormal*** e uma base consistindo em vetores ortogonais é denominada ***base ortogonal***. Um exemplo familiar de base ortonormal é a base canônica de R^n com o produto interno euclidiano, a saber,

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

▶ EXEMPLO 3 Uma base ortonormal

No Exemplo 2, mostramos que os vetores

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

formam um conjunto ortonormal em relação ao produto interno euclidiano de R^3. Pelo Teorema 6.3.1, esses vetores formam um conjunto linearmente independente e, como R^3 tem dimensão 3, segue do Teorema 4.5.4 que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base ortonormal de R^3. ◀

Coordenadas em relação a bases ortonormais

Uma maneira de expressar um vetor $\mathbf{u}$ como uma combinação linear dos vetores de uma base

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

é converter a equação vetorial

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

num sistema linear e resolver para os coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Contudo, se a base for ortogonal ou ortonormal, o próximo teorema mostra que os coeficientes podem ser obtidos de uma maneira mais simples calculando certos produtos internos apropriados.

TEOREMA 6.3.2

(*a*) *Se* $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *for uma base ortogonal de um espaço com produto interno* V *e* $\mathbf{u}$ *for um vetor qualquer em* V, *então*

$$\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n\rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\mathbf{v}_n \qquad (2)$$

(*b*) *Se* $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *for uma base ortonormal de um espaço com produto interno* V *e* $\mathbf{u}$ *for um vetor qualquer em* V, *então*

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1\rangle\mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2\rangle\mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n\rangle\mathbf{v}_n \qquad (3)$$

Prova (a) Como $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base de V, qualquer vetor $\mathbf{u}$ em V pode ser escrito na forma

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

Vamos completar a prova mostrando que

$$c_i = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \tag{4}$$

com $i = 1, 2, \ldots, n$. Para isso, observe primeiro que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle &= \langle c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle \\ &= c_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + c_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle + \cdots + c_n\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle \end{aligned}$$

Como S é um conjunto ortogonal, todos os produtos internos na última igualdade são nulos, exceto o i-ésimo, portanto,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle = c_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = c_i \|\mathbf{v}_i\|^2$$

Resolvendo essa equação para c_i, obtemos (4), o que completa a prova.

Prova (b) Nesse caso, $\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \cdots = \|\mathbf{v}_n\| = 1$, de modo que a Fórmula (2) simplifica e resulta na Fórmula (3). ◀

Usando a terminologia e a notação da Definição 2 da Seção 4.4, segue do Teorema 6.3.2 que o vetor de coordenadas de um vetor $\mathbf{u}$ em V em relação a uma base ortogonal $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é

$$(\mathbf{u})_S = \left(\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}, \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}, \ldots, \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \right) \tag{5}$$

e em relação a uma base ortonormal $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é

$$(\mathbf{u})_S = (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle) \tag{6}$$

▶ EXEMPLO 4 Um vetor de coordenadas em relação a uma base ortonormal

Sejam

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}\right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5}\right)$$

É fácil verificar que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base ortonormal de R^3 com o produto interno euclidiano. Escreva o vetor $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ como uma combinação linear dos vetores em S e encontre o vetor de coordenadas $(\mathbf{u})_S$.

Solução Deixamos para o leitor verificar que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle = -\tfrac{1}{5} \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle = \tfrac{7}{5}$$

Portanto, pelo Teorema 6.3.2, obtemos

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \tfrac{1}{5}\mathbf{v}_2 + \tfrac{7}{5}\mathbf{v}_3$$

ou seja,

$$(1, 1, 1) = (0, 1, 0) - \tfrac{1}{5}\left(-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}\right) + \tfrac{7}{5}\left(\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5}\right)$$

Assim, o vetor de coordenadas de $\mathbf{u}$ em relação a S é

$$(\mathbf{u})_S = (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle) = \left(1, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{7}{5}\right)$$

► EXEMPLO 5 Uma base ortonormal a partir de uma base ortogonal

(a) Mostre que os vetores

$$\mathbf{w}_1 = (0, 2, 0), \quad \mathbf{w}_2 = (3, 0, 3), \quad \mathbf{w}_3 = (-4, 0, 4)$$

formam uma base ortogonal de R^3 com o produto interno euclidiano, e use essa base para encontrar uma base ortonormal normalizando cada vetor.

(b) Expresse o vetor $\mathbf{u} = (1, 2, 4)$ como uma combinação linear dos vetores da base ortonormal obtida na parte (a).

Solução (a) Os vetores dados formam um conjunto ortogonal, pois

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle = 0$$

Segue do Teorema 6.3.1 que esses vetores são linearmente independentes e, portanto, formam uma base de R^3 pelo Teorema 4.5.4. Deixamos a cargo do leitor calcular as normas de $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{w}_3$ e obter a base ortonormal

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Solução (b) Segue da Fórmula (3) que

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_3$$

Deixamos a cargo do leitor conformar que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle = (1, 2, 4) \cdot (0, 1, 0) = 2$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle = (1, 2, 4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle = (1, 2, 4) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

e, portanto, que

$$(1, 2, 4) = 2(0, 1, 0) + \frac{5}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \blacktriangleleft$$

Projeções ortogonais

Muitos problemas nas aplicações são melhor resolvidos trabalhando com vetores de bases ortogonais ou ortonormais. Geralmente, essas bases são encontradas convertendo alguma base simples (digamos, uma base canônica) numa base ortogonal ou ortonormal. Para explicar exatamente como isso é feito, precisamos de algumas ideias preliminares sobre projeções ortogonais.

Na Seção 3.3, provamos um resultado que denominamos *Teorema da Projeção* (ver Teorema 3.3.2), que trata do problema de decompor algum vetor $\mathbf{u}$ em R^n na soma de dois vetores $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, em que $\mathbf{w}_1$ é a projeção ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre algum vetor não nulo $\mathbf{a}$, e $\mathbf{w}_2$ é ortogonal a $\mathbf{w}_1$ (Figura 3.3.2). Aquele resultado é um caso especial do teorema mais geral a seguir.

TEOREMA 6.3.3 Teorema da projeção

Se W for um subespaço de dimensão finita de um espaço com produto interno V, então cada vetor $\mathbf{u}$ em V pode ser expresso de maneira única como

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \tag{7}$$

em que $\mathbf{w}_1$ é um vetor em W e $\mathbf{w}_2$ é um vetor em $W^\perp$.

Os vetores $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ na Fórmula (7) costumam ser denotados por

$$\mathbf{w}_1 = \text{proj}_W \mathbf{u} \quad \text{e} \quad \mathbf{w}_2 = \text{proj}_{W^\perp} \mathbf{u} \tag{8}$$

e denominados ***projeção ortogonal de* u *em* W** e ***projeção ortogonal de* u *em* $W^\perp$**, respectivamente. O vetor $\mathbf{w}_2$ também é denominado ***componente de* u *ortogonal a* W**. Usando a notação em (8), podemos reescrever a Fórmula (7) como

$$\mathbf{u} = \text{proj}_W \mathbf{u} + \text{proj}_{W^\perp} \mathbf{u} \tag{9}$$

(Figura 6.3.1). Além disso, como $\text{proj}_{W^\perp}\mathbf{u} = \mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}$, também podemos escrever a Fórmula (9) como

$$\mathbf{u} = \text{proj}_W \mathbf{u} + (\mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}) \tag{10}$$

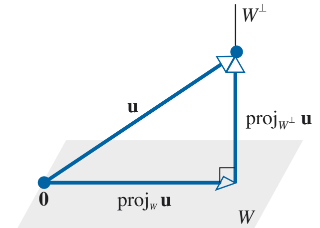


Figura 6.3.1

O próximo teorema fornece fórmulas para calcular projeções ortogonais.

TEOREMA 6.3.4 *Seja W um subespaço de dimensão finita de um espaço com produto interno V.*

(*a*) *Se* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ *for uma base ortogonal de W e* **u** *um vetor qualquer em V, então*

$$\text{proj}_W \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r \rangle}{\|\mathbf{v}_r\|^2}\mathbf{v}_r \tag{11}$$

(*b*) *Se* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ *for uma base ortonormal de W e* **u** *um vetor qualquer em V, então*

$$\text{proj}_W \mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r \rangle \mathbf{v}_r \tag{12}$$

Prova (a) Segue do Teorema 6.3.3 que o vetor **u** pode ser escrito na forma $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, em que $\mathbf{w}_1 = \text{proj}_W \mathbf{u}$ é um vetor em W e $\mathbf{w}_2$ é um vetor em $W^\perp$, e segue do Teorema 6.3.2 que o componente $\text{proj}_W \mathbf{u} = \mathbf{w}_1$ pode ser expresso em termos dos vetores da base de W como

$$\text{proj}_W \mathbf{u} = \mathbf{w}_1 = \frac{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_r \rangle}{\|\mathbf{v}_r\|^2}\mathbf{v}_r \tag{13}$$

Como $\mathbf{w}_2$ é ortogonal a W, segue que

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_2 \rangle = \cdots = \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_r \rangle = 0$$

de modo que podemos reescrever (13) como

$$\text{proj}_W \mathbf{u} = \mathbf{w}_1 = \frac{\langle \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_r \rangle}{\|\mathbf{v}_r\|^2}\mathbf{v}_r$$

ou, equivalentemente, como

$$\text{proj}_W \mathbf{u} = \mathbf{w}_1 = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r \rangle}{\|\mathbf{v}_r\|^2}\mathbf{v}_r$$

Prova (b) Nesse caso, $\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \cdots = \|\mathbf{v}_r\| = 1$, de modo que a Fórmula (13) simplifica e resulta a Fórmula (12). ◀

▶ EXEMPLO 6 Calculando projeções

Suponha que R^3 tenha o produto interno euclidiano e que W seja o subespaço gerado pelos vetores ortonormais $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$. Pela Fórmula (12), a projeção ortogonal de $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ em W é

$$\begin{aligned}\text{proj}_W \mathbf{u} &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 \\ &= (1)(0, 1, 0) + \left(-\tfrac{1}{5}\right)\left(-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}\right) \\ &= \left(\tfrac{4}{25}, 1, -\tfrac{3}{25}\right)\end{aligned}$$

O componente de $\mathbf{u}$ ortogonal a W é

$$\text{proj}_{W^\perp}\,\mathbf{u} = \mathbf{u} - \text{proj}_W\,\mathbf{u} = (1, 1, 1) - \left(\tfrac{4}{25}, 1, -\tfrac{3}{25}\right) = \left(\tfrac{21}{25}, 0, \tfrac{28}{25}\right)$$

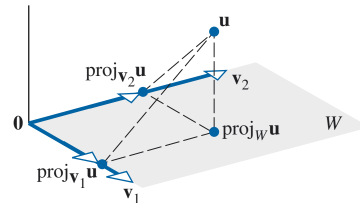
Observe que $\text{proj}_{W^\perp}\,\mathbf{u}$ é ortogonal a ambos $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, de modo que esse vetor é ortogonal a cada vetor no espaço W gerado por $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, como deveria ser. ◀

Uma interpretação geométrica da projeção ortogonal

Se W for um espaço unidimensional de um espaço com produto interno V, digamos, ger$\{\mathbf{a}\}$, então a Fórmula (11) só tem uma parcela

$$\text{proj}_W\,\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{a}\rangle}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$

No caso especial em que V for R^3 com o produto interno euclidiano, essa é exatamente a Fórmula (10) da Seção 3.3 para a projeção ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{a}$. Isso sugere que podemos pensar em (11) como a soma das projeções ortogonais sobre os "eixos" determinados pelos vetores da base do subespaço W (Figura 6.3.2).



▶ **Figura 6.3.2**

O processo de Gram-Schmidt

Vimos que as bases ortonormais exibem uma variedade de propriedades úteis. Nosso próximo teorema, que é o resultado principal desta seção, mostra que cada espaço vetorial não nulo de dimensão finita possui alguma base ortonormal. A prova desse resultado é extremamente importante, já que fornece um algoritmo, ou método, para converter uma base arbitrária numa base ortonormal.

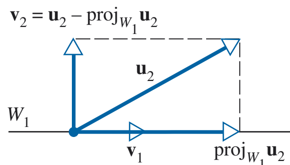
TEOREMA 6.3.5 *Cada espaço vetorial não nulo de dimensão finita possui alguma base ortonormal.*

Prova Seja W um subespaço não nulo de dimensão finita de algum espaço com produto interno e suponha que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ seja alguma base de W. É suficiente mostrar que W tem uma base ortogonal, pois os vetores dessa base podem ser normalizados para produzir uma base ortonormal. A sequência de passos a seguir produz uma base ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ de W.

Passo 1. Seja $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$.

Passo 2. Conforme ilustrado na Figura 6.3.3, podemos obter um vetor $\mathbf{v}_2$ ortogonal a $\mathbf{v}_1$ tomando o componente de $\mathbf{u}_2$ ortogonal ao espaço W_1 gerado por $\mathbf{v}_1$. Usando a Fórmula (11) para fazer essa conta, obtemos

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{W_1}\,\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$$

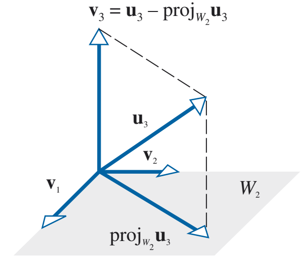


▲ **Figura 6.3.3**

É claro que se $\mathbf{v}_2 = 0$, então $\mathbf{v}_2$ não é um vetor de base. Mas isso não pode ocorrer, pois então decorreria da fórmula acima para $\mathbf{v}_2$ que

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1$$

o que implica que $\mathbf{u}_2$ é um múltiplo de $\mathbf{u}_1$, contradizendo a independência linear da base $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$.



▲ **Figura 6.3.4**

Passo 3. Para construir um vetor $\mathbf{v}_3$ que seja ortogonal a ambos $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, calculamos o componente de $\mathbf{u}_3$ ortogonal ao espaço W_2 gerado por $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ (Figura 6.3.4). Usando a Fórmula (11) para fazer essa conta, obtemos

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \text{proj}_{W_2}\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_2$$

Como no Passo 2, a independência linear de $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ garante que $\mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}$. Deixamos os detalhes para o leitor.

Passo 4. Para determinar um vetor $\mathbf{v}_4$ que seja ortogonal a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$, calculamos o componente de $\mathbf{u}_4$ ortogonal ao espaço W_3 gerado por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Por (11),

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - \text{proj}_{W_3}\mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_4 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3$$

Continuando dessa maneira, depois de r passos, obtemos um conjunto ortogonal de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_3\}$. Como conjuntos ortogonais são linearmente independentes, esse conjunto é uma base ortogonal do espaço W de dimensão r. Normalizando os vetores da base, obtemos uma base ortonormal. ◀

A construção passo a passo para de uma base ortogonal (ou ortonormal) dada na prova precedente é denominada ***processo de Gram-Schmidt***. Para referência futura, apresentamos um resumo dessa construção.

Processo de Gram-Schmidt

Para converter uma base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ numa base ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$, efetue as seguintes contas.

Passo 1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$

Passo 2. $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$

Passo 3. $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$

Passo 4. $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3$

⋮

(continue até r passos)

Passo opcional. Para converter a base ortogonal numa base ortonormal $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_r\}$, normalize os vetores da base ortogonal.

▶ EXEMPLO 7 Usando o processo de Gram-Schmidt

Considere o espaço vetorial R^3 com o produto interno euclidiano. Aplique o processo de Gram-Schmidt para transformar os vetores de base

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$$

em uma base ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ e, depois, normalize os vetores da base ortogonal para obter uma base ortonormal $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$.

Solução

Passo 1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$

Passo 2. $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{W_1}\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$

$$= (0, 1, 1) - \frac{2}{3}(1, 1, 1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Passo 3. $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \text{proj}_{W_2}\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$

$$= (0, 0, 1) - \frac{1}{3}(1, 1, 1) - \frac{1/3}{2/3}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Assim,

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

formam uma base ortogonal de R^3. As normas desses vetores são

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{v}_2\| = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \|\mathbf{v}_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

de modo que uma base ortonormal de R^3 é

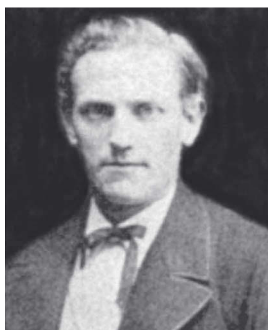
$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \blacktriangleleft$$

Observação No exemplo precedente, normalizamos no final para converter a base ortogonal numa base ortonormal. Alternativamente, poderíamos normalizar cada vetor da base ortogonal à medida que vai sendo obtido, produzindo com isso uma base ortonormal passo a passo. No entanto, com contas feitas a mão, esse método geralmente tem a desvantagem de produzir mais raízes quadradas para contabilizar. Uma variação mais útil é alterar a escala dos vetores da base ortogonal a cada passo para eliminar algumas das frações. Por exemplo, depois do Passo 2 acima, poderíamos ter multiplicado o vetor por 3 para produzir $(-2, 1, 1)$ como segundo vetor da base e, com isso, simplificar as contas do Passo 3.



Erhardt Schmidt (1875–1959)



Jorgen Pederson Gram (1850–1916)

Nota histórica Schmidt foi um matemático alemão que estudou para seu doutorado na Universidade de Göttingen, orientado por David Hilbert, um dos gigantes da Matemática moderna. Durante a maior parte de sua vida, lecionou na Universidade de Berlim, onde, além de fazer importantes contribuições em uma variedade de áreas da Matemática, conseguiu moldar algumas das ideias de Hilbert num único conceito abrangente, denominado *espaço de Hilbert*, que é fundamental no estudo de espaços vetoriais de dimensão infinita. Ele descreveu primeiramente o processo que leva seu nome num trabalho sobre equações integrais, que ele publicou em 1907.

[Imagem: Arquivos do Mathematisches Forschungsinstitut]

Nota histórica Gram foi um atuário dinamarquês cuja educação elementar foi obtida em escolas de aldeias e suplementada com tutoria particular. Ele obteve o grau de Doutor em Matemática enquanto trabalhava na Companhia Hafnia de Seguros de Vida, onde se especializou na matemática de seguros de acidentes. Foi em sua tese que ele formulou suas contribuições ao processo de Gram-Schmidt. Mais tarde, Gram passou a interessar-se por Matemática abstrata e recebeu uma medalha de ouro da Sociedade Real Dinamarquesa de Ciências e Letras em reconhecimento pelo seu trabalho. No entanto, seu interesse pelas aplicações da Matemática nunca diminuiu, tendo produzido uma variedade de tratados sobre administração florestal dinamarquesa.

[Imagem: Wikipedia]

▶ **EXEMPLO 8 Polinômios de Legendre**

REQUER CÁLCULO

Consideremos o espaço vetorial P_2 com o produto interno

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

Aplique o processo de Gram-Schmidt para transformar a base canônica $\{1, x, x^2\}$ de P_2 numa base ortonormal $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x)\}$.

Solução Tomemos $\mathbf{u}_1 = 1$, $\mathbf{u}_2 = x$ e $\mathbf{u}_3 = x^2$.

Passo 1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = 1$

Passo 2. Temos

$$\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

portanto,

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 = x$$

Passo 3. Temos

$$\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Bigg]_{-1}^{1} = 0$$

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1\,dx = x\Bigg]_{-1}^{1} = 2$$

portanto,

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 = x^2 - \frac{1}{3}$$

Assim, obtivemos a base ortogonal $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x)\}$, sendo

$$\phi_1(x) = 1, \quad \phi_2(x) = x, \quad \phi_3(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$ ◀

Observação Os vetores da base ortogonal do exemplo precedente costumam ter sua escala alterada de tal forma que todos têm o valor 1 em $x = 1$, o que não altera sua ortogonalidade. Os polinômios resultantes

$$1, \quad x, \quad \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

que são conhecidos como ***polinômios de Legendre***, desempenham um papel importante numa variedade de aplicações.

Estendendo conjuntos ortonormais a bases ortonormais

Na parte (*b*) do Teorema 4.5.5, vimos que todo conjunto linearmente independente de um espaço vetorial de dimensão finita pode ser estendido até uma base pela adição de vetores convenientes. O teorema seguinte é o análogo daquele resultado para conjuntos ortogonais e ortonormais em espaços com produto interno de dimensão finita.

TEOREMA 6.3.6 *Seja W um espaço com produto interno de dimensão finita.*

(*a*) *Qualquer conjunto ortogonal de vetores não nulos em W pode ser ampliado para uma base ortogonal de W.*

(*b*) *Qualquer conjunto ortonormal em W pode ser ampliado para uma base ortonormal de W.*

Provamos a parte (*b*), deixando a parte (*a*) como exercício.

Prova (b) Suponha que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s\}$ seja um conjunto ortonormal de vetores em W. Pela parte (*b*) do Teorema 4.5.5, podemos aumentar S até alguma base

$$S' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_{s+1}, \ldots, \mathbf{v}_k\}$$

de W. Aplicando o processo de Gram-Schmidt ao conjunto S', os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ não serão afetados, pois já são ortonormais, e o conjunto

$$S'' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s, \mathbf{v}'_{s+1}, \ldots, \mathbf{v}'_k\}$$

resultante será uma base ortonormal de W. ◀

OPCIONAL

Decomposição QR

Um algoritmo que tem por base o processo de Gram-Schmidt, conhecido como ***decomposição QR***, tem alcançado, nos últimos anos, importância crescente como o fundamento matemático de uma variedade de algoritmos numéricos, inclusive os de calcular autovalores de matrizes grandes. Os aspectos técnicos desses algoritmos são discutidos em livros especializados nos aspectos numéricos da Álgebra Linear, mas aqui podemos discutir algumas das ideias subjacentes. Começamos com o seguinte problema.

Problema Se A for uma matriz $n \times n$ com vetores coluna linearmente independentes e se Q for a matriz que resulta aplicando o processo de Gram-Schmidt aos vetores coluna de A, qual relação existe entre A e Q, se é que há alguma?

Para resolver esse problema, suponha que os vetores coluna de A sejam $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ e que os vetores coluna ortonormais de Q sejam $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$. Assim, A e Q podem ser escritas em bloco como

$$A = [\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{u}_n] \quad \text{e} \quad Q = [\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{q}_n]$$

Segue do Teorema 6.3.2*b* que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ podem ser escritos em termos dos vetores $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$ como

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_2 \rangle \mathbf{q}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_n \rangle \mathbf{q}_n \\
\mathbf{u}_2 &= \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2 \rangle \mathbf{q}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_n \rangle \mathbf{q}_n \\
&\;\;\vdots \\
\mathbf{u}_n &= \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_2 \rangle \mathbf{q}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_n \rangle \mathbf{q}_n
\end{aligned}$$

No Exemplo 9 da Seção 1.3, vimos que o j-ésimo vetor coluna de um produto matricial é uma combinação linear dos vetores coluna do primeiro fator com os coeficientes vindos da j-ésima coluna do segundo fator. Decorre que essas relações podem ser expressas em forma matricial por

$$[\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{u}_n] = [\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{q}_n] \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_2 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_n \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_n \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_n \rangle \end{bmatrix}$$

ou, mais concisamente, por

$$A = QR \tag{14}$$

em que R é o segundo fator no produto. No entanto, é uma propriedade do processo de Gram-Schmidt que, com $j \geq 2$, o vetor $\mathbf{q}_j$ é ortogonal a $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}$. Assim, todas as entradas abaixo da diagonal principal de R são nulas, e R tem a forma

$$R = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_1 \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{q}_n \rangle \end{bmatrix} \tag{15}$$

Deixamos para o leitor mostrar que R é invertível, já que as entradas na diagonal de R são não nulas. Assim, a Equação (14) é uma fatoração de A no produto de uma matriz Q com vetores coluna ortonormais e uma matriz triangular superior invertível R. Dizemos que a Equação (14) é a ***decomposição QR de A***. Resumindo, obtivemos o teorema seguinte.

TEOREMA 6.3.7 Decomposição QR

Se A for uma matriz $m \times n$ com vetores coluna linearmente independentes, então A pode ser fatorada como

$$A = QR$$

onde Q é uma matriz $m \times n$ com vetores coluna ortonormais e R é uma matriz $n \times n$ triangular superior invertível.

Na Álgebra Linear numérica, é comum dizer que uma matriz de colunas linearmente independentes tem ***posto coluna máximo***.

Lembre que, pelo Teorema 5.1.6 (o Teorema da Equivalência), uma matriz *quadrada* tem colunas linearmente independentes se, e só se, for invertível. Assim, segue do teorema precedente que *qualquer matriz invertível tem uma decomposição QR*.

▶ EXEMPLO 9 Decomposição QR de uma matriz 3×3

Encontre a decomposição QR de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução Os vetores coluna de A são

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando o processo de Gram-Schmidt com normalização a esses vetores coluna, obtemos os vetores ortonormais (ver Exemplo 7)

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Assim, segue da Fórmula (15) que R é

$$R = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_1 \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

do que segue que a decomposição QR de A é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

$$A \qquad = \qquad Q \qquad\qquad R$$

Mostre que a matriz Q no Exemplo 9 tem a propriedade $QQ^T = I$. Mostre que qualquer matriz $m \times n$ de vetores coluna ortonormais tem essa propriedade.

Revisão de conceitos

- Conjuntos ortogonais e ortonormais
- Normalização de um vetor
- Projeções ortogonais
- Processo de Gram-Schmidt
- Decomposição QR

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se um conjunto de vetores é ortogonal (ou ortonormal).
- Calcular as coordenadas de um vetor em relação a uma base ortogonal (ou ortonormal).
- Encontrar as projeções ortogonais de um vetor num subespaço.
- Usar o processo de Gram-Schmidt para construir uma base ortogonal (ou ortonormal) de um espaço com produto interno.
- Encontrar a decomposição QR de um matriz invertível.

Conjunto de exercícios 6.3

1. Em cada parte, decida se o conjunto de vetores dado é ortogonal em relação ao produto interno euclidiano de R^2.

(a) $(0, 1), (2, 0)$

(b) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(c) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(d) $(0, 0), (0, 1)$

2. Quais dos conjuntos de vetores do Exercício 1 são ortonormais em relação ao produto interno euclidiano de R^2?

3. Em cada parte, decida se o conjunto de vetores dado é ortogonal em relação ao produto interno euclidiano de R^3.

(a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(b) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

(c) $(1, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 0, 1)$

(d) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

4. Quais dos conjuntos de vetores do Exercício 3 são ortonormais em relação ao produto interno euclidiano de R^3?

5. Em cada parte, decida se o conjunto de polinômios dado é ortogonal em relação ao produto interno de P^2 discutido no Exemplo 7 da Seção 6.1.

(a) $p_1(x) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2, \quad p_2(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x^2,$
$p_3(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x^2$

(b) $p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad p_3(x) = x^2$

6. Em cada parte, decida se o conjunto de matrizes dado é ortogonal em relação ao produto interno de M_{22} discutido no Exemplo 6 da Seção 6.1.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

7. Em cada parte, mostre que o conjunto de vetores dado é ortogonal com o produto interno euclidiano e converta-o num conjunto ortonormal normalizando os vetores.

(a) $(-1, 2), (6, 3)$
(b) $(1, 0, -1), (2, 0, 2), (0, 5, 0)$
(c) $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right),\ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),\ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

8. Verifique que o conjunto de vetores $\{(1, 0), (0, 1)\}$ é ortogonal com o produto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 4u_1v_1 + u_2v_2$ de R^2 e converta-o num conjunto ortonormal normalizando seus vetores.

9. Verifique que os vetores

$$\mathbf{v}_1 = \left(-\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}, 0\right),\quad \mathbf{v}_2 = \left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, 0\right),\quad \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$$

formam uma base ortonormal de R^3 com o produto interno euclidiano. Depois, em cada parte, use o Teorema 6.3.2*b* para expressar o vetor dado como uma combinação linear de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

(a) $(1, -1, 2)$ (b) $(3, -7, 4)$ (c) $\left(\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{5}{7}\right)$

10. Verifique que os vetores

$$\mathbf{v}_1 = (1, -1, 2, -1),\quad \mathbf{v}_2 = (-2, 2, 3, 2),$$
$$\mathbf{v}_3 = (1, 2, 0, -1),\quad \mathbf{v}_4 = (1, 0, 0, 1)$$

formam uma base ortonormal de R^4 com o produto interno euclidiano. Depois, em cada parte, use o Teorema 6.3.2*b* para expressar o vetor dado como uma combinação linear de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$.

(a) $(1, 1, 1, 1)$
(b) $(\sqrt{2}, -3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
(c) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

11. (a) Mostre que os vetores

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3, -4),\quad \mathbf{v}_2 = (2, 1, -4, -3),$$
$$\mathbf{v}_3 = (-3, 4, 1, -2),\quad \mathbf{v}_4 = (4, 3, 2, 1)$$

formam uma base ortogonal de R^4 com o produto interno euclidiano.

(b) Use o Teorema 6.3.2*b* para expressar $\mathbf{u} = (-1, 2, 3, 7)$ como uma combinação linear dos vetores da parte (a).

▶ Nos Exercícios 12–13, é dada uma base ortonormal com o produto interno euclidiano. Use o Teorema 6.3.2*b* para encontrar o vetor de coordenadas de $\mathbf{w}$ em relação a essa base. ◀

12. (a) $\mathbf{w} = (3, 7);\ \mathbf{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \mathbf{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(b) $\mathbf{w} = (-1, 0, 2);\ \mathbf{u}_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),$
$\mathbf{u}_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right),\ \mathbf{u}_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

13. (a) $\mathbf{w} = (2, 0, 5);\ \mathbf{u}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),\ \mathbf{u}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right),$
$\mathbf{u}_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

(b) $\mathbf{w} = (-1, 1, 2);\ \mathbf{u}_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right),$
$\mathbf{u}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right),$
$\mathbf{u}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{66}}, -\frac{4}{\sqrt{66}}, \frac{7}{\sqrt{66}}\right)$

▶ Nos Exercícios 14–15, os vetores dados são ortogonais com o produto interno euclidiano. Encontre $\operatorname{proj}_W \mathbf{x}$, com $\mathbf{x} = (1, 2, 0, -2)$ e W o subespaço de R^4 gerado pelos vetores dados. ◀

14. (a) $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 1, -1, -1)$
(b) $\mathbf{v}_1 = (0, 1, -4, -1), \mathbf{v}_2 = (3, 5, 1, 1)$

15. (a) $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 1, -1, -1),$
$\mathbf{v}_3 = (1, -1, 1, -1)$
(b) $\mathbf{v}_1 = (0, 1, -4, -1), \mathbf{v}_2 = (3, 5, 1, 1),$
$\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1, -4)$

▶ Nos Exercícios 16–17, os vetores dados são ortonormal com o produto interno euclidiano. Use o Teorema 6.3.2*b* para encontrar $\operatorname{proj}_W \mathbf{x}$, com $\mathbf{x} = (1, 2, 0, -1)$ e W o subespaço de R^4 gerado pelos vetores dados. ◀

16. (a) $\mathbf{v}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{4}{\sqrt{18}}, -\frac{1}{\sqrt{18}}\right),\ \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$

(b) $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

17. (a) $\mathbf{v}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{4}{\sqrt{18}}, -\frac{1}{\sqrt{18}}\right),\ \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right),$
$\mathbf{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, 0, \frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{4}{\sqrt{18}}\right)$

(b) $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$
$\mathbf{v}_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

18. No Exemplo 6 da Seção 4.9, encontramos a projeção ortogonal do vetor $\mathbf{x} = (1, 5)$ sobre a reta pela origem que faz um ângulo de $\pi/6$ radianos com o eixo x positivo. Resolva o mesmo problema usando o Teorema 6.3.4.

19. Encontre os vetores $\mathbf{w}_1$ em W e $\mathbf{w}_2$ em $W^{\perp}$ tais que $\mathbf{x} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, com $\mathbf{x}$ e W dados no
(a) Exercício 14(a)
(b) Exercício 15(a)

20. Encontre os vetores $\mathbf{w}_1$ em W e $\mathbf{w}_2$ em $W^{\perp}$ tais que $\mathbf{x} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, com $\mathbf{x}$ e W dados no
(a) Exercício 16(a)
(b) Exercício 17(a)

21 Suponha que R^2 tenha o produto interno euclidiano. Em cada parte, use o processo de Gram-Schmidt para transformar a base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ numa base ortonormal e esboce os vetores de ambas as bases no plano xy.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, -3), \mathbf{u}_2 = (2, 2)$

(b) $\mathbf{u}_1 = (1, 0), \mathbf{u}_2 = (3, -5)$

22. Suponha que R^4 tenha o produto interno euclidiano. Em cada parte, use o processo de Gram-Schmidt para transformar a base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ numa base ortonormal.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0), \mathbf{u}_3 = (1, 2, 1)$

(b) $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (3, 7, -2), \mathbf{u}_3 = (0, 4, 1)$

23. Suponha que R^4 tenha o produto interno euclidiano. Em cada parte, use o processo de Gram-Schmidt para transformar a base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ numa base ortonormal.

$$\mathbf{u}_1 = (0, 2, 1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (1, -1, 0, 0),$$
$$\mathbf{u}_3 = (1, 2, 0, -1), \quad \mathbf{u}_4 = (1, 0, 0, 1)$$

24. Suponha que R^3 tenha o produto interno euclidiano. Encontre uma base ortonormal do subespaço gerado por $(0, 1, 2)$, $(-1, 0, 1), (-1, 1, 3)$.

25. Suponha que R^3 tenha o produto interno

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$$

Use o processo de Gram-Schmidt para transformar $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{u}_2 = (1, 1, 0), \mathbf{u}_3 = (1, 0, 0)$ numa base ortonormal.

26. Suponha que o R^3 tenha o produto interno euclidiano. O subespaço de R^3 gerado pelos vetores $\mathbf{u}_1 = \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$ e $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0)$ é um plano passando pela origem. Expresse $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$ na forma $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, sendo $\mathbf{w}_1$ um vetor no plano e $\mathbf{w}_2$ perpendicular ao plano.

27. Repita o Exercício 26 com $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{u}_2 = (2, 0, -1)$.

28. Suponha que R^4 tenha o produto interno euclidiano. Expresse o vetor $\mathbf{w} = (-1, 2, 6, 0)$ na forma $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, sendo $\mathbf{w}_1$ um vetor no espaço gerado por $\mathbf{u}_1 = (-1, 0, 1, 2)$ e $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 1)$, e $\mathbf{w}_2$ ortogonal a W.

29. Em cada parte, encontre a decomposição QR, se houver.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

30. No Passo 3 da prova do Teorema 6.3.5, foi afirmado que "a independência linear de $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ garante que $\mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}$". Prove essa afirmação.

31. Prove que as entradas na diagonal de R na Fórmula (15) são não nulas.

32. (***Requer Cálculo***) Em cada parte, use o Teorema 6.3.2*a* para expressar o polinômio dado como uma combinação linear dos três primeiros polinômios de Legendre (ver a observação que segue o Exemplo 8).

(a) $1 + x + 4x^2$ (b) $2 - 7x^2$ (c) $4 + 3x$

33. (***Requer Cálculo***) Suponha que P_2 tenha o produto interno

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

Aplique o processo de Gram-Schmidt para transformar a base canônica $S = \{1, x, x^2\}$ numa base ortonormal.

34. Encontre vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em R^2 que sejam ortonormais em relação ao produto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ mas não em relação ao produto interno euclidiano.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(f), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Qualquer conjunto linearmente independente de vetores num espaço com produto interno é ortogonal.

(b) Qualquer conjunto ortogonal de vetores num espaço com produto interno é linearmente independente.

(c) Qualquer subespaço não trivial de R^3 tem alguma base ortonormal em relação ao produto interno euclidiano.

(d) Qualquer espaço com produto interno não nulo de dimensão finita tem alguma base ortonormal.

(e) $\text{proj}_W \mathbf{x}$ é ortogonal a qualquer vetor em W.

(f) Se A for uma matriz $n \times n$ com determinante não nulo, então A tem uma decomposição QR.

6.4 Melhor aproximação; mínimos quadrados

Nesta seção, tratamos de sistemas lineares que não podem ser resolvidos exatamente e para os quais é necessário obter alguma solução aproximada. Esses sistemas costumam aparecer em aplicações nas quais erros de medição "perturbam" os coeficientes de um sistema consistente a tal ponto que o sistema passa a ser inconsistente.

Soluções de mínimos quadrados de sistemas lineares

Suponha que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ seja um sistema linear inconsistente de m equações em n incógnitas sobre o qual suspeitamos que a inconsistência tenha sido causada por erros de medição nos coeficientes de A. Como não é possível encontrar alguma solução exata, vamos procurar um vetor $\mathbf{x}$ que chegue "tão perto quanto possível" de ser uma solução, no sentido de que esse vetor minimiza $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$ em relação ao produto interno euclidiano de R^m. Pode-

mos ver $A\mathbf{x}$ como uma aproximação de $\mathbf{b}$ e $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$ como o "erro" dessa aproximação: quanto menor o erro, melhor a aproximação. Isso nos leva ao problema seguinte.

Problema dos mínimos quadrados Dado um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de m equações em n incógnitas, encontre um vetor $\mathbf{x}$ que minimiza $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$ em relação ao produto interno euclidiano de R^m. Dizemos que um vetor $\mathbf{x}$ desses é uma ***solução de mínimos quadrados*** do sistema, que $\mathbf{b} - A\mathbf{x}$ é o ***vetor erro de mínimos quadrados*** e que $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$ é o ***erro de mínimos quadrados***.

Para esclarecer a terminologia dada, suponha que a forma matricial de $\mathbf{b} - A\mathbf{x}$ seja

$$\mathbf{b} - A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix}$$

O termo "solução de mínimos quadrados" decorre do fato de que minimizar $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$ também minimiza $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|^2 = e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_m^2$.

Melhor aproximação

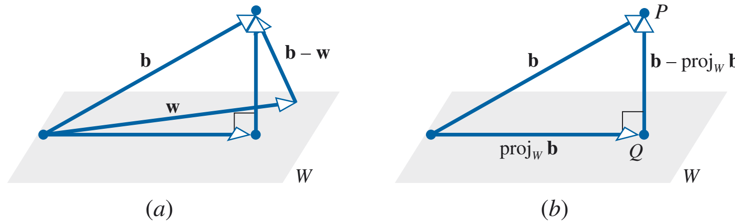
Suponha que queiramos aproximar um vetor $\mathbf{b}$ em R^3 fixado por algum vetor $\mathbf{w}$ de algum subespaço W de R^3. A menos que $\mathbf{b}$ esteja em W, qualquer aproximação dessas resulta num "vetor erro" $\mathbf{b} - \mathbf{w}$ que não pode ser considerado igual a $\mathbf{0}$, independentemente do vetor $\mathbf{w}$ escolhido (Figura 6.4.1*a*). No entanto, escolhendo

$$\mathbf{w} = \text{proj}_W \mathbf{b}$$

podemos tornar o comprimento do vetor erro

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{w}\| = \|\mathbf{b} - \text{proj}_W \mathbf{b}\|$$

tão pequeno quanto for possível (Figura 6.4.1b).



▶ **Figura 6.4.1** (*a*) (*b*)

Essas ideias geométricas sugerem o teorema geral a seguir.

TEOREMA 6.4.1 Teorema da melhor aproximação

*Se W for um subespaço de dimensão finita de um espaço com produto interno V e $\mathbf{b}$ um vetor em V, então $\text{proj}_W \mathbf{b}$ é a **melhor aproximação** de $\mathbf{b}$ em W, no sentido de que*

$$\|\mathbf{b} - \text{proj}_W \mathbf{b}\| < \|\mathbf{b} - \mathbf{w}\|$$

qualquer que seja o vetor $\mathbf{w}$ em W distinto de $\text{proj}_W \mathbf{b}$.

Prova Dado qualquer vetor $\mathbf{w}$ em W, podemos escrever

$$\mathbf{b} - \mathbf{w} = (\mathbf{b} - \text{proj}_W \mathbf{b}) + (\text{proj}_W \mathbf{b} - \mathbf{w}) \tag{1}$$

Sendo uma diferença de vetores de W, o vetor $\text{proj}_W \mathbf{b} - \mathbf{w}$ está em W e, como $\mathbf{b} - \text{proj}_W \mathbf{b}$ é ortogonal a W, os dois termos à direita em (1) são ortogonais. Assim, segue do teorema de Pitágoras (Teorema 6.2.3) que

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{b} - \text{proj}_W \mathbf{b}\|^2 + \|\text{proj}_W \mathbf{b} - \mathbf{w}\|^2$$

Como $\mathbf{w} \neq \text{proj}_W \mathbf{b}$, segue que o segundo termo nessa soma é positivo e, portanto, que

$$\|\mathbf{b} - \text{proj}_W \mathbf{b}\|^2 < \|\mathbf{b} - \mathbf{w}\|^2$$

Como as normas são não negativas, segue (de uma propriedade de desigualdades) que

$$\|\mathbf{b} - \text{proj}_W \mathbf{b}\| < \|\mathbf{b} - \mathbf{w}\| \quad ◀$$

Soluções de mínimos quadrados de sistemas lineares

Uma maneira de encontrar alguma solução de mínimos quadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é calcular a projeção ortogonal $\text{proj}_W \mathbf{b}$ no espaço coluna W da matriz A e depois resolver a equação

$$A\mathbf{x} = \text{proj}_W \mathbf{b} \tag{2}$$

Contudo, podemos evitar o cálculo da projeção reescrevendo (2) como

$$\mathbf{b} - A\mathbf{x} = \mathbf{b} - \text{proj}_W \mathbf{b}$$

e então multiplicar ambos os lados dessa equação por A^T para obter

$$A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = A^T(\mathbf{b} - \text{proj}_W \mathbf{b}) \tag{3}$$

Como $\mathbf{b} - \text{proj}_W \mathbf{b}$ é o componente de $\mathbf{b}$ que é ortogonal ao espaço coluna de A, segue do Teorema 4.8.9*b* que esse vetor está no espaço nulo de A^T e que, portanto,

$$A^T(\mathbf{b} - \text{proj}_W \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

Assim, podemos simplificar (3) e obter

$$A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

que pode ser reescrito como

$$A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} \tag{4}$$

Dizemos que essa equação é a ***equação normal*** ou o ***sistema normal*** associado a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Vistas como um sistema linear, as equações individuais são denominadas ***equações normais*** associadas a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Resumindo, estabelecemos o seguinte resultado.

TEOREMA 6.4.2 *Dado qualquer sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, o sistema normal associado*

$$A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} \tag{5}$$

é consistente, e todas as soluções de (5) são soluções de mínimos quadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Além disso, se W for o espaço coluna de A e $\mathbf{x}$ uma solução de mínimos quadrados qualquer de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, então a projeção ortogonal de $\mathbf{b}$ em W é

$$\text{proj}_W \mathbf{b} = A\mathbf{x} \tag{6}$$

Se um sistema linear for consistente, então suas soluções exatas são iguais às soluções de mínimos quadrados, caso em que o erro é zero.

▶ EXEMPLO 1 Solução de mínimos quadrados

(a) Encontre todas as soluções de mínimos quadrados do sistema linear

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 &= 3 \end{aligned}$$

(b) Encontre o vetor erro e o erro.

Solução (a) É conveniente expressar o sistema no formato matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Segue que

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 21 \end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

de modo que o sistema normal $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ é

$$\begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos uma única solução de mínimos quadrados, a saber,

$$x_1 = \tfrac{17}{95}, \quad x_2 = \tfrac{143}{285}$$

Solução (b) O vetor erro é

$$\mathbf{b} - A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{17}{95} \\ \frac{143}{285} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{92}{285} \\ \frac{439}{285} \\ \frac{95}{57} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1.232}{285} \\ -\frac{154}{285} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

e o erro é

$$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| \approx 4{,}556$$

▶ EXEMPLO 2 Projeção ortogonal num subespaço

Encontre a projeção ortogonal do vetor $\mathbf{u} = (-3, -3, 8, 9)$ no subespaço de R^4 gerado pelos vetores

$$\mathbf{u}_1 = (3, 1, 0, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (1, 2, 1, 1), \quad \mathbf{u}_3 = (-1, 0, 2, -1)$$

Solução Poderíamos resolver esse problema usando primeiro o processo de Gram-Schmidt para converter $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ numa base ortonormal e depois aplicando o método usado no Exemplo 6 da Seção 6.3. Contudo, o método a seguir é mais eficiente.

O subespaço W de R^4 gerado por $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ é o espaço coluna da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, se $\mathbf{u}$ for escrito como um vetor coluna, podemos obter a projeção ortogonal de $\mathbf{u}$ em W encontrando a solução de mínimos quadrados do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$ e depois calculan-

do $\text{proj}_W\,\mathbf{u} = A\mathbf{x}$ a partir dessa solução de mínimos quadrados. As contas são as seguintes. O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$ é

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

portanto,

$$A^TA = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & -4 \\ 6 & 7 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Nesse caso, o sistema normal $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{u}$ é

$$\begin{bmatrix} 11 & 6 & -4 \\ 6 & 7 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

como a solução de mínimos quadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$ (verifique), de modo que

$$\text{proj}_W\,\mathbf{u} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou então, em notação com vírgulas, $\text{proj}_W\,\mathbf{u} = (-2, 3, 4, 0)$. ◀

Unicidade das soluções de mínimos quadrados

Em geral, as soluções de mínimos quadrados de sistemas lineares não são únicas. Embora o sistema linear do Exemplo 1 tenha tido uma solução de mínimos quadrados única, isso só ocorreu porque a matriz de coeficientes do sistema satisfaz certas condições que garantem a unicidade. Nosso próximo teorema mostra quais são essas condições.

TEOREMA 6.4.3 *Se A for uma matriz $m \times n$, as condições seguintes são equivalentes.*

(*a*) *Os vetores coluna de A são linearmente independentes.*

(*b*) *A^TA é invertível.*

Prova Provamos que $(a) \Rightarrow (b)$, deixando a prova de $(b) \Rightarrow (a)$ como exercício.

(*a*) ⇒ (*b*) Suponha que A tenha vetores coluna linearmente independentes. A matriz A^TA tem tamanho $n \times n$, portanto, podemos provar sua invertibilidade mostrando que

o sistema linear $A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial. Mas se $\mathbf{x}$ for qualquer solução desse sistema, então $A\mathbf{x}$ está no espaço nulo de A^T e também no espaço coluna de A. Pelo Teorema 4.8.9*b*, esses espaços são complementos ortogonais, de modo que a parte (*b*) do Teorema 6.2.4 implica $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Como A tem vetores coluna linearmente independentes, resulta $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pelo Teorema 1.3.1. ◄

O próximo teorema, que segue diretamente dos Teoremas 6.4.2 e 6.4.3, dá uma fórmula explícita para a solução de mínimos quadrados de um sistema linear que tenha uma matriz de coeficientes com vetores coluna linearmente independentes.

TEOREMA 6.4.4 *Se A for uma matriz $m \times n$ com vetores coluna linearmente independentes, então dada qualquer matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho* $m \times 1$, *o sistema linear* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tem uma única solução de mínimos quadrados. Essa solução é dada por*

$$\mathbf{x} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} \tag{7}$$

Além disso, se W for o espaço coluna de A, então a projeção ortogonal de $\mathbf{b}$ *em W é*

$$\text{proj}_W \mathbf{b} = A\mathbf{x} = A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} \tag{8}$$

Como exercício, tente usar a Fórmula (7) para resolver o problema na parte (a) do Exemplo 1.

As Fórmulas (7) e (8) têm utilidade teórica, mas não são eficientes para cálculos numéricos. Na prática, as soluções de mínimos quadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ costumam ser encontradas usando alguma variação da eliminação gaussiana para resolver as equações normais ou usando a decomposição QR e o teorema seguinte.

OPCIONAL

O papel da decomposição QR em problemas de mínimos quadrados

TEOREMA 6.4.5 *Seja A uma matriz $m \times n$ com vetores coluna linearmente independentes e $A = QR$ uma decomposição QR de A (ver Teorema 6.3.7). Dado qualquer* $\mathbf{b}$ *em R^m, o sistema* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tem uma única solução de mínimos quadrados dada por*

$$\mathbf{x} = R^{-1}Q^T\mathbf{b} \tag{9}$$

Uma prova desse teorema e uma discussão de sua utilidade podem ser encontradas em muitos livros que tratam de métodos numéricos da Álgebra Linear. No entanto, a Fórmula (9) pode ser obtida substituindo $A = QR$ em (7) e usando que $Q^TQ = I$ para obter

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \left((QR)^T(QR)\right)^{-1}(QR)^T\mathbf{b}\\ &= (R^TQ^TQR)^{-1}\ (QR)^T\mathbf{b}\\ &= R^{-1}(R^T)^{-1}\ R^TQ^T\mathbf{b}\\ &= R^{-1}Q^T\mathbf{b}\end{aligned}$$

Projeção ortogonal em subespaços de R^m

Na Seção 4.8, mostramos como calcular as projeções ortogonais sobre os eixos coordenados de um sistema de coordenadas retangulares em R^3 e, mais geralmente, sobre retas pela origem em R^3. Passamos a considerar, agora, o problema de encontrar projeções ortogonais em *subespaços* de R^m. Começamos com uma definição.

DEFINIÇÃO 1 Se W for um subespaço de R^m, então a transformação linear $P : R^m \to W$ que associa a cada vetor $\mathbf{x}$ em R^m sua projeção ortogonal $\text{proj}_W \mathbf{x}$ em W é denominada ***projeção ortogonal de R^m em W***.

Segue da Fórmula (7) que a matriz canônica da transformação linear P é

$$[P] = A(A^TA)^{-1}A^T \tag{10}$$

sendo os vetores coluna de A construídos a partir de qualquer base de W.

Figura 6.4.2

▶ EXEMPLO 3 A matriz canônica de uma projeção ortogonal sobre uma reta

Mostramos na Fórmula (16) da Seção 4.9 que

$$P_\theta = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta & \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

é a matriz canônica da projeção ortogonal sobre a reta W pela origem de R^2 que faz um ângulo de θ com o eixo x positivo. Deduza esse resultado usando a Fórmula (10).

Solução Os vetores coluna de A podem ser formados a partir de qualquer base de W. Como W é unidimensional, podemos tomar $\mathbf{w} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ como o vetor da base (Figura 6.4.2), ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

Deixamos a cargo do leitor mostrar que A^TA é a matriz identidade de tamanho 1×1. Assim, a Fórmula (10) simplifica, e obtemos

$$[P] = A(A^TA)^{-1}A^T = AA^T = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} [\cos\theta \quad \operatorname{sen}\theta]$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta & \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix} = P_\theta \;◀$$

Outro ponto de vista de mínimos quadrados

No Teorema 4.8.9, vimos que os espaços nulo e linha de uma matriz A de tamanho $m \times n$ são complementos ortogonais, bem como os espaços nulo de A^T e coluna de A. Assim, dado um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ em que A é uma matriz $m \times n$, o teorema da projeção (6.3.3) nos diz que os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ podem ser decompostos em somas de termos ortogonais do tipo

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{lin}(A)} + \mathbf{x}_{\text{nul}(A)} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_{\text{nul}(A^T)} + \mathbf{b}_{\text{col}(A)}$$

em que $\mathbf{x}_{\text{lin}(A)}$ e $\mathbf{x}_{\text{nul}(A)}$ são as projeções ortogonais de $\mathbf{x}$ nos espaços linha, e nulo de A e os vetores $\mathbf{b}_{\text{nul}(A^T)}$ e $\mathbf{b}_{\text{col}(A)}$ são as projeções ortogonais de $\mathbf{b}$ nos espaços nulo de A^T e coluna de A.

Na Figura 6.4.3, representamos os espaços fundamentais de A por retas perpendiculares em R^n e R^m nas quais indicamos as projeções ortogonais de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$. (É claro que isso é só uma representação visual, pois os espaços fundamentais não precisam ser unidimensionais.) A figura mostra $A\mathbf{x}$ como um ponto no espaço coluna de A e indica que $\mathbf{b}_{\text{col}(A)}$ é

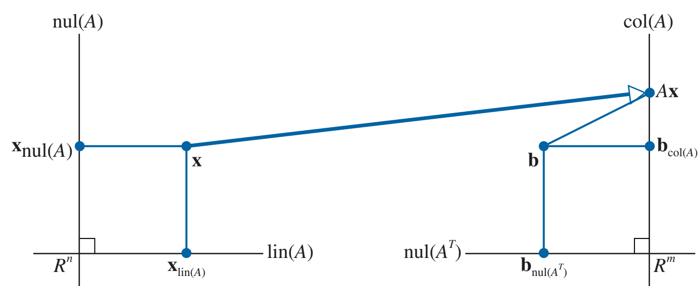


Figura 6.4.3

o ponto de col(A) que está mais próximo de **b**. Isso ilustra que as soluções de mínimos quadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ são as soluções exatas da equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_{\text{col}(A)}$.

Mais sobre o teorema da equivalência

Como nosso resultado final da parte principal desta seção, acrescentamos mais uma parte ao Teorema 5.1.6.

TEOREMA 6.4.6 Afirmações equivalentes

Se A for uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes.

(*a*) *A é invertível.*
(*b*) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *tem somente a solução trivial.*
(*c*) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é* I_n.
(*d*) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*
(*e*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *é consistente com cada matriz* **b** *de tamanho* $n \times 1$.
(*f*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tem exatamente uma solução com cada matriz* **b** *de tamanho* $n \times 1$.
(*g*) $\det(A) \neq 0$.
(*h*) *Os vetores coluna de A são linearmente independentes.*
(*i*) *Os vetores linha de A são linearmente independentes.*
(*j*) *Os vetores coluna de A geram* R^n.
(*k*) *Os vetores linha de A geram* R^n.
(*l*) *Os vetores coluna de A formam uma base de* R^n.
(*m*) *Os vetores linha de A formam uma base de* $\{\mathbf{0}\}$.
(*n*) *A tem posto n.*
(*o*) *A tem nulidade* 0.
(*p*) *O complemento ortogonal do espaço nulo de A é* R^n.
(*q*) *O complemento ortogonal do espaço linha de A é* $\{\mathbf{0}\}$.
(*r*) *A imagem de* T_A *é* R^n.
(*s*) T_A *é um operador injetor.*
(*t*) $\lambda = 0$ *não é um autovalor de A.*
(*u*) A^TA *é invertível.*

A prova da parte (*u*) segue da parte (*h*) desse teorema e do Teorema 6.4.3 aplicado a matrizes quadradas.

OPCIONAL

Agora temos todos os ingredientes necessários para provar o Teorema 6.3.3 no caso especial em que V for o espaço vetorial R^m.

Prova do Teorema 6.3.3 Deixamos o caso $W = \{\mathbf{0}\}$ como exercício e, portanto, vamos supor que $W \neq \{\mathbf{0}\}$. Seja $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ uma base qualquer de W e consideremos a matriz M cujas colunas são os sucessivos vetores dessa base. Assim, W é o espaço coluna de M e, portanto, $W^\perp$ é o espaço nulo de M^T. A prova estará terminada se mostrarmos que qualquer vetor **u** em R^m pode ser escrito de uma única maneira como

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

em que $\mathbf{w}_1$ está no espaço coluna de M e $M^T\mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$. No entanto, dizer que $\mathbf{w}_1$ está no espaço coluna de M equivale a dizer que $\mathbf{w}_1 = M\mathbf{x}$, com algum vetor **x** em R^m, e dizer que $M^T\mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$ equivale a dizer que $M^T(\mathbf{u} - \mathbf{w}_1) = \mathbf{0}$. Assim, se soubermos mostrar que a equação

$$M^T(\mathbf{u} - M\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{11}$$

tem uma única solução para **x**, então $\mathbf{w}_1 = M\mathbf{x}$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{x} - \mathbf{w}_1$ serão vetores determinados de maneira única com as propriedades exigidas. Para isso, reescrevemos (11) como

$$M^TM\mathbf{x} = M^T\mathbf{u}$$

Como a matriz M tem vetores coluna linearmente independentes, a matriz M^TM é invertível pelo Teorema 6.4.6 e, portanto, a equação tem uma solução única, como queríamos mostrar. ◀

Revisão de conceitos

- Problema de mínimos quadrados
- Solução de mínimos quadrados
- Vetor erro de mínimos quadrados
- Erro de mínimos quadrados
- Melhor aproximação
- Equação normal
- Projeção ortogonal

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar a solução de mínimos quadrados de um sistema linear.
- Encontrar o erro e o vetor erro associados a uma solução de mínimos quadrados de um sistema linear.
- Usar as técnicas desenvolvidas nesta seção para calcular projeções ortogonais.
- Encontrar a matriz canônica de uma projeção ortogonal.

Conjunto de exercícios 6.4

1. Em cada parte, encontre o sistema normal associado ao sistema linear dado.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 2–4, em cada parte, encontre a solução de mínimos quadrados do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. ◀

2. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$

4. (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 10 & -7 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 5–6, em cada parte, encontre o vetor erro $\mathbf{e} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$ que resulta da solução de mínimos quadrados **x** e verifique que é ortogonal ao espaço coluna de A. ◀

5. (a) A e **b** como no Exercício 3(a)

(b) A e **b** como no Exercício 3(b)

6. (a) A e **b** como no Exercício 4(a)

(b) A e **b** como no Exercício 4(b)

7. Em cada parte, encontre todas as soluções de mínimos quadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e confirme que todas as soluções têm o mesmo vetor erro. Calcule o erro de mínimos quadrados.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$

8. Em cada parte, encontre a projeção ortogonal de $\mathbf{u}$ no subespaço de R^3 gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

(a) $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$; $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 1)$

(b) $\mathbf{u} = (1, -6, 1)$; $\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 4)$

9. Em cada parte, encontre a projeção ortogonal de $\mathbf{u}$ no subespaço de R^4 gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

(a) $\mathbf{u} = (6, 3, 9, 6)$; $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-2, -1, 0, -1)$

(b) $\mathbf{u} = (-2, 0, 2, 4)$; $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 3, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, -1, -2, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-3, -1, 1, 3)$

10. Encontre a projeção ortogonal de $\mathbf{u} = (5, 6, 7, 2)$ no espaço solução do sistema linear homogêneo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

11. Em cada parte, encontre $\det(A^TA)$e aplique o Teorema 6.4.3 para determinar se A tem vetores coluna linearmente independentes.

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

12. Use a Fórmula (10) e o método do Exemplo 3 para encontrar a matriz canônica da projeção ortogonal $P: R^2 \to R^2$

(a) no eixo x.

(b) no eixo y.

[*Observação*: compare suas respostas com a Tabela 3 da Seção 4.9.]

13. Use a Fórmula (10) e o método do Exemplo 3 para encontrar a matriz canônica da projeção ortogonal $P: R^3 \to R^2$

(a) no plano xz.

(b) no plano yz.

[*Observação*: compare suas respostas com a Tabela 4 da Seção 4.9.]

14. Mostre que se $\mathbf{w} = (a, b, c)$ for um vetor não nulo, então a matriz canônica da projeção ortogonal de R^3 na reta ger$\{\mathbf{w}\}$ é

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$$

15. Seja W o plano de equação $5x - 3y + z = 0$.

(a) Encontre uma base de W.

(b) Use a Fórmula (10) para encontrar a matriz canônica da projeção ortogonal em W.

(c) Use a matriz obtida na parte (b) para encontrar a projeção ortogonal de um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ em W.

(d) Encontre a distância entre o ponto $P_0(1, -2, 4)$ e o plano W e confira seu resultado usando o Teorema 3.3.4.

16. Seja W a reta de equações paramétricas

$$x = 2t, \quad y = -t, \quad z = 4t$$

(a) Encontre uma base de W.

(b) Use a Fórmula (10) para encontrar a matriz canônica da projeção ortogonal em W.

(c) Use a matriz obtida na parte (b) para encontrar a projeção ortogonal de um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ em W.

(d) Encontre a distância entre o ponto $P_0(2, 1, -3)$ e a reta W.

17. Considere a reta l em R^2 dada pelas equações

$$x = t, \quad y = t, \quad z = t$$

e a reta m dada pelas equações

$$x = s, \quad y = 2s - 1, \quad z = 1$$

Sejam P um ponto em l e Q um ponto em m. Minimize a distância ao quadrado $\|P - Q\|^2$ e, com isso, encontre os valores de t e s que minimizam a distância entre essas retas.

18. Prove: se A tem vetores coluna linearmente independentes e se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente, então a solução de mínimos quadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e a solução exata de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ coincidem.

19. Prove: se A tem vetores coluna linearmente independentes e $\mathbf{b}$ é ortogonal ao espaço coluna de A, então a solução de mínimos quadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

20. Seja $P: R^m \to W$ a projeção ortogonal de R^m no subespaço W.

(a) Prove que $[P]^2 = [P]$.

(b) O que o resultado da parte (a) implica sobre a composta $P \circ P$?

(c) Mostre que $[P]$ é simétrica.

21. Seja A uma matriz $m \times n$ com vetores coluna linearmente independentes. Obtenha a matriz canônica da projeção ortogonal de R^n no espaço coluna de A. [*Sugestão*: comece com a Fórmula (10).]

22. Prove a implicação $(b) \Rightarrow (a)$ do Teorema 6.4.3.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(h), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se A for uma matriz $m \times n$, então A^TA é uma matriz quadrada.

(b) Se A^TA for invertível, então A é invertível.

(c) Se A for invertível, então A^TA é invertível.

(d) Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for um sistema linear consistente, então $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ também é consistente.

(e) Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for um sistema linear inconsistente, então $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ também é inconsistente.

(f) Qualquer sistema linear tem uma solução de mínimos quadrados.

(g) Qualquer sistema linear tem uma única solução de mínimos quadrados.

(h) Se A for uma matriz $m \times n$ com colunas linearmente independentes e $\mathbf{b}$ for um vetor em R^m, então $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma única solução de mínimos quadrados.

6.5 Ajuste de mínimos quadrados a dados

Nesta seção, usamos nossos resultados sobre projeções ortogonais em espaços com produto interno para obter uma técnica de como ajustar uma reta ou uma outra curva polinomial a um conjunto de pontos no plano determinados experimentalmente.

Ajustando uma curva a dados

Um problema comum no trabalho experimental é obter uma relação matemática $y = f(x)$ entre duas variáveis x e y através do "ajuste" de uma curva aos pontos no plano que correspondem aos vários valores de x e y determinados experimentalmente, digamos,

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

Na base de considerações teóricas ou simplesmente observando o padrão apresentado pelos pontos, decidimos a forma geral da curva $y = f(x)$ a ser ajustada. Algumas possibilidades são (Figura 6.5.1)

(a) Uma reta: $y = a + bx$

(b) Um polinômio quadrático: $y = a + bx + cx^2$

(c) Um polinômio cúbico: $y = a + bx + cx^2 + dx^3$

Como os pontos são obtidos experimentalmente, muitas vezes temos algum "erro" de medição nos dados, tornando impossível encontrar uma curva da forma desejada que passe por todos os pontos. Assim, a ideia é escolher a curva (determinando seus coeficientes) que "melhor" ajusta os dados. Começamos com o caso mais simples e mais comum: ajustar uma reta aos pontos obtidos experimentalmente.

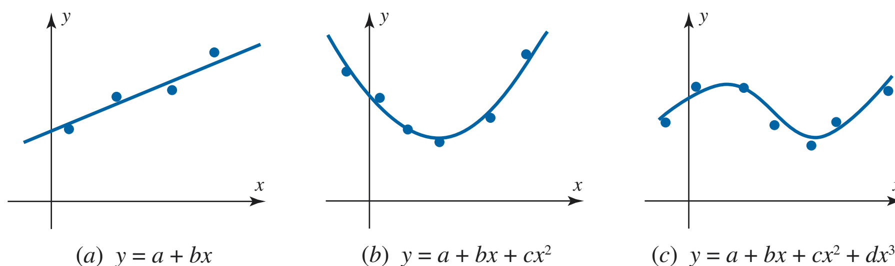


Figura 6.5.1 (a) $y = a + bx$ (b) $y = a + bx + cx^2$ (c) $y = a + bx + cx^2 + dx^3$

Ajuste linear de mínimos quadrados

Digamos que queiramos ajustar uma reta $y = a + bx$ aos pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

determinados experimentalmente. Se esses pontos de dados fossem colineares, a reta passaria por todos os n pontos, e os coeficientes incógnitos a e b satisfariam as equações

$$\begin{aligned} y_1 &= a + bx_1 \\ y_2 &= a + bx_2 \\ &\vdots \\ y_n &= a + bx_n \end{aligned}$$

Podemos escrever esse sistema em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

ou, mais compactamente, como

$$M\mathbf{v} = \mathbf{y} \tag{1}$$

em que

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{2}$$

Se os pontos de dados não forem colineares, é impossível encontrar coeficientes a e b que satisfaçam o sistema (1) exatamente, ou seja, o sistema é inconsistente. Nesse caso, procuramos uma solução de mínimos quadrados

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix}$$

Dizemos que uma reta $y = a^* + b^*x$ é uma ***reta de regressão*** dos dados ou um ***ajuste linear de mínimos quadrados*** aos dados se os coeficientes da reta provêm de uma solução de mínimos quadrados. Para explicar essa terminologia, lembre que uma solução de mínimos quadrados de (1) minimiza

$$\|\mathbf{y} - M\mathbf{v}\| \tag{3}$$

Expressando o quadrado de (3) em termos de componentes, obtemos

$$\|\mathbf{y} - M\mathbf{v}\|^2 = (y_1 - a - bx_1)^2 + (y_2 - a - bx_2)^2 + \cdots + (y_n - a - bx_n)^2 \tag{4}$$

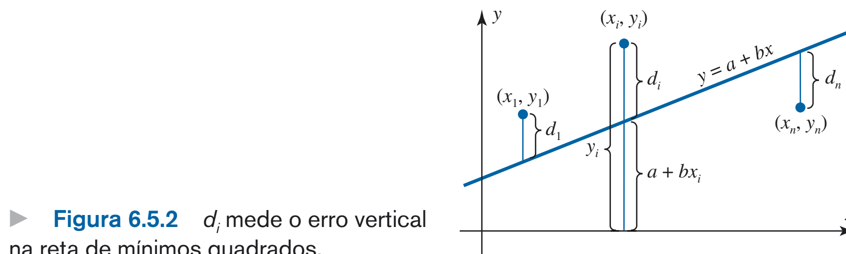
Agora, denotando

$$d_1 = |y_1 - a - bx_1|, \quad d_2 = |y_2 - a - bx_2|, \ldots, \quad d_n = |y_n - a - bx_n|$$

podemos reescrever (4) como

$$\|\mathbf{y} - M\mathbf{v}\|^2 = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2 \tag{5}$$

Conforme ilustrado na Figura 6.5.2, os números d_i podem ser interpretados como a distância vertical entre a reta $y = a + bx$ e os pontos de dados (x_i, y_i). Essa distância é uma medida do "erro" que resulta no ponto (x_i, y_i) do ajuste inexato de $y = a + bx$ a esse ponto dos dados, supondo que os x_i sejam conhecidos exatamente e que todo o erro seja proveniente da medição do y_i. Como (3) e (5) são minimizados pelo mesmo vetor $\mathbf{v}^*$, o ajuste linear de mínimos quadrados minimiza a soma dos quadrados desses erros estimados, e daí o nome *ajuste linear de mínimos quadrados*.



▶ **Figura 6.5.2** d_i mede o erro vertical na reta de mínimos quadrados.

Equações normais

No Teorema 6.4.2, vimos que a solução de mínimos quadrados de (1) pode ser obtida resolvendo o sistema normal associado

$$M^T M\mathbf{v} = M^T\mathbf{y}$$

cujas equações são denominadas ***equações normais***.

Nos exercícios, será mostrado que os vetores coluna de M são linearmente independentes se, e só se, os n pontos dos dados não estão numa reta vertical no plano xy. Nesse caso, segue pelo Teorema 6.4.4 que a solução de mínimos quadrados é única e é dada por

$$\mathbf{v}^* = (M^TM)^{-1}M^T\mathbf{y}$$

Resumindo, temos o seguinte teorema.

TEOREMA 6.5.1 Unicidade da solução de mínimos quadrados

Seja $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ um conjunto de dois ou mais pontos de dados, não todos numa reta vertical, e sejam

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Então existe um único ajuste linear de mínimos quadrados

$$y = a^* + b^*x$$

aos pontos de dados. Além disso,

$$\mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix}$$

é dado pela fórmula

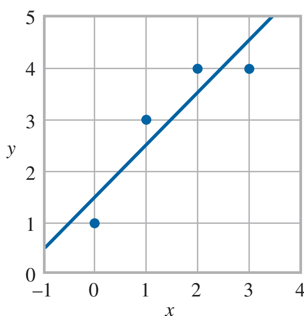
$$\mathbf{v}^* = (M^TM)^{-1}M^T\mathbf{y} \tag{6}$$

que expressa a unicidade da solução $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$ da equação normal

$$M^TM\mathbf{v} = M^T\mathbf{y} \tag{7}$$

▶ EXEMPLO 1 Reta de mínimos quadrados

Encontre o ajuste linear de mínimos quadrados aos quatro pontos (0, 1), (1, 3), (2, 4) e (3, 4). (Ver Figura 6.5.3.)



▲ Figura 6.5.3

Solução Temos

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad M^TM = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad (M^TM)^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

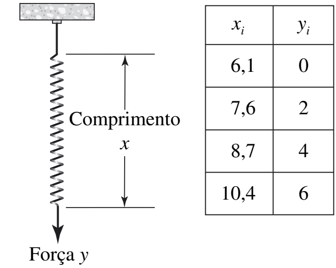
$$\mathbf{v}^* = (M^TM)^{-1}M^T\mathbf{y} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e, portanto, a reta procurada é $y = 1{,}5 + x$.

▶ EXEMPLO 2 A constante de uma mola

A lei de Hooke, da Física, afirma que o comprimento x de uma mola uniforme é uma função linear da força y aplicada à mola. Descrevendo essa relação por $y = a + bx$, o coeficiente b é denominado ***constante da mola***. Suponha que uma determinada mola não estendida tenha um comprimento de 6,1 cm (ou seja, $x = 6{,}1$ se $y = 0$). Aplicando forças

de 2,4 e 6 kg à mola, obtemos os comprimentos correspondentes de 7,6 cm, 8,7 cm e 10,4 cm (ver Figura 6.5.4). Encontre a constante dessa mola.



x_i	y_i
6,1	0
7,6	2
8,7	4
10,4	6

▲ **Figura 6.5.4**

Solução Temos

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 6{,}1 \\ 1 & 7{,}6 \\ 1 & 8{,}7 \\ 1 & 10{,}4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{y} \approx \begin{bmatrix} -8{,}6 \\ 1{,}4 \end{bmatrix}$$

onde os valores numéricos foram arredondados a uma casa decimal. Assim, o valor estimado da constante dessa mola é $b^* \approx 1{,}4$ kg/cm. ◀

Ajuste polinomial de mínimos quadrados

A técnica descrita para ajustar uma reta de mínimos quadrados a pontos de dados generaliza facilmente para ajustar um polinômio de qualquer grau especificado a pontos de dados. Vamos tentar ajustar um polinômio de grau fixo m

$$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \tag{8}$$

aos n pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

Substituindo esses n valores de x e y em (8), obtemos as n equações

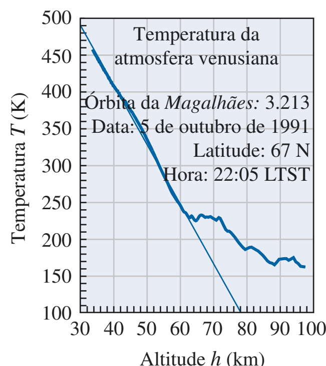
$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_m x_1^m \\ y_2 &= a_0 + a_1 x_2 + \cdots + a_m x_2^m \\ &\vdots \\ y_n &= a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_m x_n^m \end{aligned}$$

ou, em formato matricial,

$$\mathbf{y} = M\mathbf{v} \tag{9}$$

em que

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \tag{10}$$



Fonte: NASA

Nota histórica No dia 5 de outubro de 1991, a sonda espacial *Magalhães* penetrou na atmosfera de Vênus e passou a transmitir a temperatura T em kelvins (K) em função da altitude h em quilômetros (km), até que deixou de transmitir a uma altitude de aproximadamente 34 km acima da superfície do planeta. Descontando o sinal errático inicial, os dados sugerem fortemente uma relação linear, de modo que foi feito um ajuste linear por mínimos quadrados na parte linear dos dados para obter a equação

$$T = 737{,}5 - 8{,}125h$$

Tomando $h = 0$ nessa equação, estimou-se que a temperatura da superfície de Vênus é de $T \approx 737{,}5$ K.

Como antes, as soluções das equações normais

$$M^T M\mathbf{v} = M^T\mathbf{y}$$

determinam os coeficientes do polinômio e o vetor **v** minimiza

$$\|\mathbf{y} - M\mathbf{v}\|$$

No Exercício 7, são discutidas condições que garantem a invertibilidade de $M^T M$. Se $M^T M$ for invertível, então as equações normais têm uma solução $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$ única, dada por

$$\mathbf{v}^* = (M^T M)^{-1} M^T\,\mathbf{y} \tag{11}$$

▶ EXEMPLO 3 Ajustando uma curva quadrática a dados

De acordo com a segunda lei de Newton do movimento, um corpo perto da superfície da Terra cai verticalmente para baixo de acordo com a equação

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2 \tag{12}$$

onde

$$\begin{aligned} s &= \text{deslocamento vertical para baixo relativo a algum ponto fixado} \\ s_0 &= \text{deslocamento inicial no instante } t = 0 \\ v_0 &= \text{velocidade inicial no instante } t = 0 \\ g &= \text{aceleração da gravidade na superfície da Terra} \end{aligned}$$

na Equação (12), sendo desconhecidos o deslocamento e a velocidade iniciais e sendo medidas, em certos instantes, as distâncias que o corpo tenha caído em relação a algum ponto de referência fixado. Suponha que seja realizado um experimento num laboratório nos Estados Unidos para estimar g usando essa equação. Digamos que, nos instantes $t =$ 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 e 0,5 segundos, tenha sido observado que o corpo caiu $s = -0{,}18$; 0,31; 1,03; 2,48 e 3,73 pés, respectivamente, desde o ponto de referência. Encontre um valor aproximado de g usando esses dados.

Solução O problema matemático é ajustar a curva quadrática

$$s = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \tag{13}$$

aos cinco pontos de dados

$$(0{,}1;\ -0{,}18),\ (0{,}2;\ 0{,}31),\ (0{,}3;\ 1{,}03),\ (0{,}4;\ 2{,}48),\ (0{,}5;\ 3{,}73)$$

Com os ajustes apropriados na notação, as matrizes M e **y** em (10) são

$$M = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ 1 & t_4 & t_4^2 \\ 1 & t_5 & t_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}1 & 0{,}01 \\ 1 & 0{,}2 & 0{,}04 \\ 1 & 0{,}3 & 0{,}09 \\ 1 & 0{,}4 & 0{,}16 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0\ 18 \\ 0{,}31 \\ 1{,}03 \\ 2{,}48 \\ 3{,}73 \end{bmatrix}$$

Assim, por (11),

$$\mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} a_0^* \\ a_1^* \\ a_2^* \end{bmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T\mathbf{y} \doteq \begin{bmatrix} -0{,}40 \\ 0{,}35 \\ 16{,}1 \end{bmatrix}$$

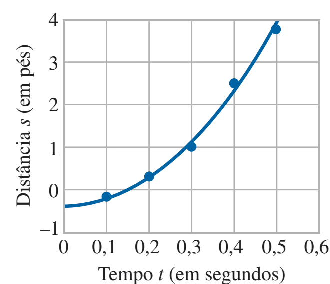
Por (12) e (13) temos $a_2 = \frac{1}{2}g$, de modo que o valor estimado de g é

$$g = 2a_2^* = 2\,(16{,}1) = 32{,}2 \text{ pés/segundo}^2$$

Se quisermos, também podemos estimar o deslocamento e velocidade iniciais do corpo.

$$s_0 = a_0^* = -0{,}40 \text{ pés}$$
$$v_0 = a_1^* = \quad 0{,}35 \text{ pés/segundo}$$

Na Figura 6.5.5, esboçamos os cinco pontos de dados e o polinômio aproximante. ◀



▲ **Figura 6.5.5**

Revisão de conceitos

- Ajuste linear de mínimos quadrados
- Reta de regressão
- Ajuste polinomial de mínimos quadrados

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar o ajuste linear de mínimos quadrados a um conjunto de pontos de dados.
- Encontrar o ajuste polinomial de mínimos quadrados a um conjunto de pontos de dados.
- Usar as técnicas desta seção para resolver problemas de aplicações.

Conjunto de exercícios 6.5

1. Encontre o ajuste linear de mínimos quadrados aos três pontos (0, 0), (1, 2) e (2, 7).

2. Encontre o ajuste linear de mínimos quadrados aos quatro pontos (0, 1), (2, 0), (3, 1) e (3, 2).

3. Encontre o polinômio quadrático de melhor ajuste aos quatro pontos (2, 0), (3, −10), (5, −48) e (6, −76).

4. Encontre o polinômio cúbico de melhor ajuste aos cinco pontos (−1, −14), (0, −5), (1, −4), (2, 1) e (3, 22).

5. Mostre que a matriz M na Equação (2) tem colunas linearmente independentes se, e só se, pelos menos dois dos números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são distintos.

6. Mostre que as colunas da matriz M de tamanho $n \times (m + 1)$ na Equação (10) são linearmente independentes se $n > m$ e pelo menos $m + 1$ dos números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são distintos. [*Sugestão*: um polinômio não nulo de grau m tem, no máximo, m raízes distintas.]

7. Seja M a matriz da Equação (10). Usando o Exercício 6, mostre que uma condição suficiente para a matriz M^TM ser invertível é que $n > m$ e que pelo menos $m + 1$ dos números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são distintos.

8. O dono de um negócio em rápida expansão descobre que, nos cinco primeiros meses do ano, as vendas (em milhares) foram \$4,0; \$4,4; \$5,2; \$6,4 e \$8,0. O dono coloca esses dados num gráfico e conjectura que, pelo resto do ano, a curva de vendas pode ser aproximada por um polinômio quadrático. Encontre o polinômio quadrático de ajuste de mínimos quadrados à curva de vendas e use-o para projetar as vendas no décimo segundo mês do ano.

9. Uma corporação obtém os seguintes dados relacionando o número de representantes de vendas em seu quadro com as vendas anuais.

Número de representantes de vendas	5	10	15	20	25	30
Vendas anuais (milhões)	3,4	4,3	5,2	6,1	7,2	8,3

Explique como poderíamos usar métodos de mínimos quadrados para obter uma estimativa das vendas anuais com 45 representantes de vendas e discuta as hipóteses utilizadas. (Não é necessário efetuar as contas.)

10. A Agência Espacial dos Estados Unidos utilizou uma espaçonave experimental leve pilotada remotamente e movida a energia solar, denominada *Pathfinder*, numa série de experimentos para determinar a viabilidade da utilização de energia solar em voos de grande altitude e longa duração. Em agosto de 1997, a *Pathfinder* registrou os dados da tabela dada que relacionam a altitude H com a temperatura T. Mostre que é razoável um modelo linear esboçando os pontos de dados e encontre o ajuste linear de mínimos quadrados $H = H_0 + kT$.

Tabela Ex-10

Altitude H (milhares de pés)	15	20	25	30	35	40	45
Temperatura T (°C)	4,5	−5,9	−16,1	−27,6	−39,8	−50,2	−62,9

11. Encontre a curva da forma $y = a + (b/x)$ que melhor ajuste os pontos (1, 7) (3, 3) e (6, 1) fazendo a substituição $X = 1/x$. Esboce a curva e marque os pontos de dados no mesmo sistema de coordenadas.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(d), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Cada conjunto de pontos de dados tem um único ajuste linear de mínimos quadrados.

(b) Se os pontos de dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ não são colineares, então o sistema (1) é inconsistente.

(c) Se $y = a + bx$ for o ajuste linear de mínimos quadrados dos pontos de dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, então $d_i = |y_i - (a + bx_i)|$ é mínimo, qualquer que seja $1 \leq i \leq n$.

(d) Se $y = a + bx$ for o ajuste linear de mínimos quadrados dos pontos de dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, então $\sum_{i=1}^{n} |y_i - (a + bx_i)|^2$ é mínimo.

6.6 Aproximação funcional; séries de Fourier

Nesta seção, vamos mostrar como as projeções ortogonais podem ser usadas para aproximar certos tipos de funções por funções mais simples com as quais seja mais fácil trabalhar. As ideias abordadas aqui têm aplicações importantes nas Ciências e nas Engenharias. Esta seção requer Cálculo.

A melhor aproximação

Todos os problemas que estudamos nesta seção são casos particulares do seguinte problema geral.

O problema da aproximação Dada uma função f contínua num intervalo $[a, b]$, encontre a "melhor aproximação possível" de f entre todas as funções de um subespaço W especificado de $C[a, b]$.

Vejamos alguns exemplos desses problemas.

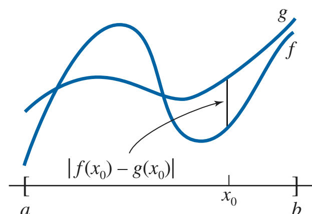
(a) Encontrar a melhor aproximação possível de e^x em [0, 1] por um polinômio da forma $a_0 + a_1x + a_2x^2$.

(b) Encontrar a melhor aproximação possível de sen πx em $[-1, 1]$ por uma função da forma $a_0 + a_1e_x + a_2e^{2x} + a_3e^{3x}$.

(c) Encontrar a melhor aproximação possível de x em $[0, 2\pi]$ por uma função da forma $a_0 + a_1 \text{ sen } x + a_2 \text{ sen } 2x + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x$.

No primeiro exemplo, W é o subespaço de $C[0, 1]$ gerado por 1, x e x^2; no segundo exemplo, W é o subespaço de $C[-1, 1]$ gerado por 1, e^x, e^{2x} e e^{3x}; no terceiro exemplo, W é o subespaço de $C[0, 2\pi]$ gerado por 1, sen x, sen $2x$, cos x e cos $2x$.

Erro de medição



▲ **Figura 6.6.1** O desvio entre f e g em x_0.

Para resolver problemas de aproximação desses tipos, a frase "melhor aproximação em $[a, b]$" deve tornar-se matematicamente precisa. Para isso, precisamos de alguma maneira de quantificar o erro que resulta quando uma função contínua é aproximada por uma outra em $[a, b]$. Se fôssemos aproximar $f(x)$ por $g(x)$, e nossa única preocupação fosse o erro da aproximação num *único ponto* x_0, então seria natural definir o erro como sendo

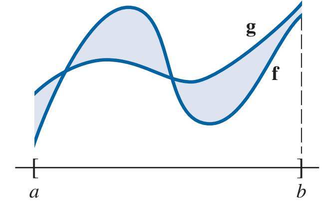
$$\text{erro} = |f(x_0) - g(x_0)|$$

que, às vezes, é denominado ***desvio*** entre f e g em x_0 (Figura 6.6.1). No entanto, não estamos pensando em medir o erro num único ponto, mas sim no *intervalo inteiro* $[a, b]$. O problema é que uma aproximação pode ter desvio pequeno numa parte do intervalo e

grande numa outra parte. Uma maneira possível de levar isso em conta é integrar o desvio $|f(x) - g(x)|$ no intervalo $[a, b]$ e definir o erro no intervalo como sendo

$$\text{erro} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \tag{1}$$

Geometricamente, (1) é a área entre os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ no intervalo $[a, b]$ (Figura 6.6.2); quanto maior a área, maior o erro total.



▲ **Figura 6.6.2** A área entre os gráficos de **f** e **g** em $[a, b]$ mede o erro na aproximação de f por g em $[a, b]$.

Embora (1) seja natural e tenha apelo geométrico, a maioria dos matemáticos e cientistas costuma preferir a medida alternativa seguinte do erro total, denominado ***erro quadrático médio***.

$$\text{erro quadrático médio} = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx$$

O erro quadrático médio enfatiza o efeito de erros maiores, pois é elevado ao quadrado e tem a vantagem adicional de nos permitir colher frutos da teoria dos espaços com produto interno. Para ver como, supomos que **f** seja alguma função contínua em $[a, b]$ que queremos aproximar por alguma função **g** em algum subespaço W de $C[a, b]$, e que em $C[a, b]$ tomamos o produto interno

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

Segue que

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 = \langle \mathbf{f} - \mathbf{g}, \mathbf{f} - \mathbf{g} \rangle = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx = \text{erro quadrático médio}$$

e, portanto, minimizar o erro quadrático médio é o mesmo que minimizar $\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2$. Assim, podemos reformular precisamente o problema de aproximação enunciado informalmente no início desta seção.

Aproximação de mínimos quadrados

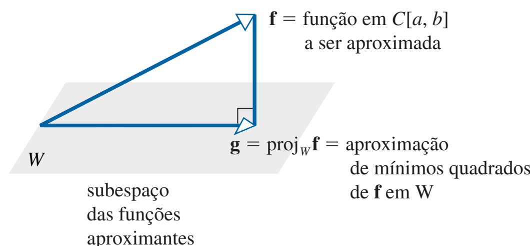
O problema da aproximação de mínimos quadrados Sejam **f** uma função contínua no intervalo $[a, b]$,

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

o produto interno em $C[a, b]$ e W um subespaço de dimensão finita de $C[a, b]$. Encontre uma função **g** em W que minimize

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx$$

Como $\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2$ e $\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|$ são minimizados pela mesma função **g**, esse problema é equivalente a procurar uma função **g** em W que esteja mais próxima de **f**. Mas, pelo Teorema 6.4.1, já sabemos que uma tal função é $\mathbf{g} = \text{proj}_W \mathbf{f}$ (Figura 6.6.3).



▶ **Figura 6.6.3**

Assim, temos o resultado seguinte.

TEOREMA 6.6.1 *Se* **f** *for uma função contínua em* $[a, b]$ *e* W *um subespaço de dimensão finita de* $C[a, b]$*, então a função* **g** *em* W *que minimiza o erro quadrático médio*

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx$$

é $\mathbf{g} = \text{proj}_W \mathbf{f}$*, sendo a projeção ortogonal em relação ao produto interno*

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

Dizemos que a função $\mathbf{g} = \text{proj}_W \mathbf{f}$ *é a* ***aproximação de mínimos quadrados*** *de* **f** *em* W*.*

Séries de Fourier

Uma função da forma

$$T(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots + c_n \cos nx \\ + d_1 \operatorname{sen} x + d_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + d_n \operatorname{sen} nx \qquad (2)$$

é denominada ***polinômio trigonométrico***; se c_n e d_n não forem ambos nulos, dizemos que $T(x)$ é de ***ordem n***. Por exemplo,

$$T(x) = 2 + \cos x - 3 \cos 2x + 7 \operatorname{sen} 4x$$

é um polinômio trigonométrico de ordem 4 com

$$c_0 = 2, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = -3, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = 0, \quad d_4 = 7$$

É evidente por (2) que os polinômios trigonométricos de ordem n ou menor são as várias combinações lineares possíveis de

$$1, \quad \cos x, \quad \cos 2x, \ldots, \quad \cos nx, \quad \operatorname{sen} x, \quad \operatorname{sen} 2x, \ldots, \quad \operatorname{sen} nx \qquad (3)$$

Pode ser mostrado que essas $2n + 1$ funções são linearmente independentes e que, portanto, formam uma base de um subespaço de dimensão $2n + 1$ de $C[a, b]$.

Consideremos, agora, o problema de encontrar a aproximação de mínimos quadrados de uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[0, 2\pi]$ por algum polinômio trigonométrico de ordem n ou menor. Como observamos, a aproximação de mínimos quadrados de **f** em W é a projeção ortogonal de **f** em W. Para encontrar essa projeção ortogonal, devemos encontrar uma base ortonormal $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{2n}$ de W, com a qual, então, podemos calcular a projeção ortogonal em W pela fórmula

$$\text{proj}_W \mathbf{f} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_0 \rangle \mathbf{g}_0 + \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_1 \rangle \mathbf{g}_1 + \cdots + \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{2n} \rangle \mathbf{g}_{2n} \qquad (4)$$

(ver Teorema 6.3.4*b*). Uma base ortonormal de W pode ser obtida aplicando o processo de Gram-Schmidt aos vetores de base em (3) usando o produto interno

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx$$

Isso resulta (ver Exercício 6) na base ortonormal

$$\mathbf{g}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \mathbf{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \ldots, \quad \mathbf{g}_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \\ \mathbf{g}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x, \ldots, \quad \mathbf{g}_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} nx \qquad (5)$$

Introduzindo a notação

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_0\rangle, \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_1\rangle, \ldots, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_n\rangle$$
$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{n+1}\rangle, \ldots, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{2n}\rangle \tag{6}$$

e substituindo (5) em (4), obtemos

$$\text{proj}_W \mathbf{f} = \frac{a_0}{2} + [a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx] + [b_1 \operatorname{sen} x + \cdots + b_n \operatorname{sen} nx] \tag{7}$$

com

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_0\rangle = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$
$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$$
$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{n+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} x\,dx$$
$$\vdots$$
$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{2n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx$$

Em resumo,

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx \tag{8}$$

Os números $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ são denominados ***coeficientes de Fourier*** de **f**.

▶ EXEMPLO 1 Aproximação de mínimos quadrados

Encontre a aproximação de mínimos quadrados de $f(x) = x$ em $[0, 2\pi]$ por

(a) um polinômio trigonométrico de ordem 2 ou menor.

(b) um polinômio trigonométrico de ordem n ou menor.

Solução (a)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = 2\pi \tag{9a}$$

Com $k = 1, 2, \ldots$, a integração por partes fornece (verifique)

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos kx\,dx = 0 \tag{9b}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\operatorname{sen} kx\,dx = -\frac{2}{k} \tag{9c}$$

Assim, a aproximação de mínimos quadrados de x em $[0, 2\pi]$ por um polinômio trigonométrico de ordem 2 ou menor é

$$x \approx \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x$$

ou, por (9a), (9b) e (9c),

$$x \approx \pi - 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x$$

Solução (b) A aproximação de mínimos quadrados de x em $[0, 2\pi]$ por um polinômio trigonométrico de ordem n ou menor é

$$x \approx \frac{a_0}{2} + [a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx] + [b_1 \operatorname{sen} x + \cdots + b_n \operatorname{sen} nx]$$

ou, por (9a), (9b) e (9c),

$$x \approx \pi - 2\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \cdots + \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right)$$

Os gráficos de $y = x$ e de algumas dessas aproximações aparecem na Figura 6.6.4.



Jean Baptiste Fourier (1768–1830)

Nota histórica Fourier foi um matemático e físico francês, que descobriu as séries de Fourier e ideias relacionadas enquanto trabalhava em problemas de difusão de calor. Essa foi uma das descobertas mais influentes na história da Matemática, sendo a pedra fundamental de muitas áreas de pesquisa matemática e uma ferramenta básica em muitos ramos da Engenharia. Fourier, um ativista político durante a Revolução Francesa, passou algum tempo encarcerado por defender vítimas do Terror. Mais tarde, tornou-se um favorito de Napoleão, sendo agraciado com o título de barão.

[Imagem: The Granger Collection, New York]

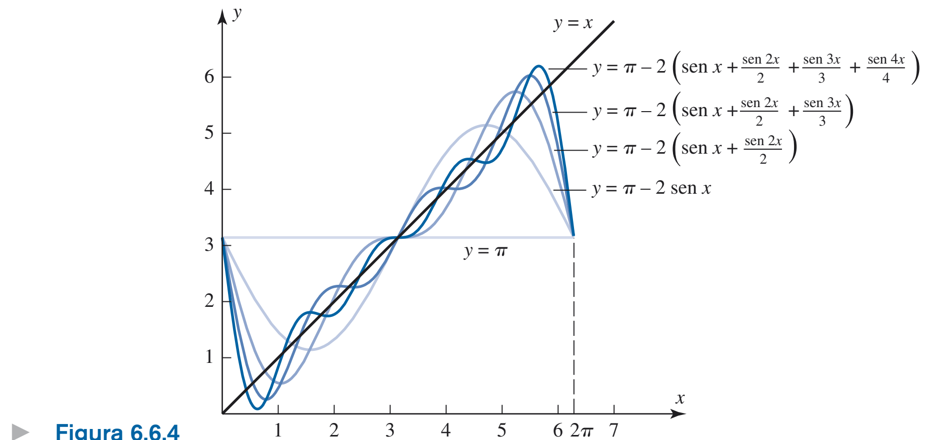


Figura 6.6.4

É natural esperar que o erro quadrático médio vá diminuir à medida que aumentar o número de termos na aproximação de mínimos quadrados

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

Pode ser provado que com funções f em $C[0, 2\pi]$, o erro quadrático médio tende a zero quando $n \to +\infty$, o que é denotado por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

O lado direito dessa equação é denominado ***série de Fourier*** de f no intervalo $[0, 2\pi]$. Essas séries são de extrema importância nas Engenharias, nas Ciências e na Matemática. ◀

Revisão de conceitos

- Aproximação de funções
- Erro quadrático médio
- Aproximação de mínimos quadrados
- Polinômio trigonométrico
- Coeficientes de Fourier
- Série de Fourier

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar a aproximação de mínimos quadrados de uma função.
- Encontrar o erro quadrático médio da aproximação de mínimos quadrados de uma função.
- Calcular a série de Fourier de uma função.

Conjunto de exercícios 6.6

1. Encontre a aproximação de mínimos quadrados de $f(x) = 1 + x$ no intervalo $[0, 2\pi]$ por

(a) um polinômio trigonométrico de ordem 2 ou menor.

(b) um polinômio trigonométrico de ordem n ou menor.

2. Encontre a aproximação de mínimos quadrados de $f(x) = 1 + x^2$ no intervalo $[0, 2\pi]$ usando

(a) um polinômio trigonométrico de ordem 3 ou menor.

(b) um polinômio trigonométrico de ordem n ou menor.

3. (a) Encontre a aproximação de mínimos quadrados de x no intervalo $[0, 1]$ por uma função da forma $a + be^x$.

(b) Encontre o erro quadrático médio da aproximação.

4. (a) Encontre a aproximação de mínimos quadrados de e^x no intervalo $[0, 1]$ por um polinômio da forma $a_0 + a_1x$.

(b) Encontre o erro quadrático médio da aproximação.

5. (a) Encontre a aproximação de mínimos quadrados de πx no intervalo $[-1, 1]$ por um polinômio da forma $a_0 + a_1x + a_2x^2$.

(b) Encontre o erro quadrático médio da aproximação.

6. Use o processo de Gram-Schmidt para obter a base ortonormal (5) a partir da base (3).

7. Efetue as integrações indicadas em (9a), (9b) e (9c).

8. Encontre a série de Fourier de $f(x) = \pi - x$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

9. Encontre a série de Fourier de $f(x) = 1$, se $0 < x < \pi$, e $f(x) = 0$, se $\pi \leq x \leq 2\pi$, no intervalo $[0, 2\pi]$.

10. Qual é a série de Fourier de $\operatorname{sen}(3x)$?

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se uma função $\mathbf{f}$ em $C[a, b]$ for aproximada por uma função $\mathbf{g}$, então o erro quadrático médio é igual à área entre os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ no intervalo $[a, b]$.

(b) Dado um subespaço W de dimensão finita de $C[a, b]$, a função $\mathbf{g} = \operatorname{proj}_W \mathbf{f}$ minimiza o erro quadrático médio.

(c) $\{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x\}$ é um subconjunto ortogonal do espaço vetorial $C[0, 2\pi]$ em relação ao produto interno $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$.

(d) $\{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x\}$ é um subconjunto ortonormal do espaço vetorial $C[0, 2\pi]$ em relação ao produto interno $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$.

(e) $\{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x\}$ é um subconjunto linearmente independente de $C[0, 2\pi]$.

Capítulo 6 Exercícios suplementares

1. Suponha que R^4 tenha o produto interno euclidiano.

(a) Encontre um vetor em R^4 que seja ortogonal a $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0, 0)$ e $\mathbf{u}_4 = (0, 0, 0, 1)$ e que faça ângulos iguais com $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 0)$ e $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1, 0)$.

(b) Encontre um vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de comprimento 1 que seja ortogonal aos vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_4$ dados na parte (a) e tal que o cosseno do ângulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}_2$ seja o dobro do cosseno do ângulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}_3$.

2. Prove: se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ for o produto interno euclidiano de R^n e se A for uma matriz $n \times n$, então

$$\langle \mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle = \langle A^T\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$$

[*Sugestão*: use o fato de que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}$.]

3. Suponha que M_{22} tenha o produto interno $\langle U, V\rangle = \operatorname{tr}(U^TV) = \operatorname{tr}(V^TU)$ definido no Exemplo 6 da Seção 6.1. Descreva o complemento ortogonal do subespaço de

(a) todas as matrizes diagonais.

(b) todas as matrizes simétricas.

4. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ um sistema de m equações em n incógnitas. Mostre que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é uma solução do sistema se, e só se, o vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é ortogonal a cada vetor linha de A em relação ao produto interno euclidiano de R^n.

5. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para mostrar que

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

quaisquer que sejam os números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

6. Mostre que se **x** e **y** forem quaisquer vetores num espaço com produto interno e c um escalar qualquer, então

$$\|c\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = c^2\|\mathbf{x}\|^2 + 2c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2$$

7. Suponha que R^3 tenha o produto interno euclidiano. Encontre dois vetores de comprimento 1 que sejam ortogonais a cada um dos três vetores $\mathbf{u}_1 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (-2, -1, 2)$ e $\mathbf{u}_3 = (-1, 0, 1)$.

8. Encontre um produto interno euclidiano ponderado em R^n tal que os vetores

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0)\\
\mathbf{v}_2 &= (0, \sqrt{2}, 0, \ldots, 0)\\
\mathbf{v}_3 &= (0, 0, \sqrt{3}, \ldots, 0)\\
&\ \vdots\\
\mathbf{v}_n &= (0, 0, 0, \ldots, \sqrt{n})
\end{aligned}$$

formem um conjunto ortonormal.

9. Existe algum produto interno euclidiano ponderado em R^2 no qual os vetores $(1, 2)$ e $(3, -1)$ formem um conjunto ortonormal? Justifique sua resposta.

10. Se **u** e **v** forem vetores num espaço com produto interno V, então **u**, **v** e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ podem ser considerados como os lados de um "triângulo" em V (ver figura). Prove que a lei dos cossenos vale para esses triângulos, ou seja, prove que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta$$

em que θ é o ângulo entre **u** e **v**.

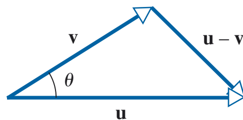


Figura Ex-10

11. (a) Conforme pode ser visto na Figura 3.2.6, os vetores $(k, 0, 0)$, $(0, k, 0)$ e $(0, 0, k)$ formam as arestas de um cubo em R^3 com diagonal (k, k, k). Analogamente, os vetores

$$(k, 0, 0, \ldots, 0), \quad (0, k, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad (0, 0, 0, \ldots, k)$$

podem ser considerados como as arestas de um "cubo" com diagonal $(k, k, k, \ldots, k)$. Mostre que cada uma dessas arestas faz um ângulo θ com a diagonal, sendo $\cos\theta = 1/\sqrt{n}$.

(b) (***Requer Cálculo***) O que acontece com o ângulo θ da parte (a) quando a dimensão n de R^n tende a $+\infty$?

12. Sejam **u** e **v** vetores num espaço com produto interno.

(a) Prove que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$ se, e só se, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ são ortogonais.

(b) Dê uma interpretação geométrica desse resultado em R^2 com o produto interno euclidiano.

13. Sejam **u** um vetor num espaço com produto interno V e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base ortonormal de V. Mostre que se α_i for o ângulo entre **u** e $\mathbf{v}_i$, então

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cdots + \cos^2\alpha_n = 1$$

14. Prove: se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_2$ forem dois produtos internos num espaço vetorial V, então a quantidade $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_2$ também é um produto interno.

15. Prove o Teorema 6.2.5.

16. Prove: se A tiver vetores coluna linearmente independentes e **b** for ortogonal ao espaço coluna de A, então a solução de mínimos quadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

17. Existe algum valor de s com o qual $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ seja a solução de mínimos quadrados do sistema linear dado?

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 &= 1\\
2x_1 + 3x_2 &= 1\\
4x_1 + 5x_2 &= s
\end{aligned}$$

Explique seu raciocínio.

18. Mostre que se p e q forem inteiros positivos distintos, então as funções $f(x) = \operatorname{sen} px$ e $g(x) = \operatorname{sen} qx$ são ortogonais em relação ao produto interno

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

19. Mostre que se p e q forem inteiros positivos, então as funções $f(x) = \cos px$ e $g(x) = \operatorname{sen} qx$ são ortogonais em relação ao produto interno

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

CAPÍTULO 7

Diagonalização e Formas Quadráticas

CONTEÚDO DO CAPÍTULO

INTRODUÇÃO

Na Seção 5.2, encontramos condições que garantem que uma matriz $n \times n$ seja diagonalizável, mas não consideramos qual classe ou classes de matrizes efetivamente satisfazem aquelas condições. Neste capítulo, mostramos que qualquer matriz simétrica é diagonalizável. Esse é um resultado extremamente importante, por ser utilizado de maneira essencial em muitas aplicações.

7.1 Matrizes ortogonais

Nesta seção, discutimos a classe das matrizes cujas inversas podem ser obtidas por transposição. Essas matrizes ocorrem numa variedade de aplicações e também surgem como as matrizes de transição quando passamos de alguma base ortonormal para outra.

Começamos com uma definição.

Matrizes ortogonais

DEFINIÇÃO 1 Dizemos que uma matriz quadrada A é ***ortogonal*** se sua transposta for sua inversa, ou seja, se

$$A^{-1} = A^T$$

ou, equivalentemente, se

$$AA^T = A^TA = I \tag{1}$$

No Teorema 1.6.3, já vimos que se uma das igualdades em (1) for válida, então a outra também será válida. Assim, A é ortogonal se valer $AA^T = I$ ou $A^TA = I$.

▶ **EXEMPLO 1** **Uma matriz ortogonal 3 × 3**

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

é ortogonal, pois

$$A^TA = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▶ **EXEMPLO 2 Matrizes de rotação e reflexão são ortogonais**

Lembre, pela Tabela 5 da Seção 4.9, que a matriz canônica da rotação anti-horária de R^2 por um ângulo θ é

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Essa matriz é ortogonal, qualquer que seja a escolha de θ, pois

$$A^TA = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deixamos para o leitor verificar que todas as matrizes de reflexão nas Tabelas 1 e 2 e todas as matrizes de rotação na Tabela 6 da Seção 4.9 são ortogonais. ◀

Observe que nas matrizes ortogonais dos Exemplos 1 e 2, tanto os vetores linha quanto os vetores coluna formam conjuntos ortonormais em relação ao produto interno euclidiano. Isso é uma consequência do teorema a seguir.

TEOREMA 7.1.1 *São equivalentes as afirmações dadas com matrizes A de tamanho $n \times n$.*

(*a*) *A é ortogonal.*

(*b*) *Os vetores linha de A formam um conjunto ortonormal de R^n em relação ao produto interno euclidiano.*

(*c*) *Os vetores coluna de A formam um conjunto ortonormal de R^n em relação ao produto interno euclidiano.*

Prova Provamos a equivalência de (*a*) e (*b*) e deixamos a equivalência de (*a*) e (*c*) como exercício.

(*a*) ⇔ (*b*) A entrada na *i*-ésima linha e *j*-ésima coluna da matriz produto AA^T é o produto escalar do *i*-ésimo vetor linha de A com o *j*-ésimo vetor coluna de A^T (pela Fórmula (5) da Seção 1.3). No entanto, exceto notação, o *j*-ésimo vetor coluna de A^T é o *j*-ésimo vetor linha de A. Assim, se $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ forem os vetores linha de A, então o produto matricial AA^T pode ser expresso por

$$AA^T = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 & \cdots & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_n \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 & \cdots & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_n & \cdots & \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_n \end{bmatrix}$$

[pela Fórmula (28) da Seção 3.2]. Assim, segue que $AA^T = I$ se, e só se,

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = \cdots = \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_n = 1$$

e

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = 0 \quad \text{quando } i \neq j$$

que valem se, e só se, $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n\}$ for um conjunto ortonormal de R^n. ◀

ADVERTÊNCIA Observe que uma matriz ortogonal tem linhas e colunas *ortonormais*, e não simplesmente linhas e colunas ortogonais.

O próximo teorema enumera três propriedades fundamentais adicionais de matrizes ortogonais. As provas são todas imediatas e deixadas para o leitor.

TEOREMA 7.1.2

(*a*) *A inversa de uma matriz ortogonal é ortogonal.*

(*b*) *Um produto de matrizes ortogonais é ortogonal.*

(*c*) *Se A for ortogonal, então* $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$.

▶ **EXEMPLO 3 det(*A*) = ±1 se *A* for uma matriz ortogonal**

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

é ortogonal, pois seus vetores linha e coluna formam conjuntos ortonormais de R^2, em relação ao produto interno euclidiano. Deixamos para o leitor verificar que $\det(A) = 1$, e que uma troca de linhas produz uma matriz ortogonal com $\det(A) = -1$. ◀

Matrizes ortogonais como operadores matriciais

Observamos no Exemplo 2 que são ortogonais as matrizes canônicas dos operadores básicos de reflexão e rotação de R^2 e R^3. O próximo teorema explica por que isso ocorre.

TEOREMA 7.1.3 *São equivalentes as afirmações dadas com matrizes A de tamanho* $n \times n$.

(*a*) *A é ortogonal.*

(*b*) $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$, *qualquer que seja* $\mathbf{x}$ *em* R^n.

(*c*) $A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, *quaisquer que sejam* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *em* R^n.

Prova Provamos a sequência de implicações $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$.

(*a*) ⇒ (*b*) Suponha que A seja ortogonal, de modo que $A^TA = I$. Segue da Fórmula (26) da Seção 3.2 que

$$\|A\mathbf{x}\| = (A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x})^{1/2} = (\mathbf{x} \cdot A^TA\mathbf{x})^{1/2} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2} = \|\mathbf{x}\|$$

(*b*) ⇒ (*c*) Suponha que $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$, qualquer que seja $\mathbf{x}$ em R^n. Pelo Teorema 3.2.7, temos

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} &= \tfrac{1}{4}\|A\mathbf{x} + A\mathbf{y}\|^2 - \tfrac{1}{4}\|A\mathbf{x} - A\mathbf{y}\|^2 = \tfrac{1}{4}\|A(\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 - \tfrac{1}{4}\|A(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \tfrac{1}{4}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{aligned}$$

(*c*) ⇒ (*a*) Suponha que $A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, quaisquer que sejam $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ em R^n. Segue da Fórmula (26) da Seção 3.2 que

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot A^TA\mathbf{y}$$

que pode ser reescrito como $\mathbf{x} \cdot (A^TA\mathbf{y} - \mathbf{y}) = 0$ ou como

$$\mathbf{x} \cdot (A^TA - I)\mathbf{y} = 0$$

Como essa equação é válida qualquer que seja $\mathbf{x}$ em R^n, em particular vale sempre que $\mathbf{x} = (A^TA - I)\mathbf{y}$, portanto,

$$(A^TA - I)\mathbf{y} \cdot (A^TA - I)\mathbf{y} = 0$$

Assim segue do axioma da positividade dos produtos internos que

$$(A^TA - I)\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

Como essa equação é válida qualquer que seja o vetor $\mathbf{y}$ em R^n, necessariamente $A^TA - I$ é a matriz nula (por quê?) e, portanto, $A^TA = I$. Assim, A é ortogonal. ◀

As partes (a) e (c) do Teorema 7.1.3 implicam que os operadores ortogonais mantêm inalterados os *ângulos* entre dois vetores. Por quê?

Considerado do ponto de vista de transformações matriciais, o Teorema 7.1.3 tem uma interpretação geométrica útil. Se A for uma matriz ortogonal e $T_A : R^n \to R^n$ a multiplicação por A, dizemos que T_A é um ***operador ortogonal*** de R^n. Segue das partes (a) e (b) do Teorema 7.1.3 que os operadores ortogonais de R^n são precisamente os operadores que mantêm inalterados os comprimentos de todos os vetores. Isso explica por que, no Exemplo 2, as matrizes das reflexões e rotações de R^2 e R^3 resultaram ortogonais.

Mudança de bases ortogonais

As bases ortonormais de espaços com produto interno são convenientes porque, como mostra o teorema seguinte, muitas fórmulas familiares são válidas com essas bases. A prova é deixada como exercício.

TEOREMA 7.1.4 *Se S for uma base ortonormal de um espaço com produto interno V de dimensão n e se*

$$(\mathbf{u})_S = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{e} \quad (\mathbf{v})_S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

então

(a) $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$

(b) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$

(c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$

Observação Note que as três partes do Teorema 7.1.4 podem ser expressas como

$$\|\mathbf{u}\| = \|(\mathbf{u})_S\| \quad d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d((\mathbf{u})_S, (\mathbf{v})_S) \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle (\mathbf{u})_S, (\mathbf{v})_S \rangle$$

em que a norma, a distância e o produto interno dos lados esquerdos são em relação ao produto interno de V, e nos lados direitos, em relação ao produto interno euclidiano de R^n.

As transições entre bases ortonormais de um espaço com produto interno são de importância especial na Geometria e em várias aplicações. O próximo teorema, cuja prova será adiada para o final desta seção, trata dessas transições.

TEOREMA 7.1.5 *Seja V um espaço com produto interno de dimensão finita. Se P for a matriz de transição de uma base ortonormal de V para uma outra base ortonormal de V, então P é uma matriz ortogonal.*

▶ EXEMPLO 4 Rotação de eixos no espaço bidimensional

Em muitos problemas, é dado um sistema de coordenadas retangulares xy que, girado no sentido anti-horário em torno da origem por um ângulo θ, produz um novo sistema de coordenadas $x'y'$. Quando isso é feito, cada ponto Q do plano tem dois conjuntos de coordenadas, a saber, as coordenadas (x, y) em relação ao sistema xy e as coordenadas $(x'y')$ em relação ao sistema $x'y'$ (Figura 7.1.1a).

Introduzindo vetores unitários $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ ao longo dos eixos x e y positivos e vetores unitários $\mathbf{u}'_1$ e $\mathbf{u}'_2$ ao longo dos eixos x' e y' positivos, podemos considerar essa rotação como uma mudança de uma base velha $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ para uma nova $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ (Figura 7.1.1b). Assim, as coordenadas novas (x', y') e as coordenadas velhas (x, y) de um ponto Q estarão relacionadas por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{2}$$

onde P é a matriz de transição de B' para B. Para encontrar P, devemos determinar as matrizes de coordenadas dos vetores $\mathbf{u}'_1$ e $\mathbf{u}'_2$ da base nova em relação à base velha. Conforme indicado na Figura 7.1.1*c*, os componentes de $\mathbf{u}'_1$ na base velha são $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$, de modo que

$$[\mathbf{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

Analogamente, pela Figura 7.1.1*d*, vemos que os componentes de $\mathbf{u}'_2$ na base velha são $\cos(\theta + \pi/2) = -\operatorname{sen}\theta$ e $\operatorname{sen}(\theta + \pi/2) = \cos\theta$, de modo que

$$[\mathbf{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz de transição de B' para B é

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{3}$$

Observe que P é uma matriz ortogonal, como era de se esperar, pois B e B' são bases ortonormais. Assim,

$$P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

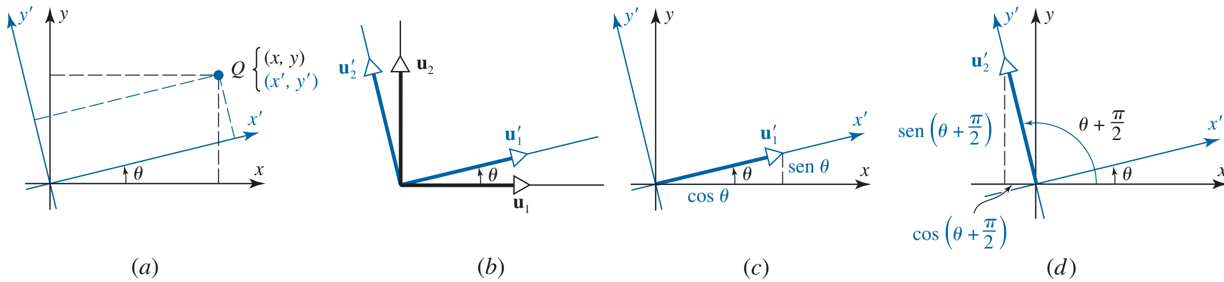
e, portanto, por (2),

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{4}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ y' &= -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{aligned} \tag{5}$$

Essas equações costumam ser chamadas de ***equações de rotação*** de R^2.



▲ **Figura 7.1.1**

▶ EXEMPLO 5 Rotação de eixos no espaço bidimensional

Use a forma (4) das equações de rotação de R^2 para encontrar as coordenadas novas do ponto $Q(2, 1)$ se os eixos coordenados de um sistema de coordenadas retangulares forem girados por um ângulo de $\theta = \pi/4$.

Solução Como

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a equação em (4) é dada por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

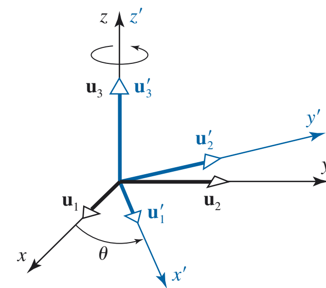
Assim, se as coordenadas velhas de um ponto Q forem $(x, y) = (2, -1)$, então

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

e, portanto, as coordenadas novas de Q são $(x', y') = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$. ◀

Observação Note que a matriz de coeficientes em (4) é igual à matriz canônica do operador linear que efetua a rotação dos vetores de R^2 pelo ângulo θ (ver nota marginal da Tabela 5 da Seção 4.9). Isso era de se esperar, pois girar os eixos coordenados por um ângulo θ com os vetores de R^2 mantidos fixados tem o mesmo efeito que girar os vetores por um ângulo θ com os eixos mantidos fixados.

▶ EXEMPLO 6 Rotação de eixos no espaço tridimensional



▲ **Figura 7.1.2**

Suponha que um sistema de coordenadas retangulares xyz seja girado em torno do eixo z no sentido anti-horário (olhando para baixo ao longo do eixo z positivo) por um ângulo θ (Figura 7.1.2). Introduzindo vetores unitários $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ ao longo dos eixos x, y e z positivos e vetores unitários $\mathbf{u}'_1$, $\mathbf{u}'_2$ e $\mathbf{u}'_3$ ao longo dos eixos x', y' e z' positivos, podemos considerar essa rotação como uma mudança de uma base velha $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ para uma nova $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$. Em vista do Exemplo 4, deveria ser evidente que

$$[\mathbf{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Além disso, como $\mathbf{u}'_3$ se estende ao longo de uma unidade para cima no eixo z positivo, temos

$$[\mathbf{u}'_3]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Segue que a matriz de transição de B' para B é

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a matriz de transição de B para B' é

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(verifique). Assim, as coordenadas novas (x', y', z') de um ponto Q podem ser calculadas a partir das coordenadas velhas (x, y, z) por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ ◀

OPCIONAL

Concluímos esta seção com uma prova opcional do Teorema 7.1.5.

Prova do Teorema 7.1.5 Suponha que V seja um espaço com produto interno de dimensão n e que P seja a matriz de transição de uma base ortonormal B' para uma base ortonormal B. Denotemos a norma em relação ao produto interno de V pelo símbolo $\| \quad \|_V$

para distingui-la da norma relativa ao produto interno euclidiano de R^n, que denotamos por $\| \quad \|$.

Para provar que P é ortogonal, vamos usar o Teorema 7.1.3 e mostrar que $\|P\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$, qualquer que seja o vetor $\mathbf{x}$ em R^n. Como um primeiro passo nessa direção, lembre que, pelo Teorema 7.1.4*a*, a norma de qualquer vetor $\mathbf{u}$ em V em relação a qualquer base ortonormal de V é a mesma que a norma do vetor de coordenadas em relação ao produto interno euclidiano de R^n, ou seja,

$$\|\mathbf{u}\|_V = \|[\mathbf{u}]_{B'}\| = \|[\mathbf{u}]_B\|$$

ou

$$\|\mathbf{u}\|_V = \|[\mathbf{u}]_{B'}\| = \|P[\mathbf{u}]_{B'}\| \tag{6}$$

Seja, agora, $\mathbf{x}$ um vetor qualquer em R^n e seja $\mathbf{u}$ o vetor em V cujo vetor de coordenadas em relação à base B' é $\mathbf{x}$, ou seja, $[\mathbf{u}]_{B'} = \mathbf{x}$. Assim, por (6),

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{x}\| = \|P\mathbf{x}\|$$

provando que P é ortogonal. ◀

Lembre que $(\mathbf{u})_S$ denota um vetor de coordenadas escrito no formato de vírgulas, ao passo que $[\mathbf{u}]_S$ denota um vetor de coordenadas escrito no formato de coluna.

Revisão de conceitos

- Matriz ortogonal
- Operador ortogonal
- Propriedades de matrizes ortogonais
- Propriedades geométricas de um operador ortogonal
- Propriedades da matriz de transição de uma base ortonormal para outra

Aptidões desenvolvidas

- Ser capaz de identificar uma matriz ortogonal.
- Saber os valores possíveis do determinante de uma matriz ortogonal.
- Encontrar as novas coordenadas de um ponto que resultam de uma rotação de eixos.

Conjunto de exercícios 7.1

1. (a) Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{9}{25} & \frac{4}{5} & -\frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{3}{5} & \frac{16}{25} \end{bmatrix}$$

é ortogonal de três maneiras: calculando A^TA, usando a parte (*b*) do Teorema 7.1.1 e usando a parte (*c*) do Teorema 7.1.1.

(b) Encontre a inversa da matriz A da parte (a).

2. (a) Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

é ortogonal.

(b) Seja $T: R^3 \to R^3$ a multiplicação pela matriz A da parte (a). Encontre $T(\mathbf{x})$ com o vetor $\mathbf{x} = (-2, 3, 5)$. Usando o produto interno euclidiano de R^3, verifique que $\|T(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$.

3. Em cada parte, determine se a matriz é ortogonal. Se for, obtenha a inversa.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

4. Prove que se A for ortogonal, então A^T será ortogonal.

5. Verifique que as matrizes de reflexão nas Tabelas 1 e 2 da Seção 4.9 são ortogonais.

6. Seja $x'y'$ o sistema de coordenadas retangulares obtido pela rotação do sistema de coordenadas retangulares xy no sentido anti-horário pelo ângulo $\theta = 3\pi/4$.

(a) Encontre as coordenadas $x'y'$ do ponto cujas coordenadas xy são $(-2, 6)$.

(b) Encontre as coordenadas xy do ponto cujas coordenadas $x'y'$ são $(5, 2)$.

7. Repita o Exercício 6 com $\theta = \pi/3$.

8. Seja $x'y'z'$ o sistema de coordenadas retangulares obtido pela rotação do sistema de coordenadas retangulares xyz no sentido anti-horário em torno do eixo z (olhando para baixo no eixo z positivo) pelo ângulo $\theta = \pi/4$.

(a) Encontre as coordenadas $x'y'z'$ do ponto cujas coordenadas xyz são $(-1, 2, 5)$.

(b) Encontre as coordenadas xyz do ponto cujas coordenadas $x'y'z'$ são $(1, 6, -3)$.

9. Repita o Exercício 8 com uma rotação no sentido anti-horário em torno do eixo y (olhando ao longo do eixo y positivo para a origem) pelo ângulo $\theta = \pi/3$.

10. Repita o Exercício 8 com uma rotação no sentido anti-horário em torno do eixo x (olhando ao longo do eixo x positivo para a origem) pelo ângulo $\theta = 3\pi/4$.

11. (a) Seja $x'y'z'$ o sistema de coordenadas retangulares obtido pela rotação do sistema de coordenadas retangulares xyz no sentido anti-horário em torno do eixo y (olhando ao longo do eixo y positivo para a origem) pelo ângulo θ. Encontre uma matriz A tal que

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

onde (x, y, z) e $(x'y'z')$ são as coordenadas do mesmo ponto nos sistemas xyz e $x'y'z'$, respectivamente.

(b) Repita a parte (a) com uma rotação em torno do eixo x.

12. Seja $x''y''z''$ o sistema de coordenadas retangulares obtido pela rotação do sistema de coordenadas retangulares xyz no sentido anti-horário em torno do eixo z (olhando para baixo ao longo do eixo z positivo) pelo ângulo de 60°, e seja $x'y'z'$ o sistema de coordenadas retangulares obtido pela rotação do sistema de coordenadas retangulares $x'y'z'$ no sentido anti-horário em torno do eixo y' (olhando ao longo do eixo y' positivo para a origem) pelo ângulo de 45°. Encontre uma matriz A tal que

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

onde (x, y, z) e (x'', y'', z'') são as coordenadas do mesmo ponto nos sistemas xyz e x'', y'', z'', respectivamente.

13. Quais condições devem satisfazer a e b para que a matriz

$$\begin{bmatrix} a+b & b-a \\ a-b & b+a \end{bmatrix}$$

seja ortogonal?

14. Prove que uma matriz ortogonal A de tamanho 2×2 é de uma de duas formas possíveis, a saber,

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

onde $0 \leq \theta < 2\pi$. [*Sugestão*: comece com uma matriz arbitrária $A = (a_{ij})$ de tamanho 2×2 e use o fato que os vetores coluna formam um conjunto ortonormal de R^2.]

15. (a) Use o resultado do Exercício 14 para provar que a multiplicação por uma matriz ortogonal 2×2 é uma rotação ou uma reflexão seguida por uma rotação.

(b) Mostre que a multiplicação por A é uma rotação se $\det(A) = 1$ e é uma rotação ou uma reflexão seguida por uma rotação se $\det(A) = -1$.

16. Em cada parte, use o resultado do Exercício 15 para determinar se a multiplicação por A é uma rotação ou uma reflexão seguida por uma rotação. Encontre o ângulo de rotação em ambos os casos.

(a) $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

17. Encontre a, b e c tais que a matriz

$$\begin{bmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ b & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ c & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

seja ortogonal. São únicos tais valores de a, b e c? Explique.

18. O resultado do Exercício 15 tem um análogo para matrizes ortogonais 3×3, como segue. Pode ser provado que a multiplicação por uma matriz ortogonal A de tamanho 3×3 é uma rotação em torno de algum eixo se $\det(A) = 1$, e é uma rotação em torno de algum eixo seguida por uma reflexão num plano coordenado se $\det(A) = -1$. Em cada parte, determine se a multiplicação por A é uma rotação ou uma rotação seguida por uma reflexão.

(a) $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$

19. Use o fato enunciado no Exercício 18 e a parte (*b*) do Teorema 7.1.2 para mostrar que a composição de rotações pode ser sempre realizada por uma única rotação em torno de algum eixo apropriado.

20. Prove a equivalência das afirmações (*a*) e (*c*) do Teorema 7.1.1.

21. Dizemos que um operador matricial de R^2 é ***rígido*** se mantiver o comprimento dos vetores, e que ***preserva ângulo*** se não mudar o ângulo entre vetores não nulos.

(a) Dê o nome de dois tipos distintos de operadores que são rígidos.

(b) Dê o nome de dois tipos distintos de operadores que preservam ângulo.

(c) Existem operadores matriciais de R^2 que sejam rígidos e não preservem ângulo? Que preservem ângulo e não sejam rígidos? Justifique suas respostas.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(h), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é ortogonal.

(b) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ é ortogonal.

(c) Uma matriz A de tamanho $m \times n$ é ortogonal se $A^TA = I$.

(d) Uma matriz quadrada cujas colunas formam um conjunto ortogonal é ortogonal.

(e) Qualquer matriz ortogonal é invertível.

(f) Se A for uma matriz ortogonal, então A^2 será ortogonal e $(\det A)^2 = 1$.

(g) Qualquer autovalor de uma matriz ortogonal tem valor absoluto 1.

(h) Se A for uma matriz quadrada tal que $\|A\mathbf{u}\| = 1$, qualquer que seja o vetor unitário $\mathbf{u}$, então A será ortogonal.

7.2 Diagonalização ortogonal

Nesta seção, tratamos do problema de diagonalizar uma matriz simétrica A. Como veremos, esse problema está muito relacionado com o de encontrar uma base ortonormal de R^n que consista em autovetores de A. Problemas desse tipo são importantes porque muitas das matrizes que aparecem nas aplicações são simétricas.

O problema da diagonalização ortogonal

Na Definição 1 da Seção 5.2, definimos duas matrizes quadradas A e B como sendo *semelhantes* se existir alguma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = B$. Nesta seção, tratamos do caso especial em que é possível encontrar uma matriz ortogonal com a qual valha essa relação.

DEFINIÇÃO 1 Sejam A e B matrizes quadradas. Dizemos que A e B são ***ortogonalmente semelhantes*** se existir alguma matriz ortogonal P tal que $P^TAP = B$.

Se A for ortogonalmente semelhante a alguma matriz diagonal, digamos,

$$P^TAP = D$$

dizemos que A é ***ortogonalmente diagonalizável*** e que P ***diagonaliza*** A ***ortogonalmente***.

Nosso primeiro objetivo nesta seção é determinar quais condições devem ser satisfeitas por uma matriz para que seja ortogonalmente diagonalizável. Como um primeiro passo, observe que não há esperança de diagonalizar uma matriz que não seja simétrica. Para ver por que isso é assim, suponha que

$$P^TAP = D \tag{1}$$

onde P é uma matriz ortogonal e D é uma matriz diagonal. Multiplicando o lado esquerdo de (1) por P, o lado direito por P^T e usando o fato de que $PP^T = P^TP = I$, podemos reescrever essa equação como

$$A = PDP^T \tag{2}$$

Agora, transpondo ambos os lados dessa equação e usando o fato de que uma matriz diagonal é igual a sua transposta, obtemos

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^TD^TP^T = PDP^T = A$$

portanto, A deve ser simétrica.

Condições para a diagonalização ortogonal

O próximo teorema mostra que qualquer matriz simétrica é, de fato, ortogonalmente diagonalizável. Nesse teorema, e no restante desta seção, *ortogonal* significa ortogonal em relação ao produto interno euclidiano de R^n.

TEOREMA 7.2.1 *Se A for uma matriz $n \times n$, então as afirmações seguintes são equivalentes.*

(*a*) *A é ortogonalmente diagonalizável.*

(*b*) *A tem um conjunto ortonormal de n autovetores.*

(*c*) *A é simétrica.*

***Prova* (*a*) ⇒ (*b*)** Como A é ortogonalmente diagonalizável, existe alguma matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal. Como mostramos na prova do Teorema 5.2.1, os n vetores coluna de P são autovetores de A. Como P é ortogonal, esses vetores coluna são ortonormais, de modo que A tem n autovetores ortonormais.

(*b*) ⇒ (*a*) Suponha que A tenha um conjunto ortonormal $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ de n autovetores. Como mostramos na prova do Teorema 5.2.1, a matriz P que tem esses autovetores como colunas diagonaliza A. Como esses autovetores são ortonormais, P é ortogonal e, assim, diagonaliza A ortogonalmente.

(*a*) ⇒ (*c*) Na prova de (*a*) ⇒ (*b*), mostramos que uma matriz A de tamanho $n \times n$ ortogonalmente diagonalizável é ortogonalmente diagonalizada por uma matriz P de tamanho $n \times n$ cujas colunas formam um conjunto ortonormal de autovetores de A. Seja D a matriz diagonal

$$D = P^TAP$$

do que segue que

$$A = PDP^T$$

Assim,

$$A^T = (PDP^T)^T = PD^TP^T = PDP^T = A$$

o que mostra que A é simétrica.

(*c*) ⇒ (*a*) A prova dessa parte está esboçada no Exercício 21. ◀

Propriedades de matrizes simétricas

Nosso próximo objetivo é construir um procedimento para diagonalizar ortogonalmente uma matriz simétrica, mas antes de poder fazer isso, precisamos do resultado crítico seguinte sobre autovalores e autovetores de matrizes simétricas.

TEOREMA 7.2.2 *Se A for uma matriz simétrica, valem as afirmações seguintes.*

(*a*) *Os autovalores de A são reais.*

(*b*) *Autovetores de autoespaços diferentes são ortogonais.*

A prova da parte (*a*), que requer conhecimentos de espaços vetoriais complexos, será discutida na Seção 7.5.

***Prova* (*b*)** Sejam $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ autovetores associados aos autovalores distintos λ_1 e λ_2 da matriz A. Queremos mostrar que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Nossa prova disso envolve o truque de começar com a expressão $A\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$. Segue da Fórmula (26) da Seção 3.2 e da simetria de A que

$$A\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot A^T\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot A\mathbf{v}_2 \quad (3)$$

Como $\mathbf{v}_1$ é um autovetor de A associado a λ_1, e $\mathbf{v}_2$ é um autovetor de A associado a λ_2, segue de (3) a relação

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \lambda_2\mathbf{v}_2$$

que pode ser reescrita como

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = 0 \qquad (4)$$

Mas $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, já que λ_1 e λ_2 são distintos. Assim, segue de (4) que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. ◀

O Teorema 7.2.2 fornece o procedimento seguinte para diagonalizar uma matriz simétrica.

Diagonalização ortogonal de uma matriz simétrica $n \times n$

Passo 1. Encontre uma base de cada autoespaço de A.

Passo 2. Aplique o processo de Gram-Schmidt a cada uma dessas bases para obter uma base ortonormal de cada autoespaço.

Passo 3. Forme a matriz P cujas colunas são os vetores de base construídos no Passo 2. Essa matriz diagonaliza A ortogonalmente, e os autovalores na diagonal de $D = P^TAP$ estarão na mesma ordem que seus autovetores associados em P.

Observação A justificativa para esse procedimento deveria estar clara. O Teorema 7.2.2 garante que autovetores de autoespaços *diferentes* são ortogonais, e aplicar o processo de Gram-Schmidt garante que os autovetores obtidos dentro de *um mesmo* autoespaço são ortonormais. Segue que o conjunto *inteiro* de autovetores obtidos por esse procedimento é ortonormal.

▶ EXEMPLO 1 Diagonalizando ortogonalmente uma matriz simétrica

Encontre uma matriz ortogonal P que diagonaliza

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Solução Deixamos para o leitor verificar que a equação característica de A é

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 8) = 0$$

Assim, os autovalores distintos de A são $\lambda = 2$ e $\lambda = 8$. Pelo método usado no Exemplo 7 da Seção 5.1, pode ser mostrado que

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

formam uma base do autoespaço associado a $\lambda = 2$. Aplicando o processo de Gram-Schmidt a $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, obtemos os autovetores ortonormais seguintes.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

O autoespaço associado a $\lambda = 8$ tem

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

como base. Aplicando o processo de Gram-Schmidt a $\{\mathbf{u}_3\}$ (ou seja, normalizando $\mathbf{u}_3$), obtemos

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Finalmente, usando $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ como vetores coluna, obtemos

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

que diagonaliza A ortogonalmente. Deixamos para o leitor confirmar que

$$P^TAP = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$ ◀

Decomposição espectral

Se A for uma matriz simétrica ortogonalmente diagonalizada por

$$P = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_n]$$

e se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ forem os autovalores de A associados aos vetores unitários $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, então sabemos que $D = P^TAP$, onde D é uma matriz diagonal com os autovalores ao longo da diagonal. Segue disso que a matriz A pode ser expressa como

$$A = PDP^T = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix}$$

$$= [\lambda_1\mathbf{u}_1 \quad \lambda_2\mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix}$$

Multiplicando essas matrizes, obtemos a fórmula

$$A = \lambda_1\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + \lambda_2\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T + \cdots + \lambda_n\mathbf{u}_n\mathbf{u}_n^T \tag{7}$$

que é denominada uma ***decomposição espectral de A***.‡

‡ A terminologia *decomposição espectral* faz referência ao ***espectro*** de uma matriz, que é como muitas vezes é denominado o conjunto de todos os autovalores de uma matriz. A terminologia *decomposição em autovalores* se deve a Dan Kalman, que a introduziu num artigo científico premiado, intitulado "A Singularly Valuable Decomposition: The SVD of a Matrix," publicado no *College Mathematics Journal*, Vol. 27, No. 1, January 1996.

Observe que cada termo na decomposição espectral de A tem a forma $\lambda \mathbf{u}\mathbf{u}^T$, em que $\mathbf{u}$ é um autovetor unitário de A em forma de coluna e λ é um autovalor de A associado a $\mathbf{u}$. Como $\mathbf{u}$ tem tamanho $n \times 1$, segue que o produto $\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ tem tamanho $n \times n$. Pode ser demonstrado (mas não o faremos aqui) que $\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ é a matriz canônica da projeção ortogonal de R^n no subespaço gerado pelo vetor $\mathbf{u}$. Aceitando isso, a decomposição espectral de A nos diz que a imagem de um vetor $\mathbf{x}$ pela multiplicação por uma matriz simétrica A pode ser obtida projetando $\mathbf{x}$ ortogonalmente sobre as retas (subespaços unidimensionais) determinadas pelos autovetores de A, depois utilizando os autovalores para adequar os tamanhos das projeções e finalmente somando as projeções modificadas. Aqui temos um exemplo.

▶ EXEMPLO 2 Uma interpretação geométrica de uma decomposição espectral

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

tem autovalores $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 2$ com autovetores associados

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(verifique). Normalizando esses vetores de base, obtemos

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_2\|} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

de modo que uma decomposição espectral de A é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T = (-3) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$= (-3) \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \tag{8}$$

onde, conforme observado acima, as matrizes 2×2 do lado direito de (8) são as matrizes canônicas das projeções ortogonais sobre os autoespaços associados a $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 2$, respectivamente.

Agora vejamos o que essa decomposição espectral nos diz sobre a imagem do vetor $\mathbf{x} = (1, 1)$ na multiplicação por A. Escrevendo $\mathbf{x}$ em forma de coluna, temos que

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

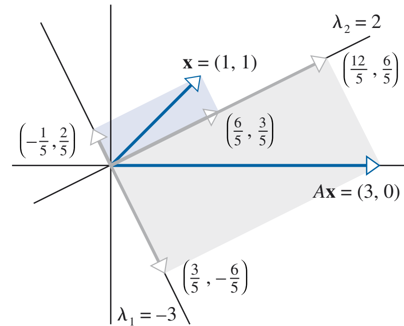
e de (8) segue

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-3) \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= (-3) \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

As Fórmulas (9) e (10) fornecem duas maneiras diferentes de visualizar a imagem do vetor (1, 1) pela multiplicação por A. A Fórmula (9) nos diz diretamente que a imagem desse vetor é (3,0), enquanto a Fórmula (10) nos diz que essa imagem também pode ser obtida projetando (1, 1) nos autoespaços associados a $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 2$ para obter os vetores $\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ e $\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$, depois adequando os tamanhos desses vetores com a utilização dos autovalores para obter $\left(\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ e $\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$ e, então, somando esses vetores (ver Figura 7.2.1). ◀



▶ **Figura 7.2.1**

O caso não diagonalizável

Se A for uma matriz que não é diagonalizável ortogonalmente, ainda pode ser possível alcançar uma simplificação considerável na forma de P^TAP pela escolha apropriada da matriz ortogonal P. Consideramos dois teoremas (sem demonstração) que ilustram isso. O primeiro, devido ao matemático alemão Issai Schur, afirma que qualquer matriz quadrada A com autovalores reais é ortogonalmente semelhante a uma matriz triangular superior que tem os autovalores de A na diagonal principal.

TEOREMA 7.2.3 Teorema de Shur

Se A for uma matriz $n \times n$ com entradas reais e autovalores reais, então existe uma matriz ortogonal P tal que P^TAP é uma matriz triangular superior da forma

$$P^TAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \times & \cdots & \times \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{11}$$

na qual $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores da matriz A repetidos de acordo com a multiplicidade.



Issai Schur (1875–1941)

Nota histórica A vida do matemático alemão Issai Schur é uma triste lembrança do efeito que a política nazista teve sobre os intelectuais judeus durante os anos 1930. Schur foi um matemático brilhante e um expositor famoso que atraiu muitos alunos e professores para a Universidade de Berlim, onde trabalhava e lecionava. Suas conferências às vezes atraíam tantos alunos que os que sentavam nas últimas filas utilizavam binóculos para vê-lo. A vida de Schur ficou cada vez mais difícil durante o regime nazista e, em abril de 1933, foi forçado a se "aposentar" da universidade por causa de uma lei que proibia não arianos de manter posição de "servidor civil". Houve uma revolta por parte de muitos alunos e colegas que o respeitavam e admiravam, mas isso não impediu seu afastamento completo em 1935. Shur, que se considerava um alemão leal, em vez de judeu, nunca entendeu a perseguição e a humilhação que sofreu nas mãos dos nazistas. Em 1939, um homem quebrado, deixou a Alemanha pela Palestina. Sem recursos financeiros, ele teve de vender seus adorados livros de Matemática e viveu na pobreza até sua morte, em 1941.

[Imagem: Cortesia Electronic Publishing Services, Inc., New York City]

É comum denotar a matriz triangular superior em (11) por S (de Schur), caso em que aquela equação pode ser reescrita como

$$A = PSP^T \tag{12}$$

que é, então, denominada uma ***decomposição de Schur*** de A.

O próximo teorema, devido ao matemático e engenheiro alemão Karl Hessenberg (1904-1959), afirma que qualquer matriz quadrada com entradas reais é ortogonalmente semelhante a uma matriz na qual cada entrada abaixo da primeira ***subdiagonal*** é zero (Figura 7.2.2). Dizemos que uma matriz dessas está em ***forma de Hessenberg superior***.

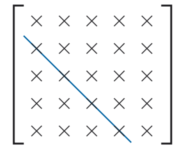


Figura 7.2.2

TEOREMA 7.2.4 Teorema de Hessenberg

Se A for uma matriz $n \times n$ com entradas reais, *então existe uma matriz ortogonal P tal que P^TAP é da forma*

$$P^TAP = \begin{bmatrix} \times & \times & \cdots & \times & \times & \times \\ \times & \times & \cdots & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \ddots & \times & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \times & \times \end{bmatrix} \tag{13}$$

Observe que, diferente das entradas em (11), as entradas na diagonal de (13) não são, em geral, os autovalores de A.

É comum denotar a forma de Hessenberg superior em (13) por H (de Hessenberg), caso em que aquela equação pode ser reescrita como

$$A = PHP^T \tag{14}$$

que é, então, denominada uma ***decomposição de Hessenberg superior*** de A.

Observação Em muitos algoritmos numéricos, a matriz inicial é primeiro convertida à forma de Hessenberg superior, reduzindo com isso a quantidade de cálculos nas etapas subsequentes do algoritmo. Muitos pacotes computacionais têm comandos próprios para encontrar as decomposições de Schur e de Hessenberg.

Revisão de conceitos

- Matrizes ortogonalmente semelhantes
- Matrizes ortogonalmente diagonalizáveis
- Decomposição espectral
- Decomposição de Shur
- Subdiagonal
- Forma de Hessenberg superior
- Decomposição de Hessenberg superior

Aptidões desenvolvidas

- Ser capaz de reconhecer uma matriz ortogonalmente diagonalizável.
- Saber que os autovalores de matrizes simétricas são números reais.
- Saber que os autovetores de autoespaços distintos de uma matriz simétrica são ortogonais.
- Ser capaz de diagonalizar ortogonalmente uma matriz simétrica.
- Ser capaz de encontrar a decomposição espectral de uma matriz simétrica.
- Conhecer o enunciado do Teorema de Shur.
- Conhecer o enunciado do Teorema de Hessenberg.

Conjunto de exercícios 7.2

1. Em cada parte, encontre a equação característica da matriz simétrica dada e depois, por inspeção, determine as dimensões dos autoespaços.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **2–9**, encontre uma matriz P que diagonaliza A ortogonalmente e determine $P^{-1}AP$. ◀

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **3.** $A = \begin{bmatrix} 6 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ **5.** $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **7.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **9.** $A = \begin{bmatrix} -7 & 24 & 0 & 0 \\ 24 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 24 \\ 0 & 0 & 24 & 7 \end{bmatrix}$

10. Supondo que $b \neq 0$, encontre uma matriz que diagonaliza ortogonalmente a matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

11. Prove que se A for uma matriz $m \times n$ qualquer, então A^TA tem um conjunto ortonormal de n autovetores.

12. (a) Mostre que se $\mathbf{v}$ for uma matriz $n \times 1$ qualquer e I for a matriz identidade $n \times n$, então $I - \mathbf{v}\mathbf{v}^T$ é diagonalizável ortogonalmente.

(b) Encontre uma matriz P que diagonaliza $I - \mathbf{v}\mathbf{v}^T$ ortogonalmente, sendo

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

13. Use o resultado do Exercício 19 da Seção 5.1 para provar o Teorema 7.2.2*a* com matrizes 2×2 simétricas.

14. Existe alguma matriz 3×3 simétrica com autovalores $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 7$ e autovetores associados

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}?$$

Se existir, encontre tal matriz e, se não existir, explique por quê.

15. É verdadeira a recíproca do Teorema 7.2.2*b*? Explique.

16. Em cada parte, encontre a decomposição espectral da matriz.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$

17. Mostre que se A for uma matriz simétrica e ortogonal, então 1 e -1 são seus únicos autovalores possíveis.

18. (a) Encontre uma matriz 3×3 simétrica cujos autovalores sejam $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 7$ e os autovetores associados sejam $\mathbf{v}_1 = (0, 1, -1), \mathbf{v}_2 = (1, 0, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)$.

(b) Existe alguma matriz 3×3 simétrica com autovalores $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 7$ e autovetores associados $\mathbf{v}_1 = (0, 1, -1), \mathbf{v}_2 = (1, 0, 0), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$? Explique seu raciocínio.

19. Seja A uma matriz diagonalizável tal que autovetores associados a autovalores distintos sejam ortogonais. A será necessariamente simétrica? Explique seu raciocínio.

20. Prove: se $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ for uma base ortonormal de R^n e se A puder ser expressa como

$$A = \lambda_1 \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + \lambda_2\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T + \cdots + \lambda_n\mathbf{u}_n\mathbf{u}_n^T$$

então A é simétrica e tem autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

21. Neste exercício, estabelecemos que uma matriz A é ortogonalmente diagonalizável se, e só se, é simétrica. Já mostramos que uma matriz diagonalizável ortogonalmente é simétrica. A parte mais difícil é provar que uma matriz simétrica é diagonalizável ortogonalmente. Procedemos em duas etapas, mostrando primeiro que A é diagonalizável e depois, usando isso, mostrando que A é diagonalizável ortogonalmente.

(a) Suponha que A seja uma matriz $n \times n$ simétrica. Uma maneira de provar que A é diagonalizável é mostrar que a multiplicidade geométrica de qualquer autovalor λ_0 é igual à multiplicidade algébrica desse autovalor. Para isso, se a multiplicidade geométrica de λ_0 for k, tomamos uma base ortonormal $B_0 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ do autoespaço associado a λ_0, estendemos essa base a uma base orto-

normal $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de R^n e tomamos a matriz P cujas colunas são os vetores de B. Conforme mostramos no Exercício 34(b) da Seção 5.2, o produto AP pode ser escrito como

$$AP = P\begin{bmatrix} \lambda_0 I_k & X \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

Use o fato de que B é uma base ortonormal para provar que $X = 0$, a matriz nula de tamanho $n \times (n - k)$].

(b) Segue da parte (a) e do Exercício 34(c) da Seção 5.2 que o polinômio característico de A é igual ao de

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_0 I_k & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

Use esse fato e o Exercício 34(d) da Seção 5.2 para provar que a multiplicidade algébrica de λ_0 é igual à multiplicidade geométrica de λ_0. Isso estabelece que A é diagonalizável.

(c) Use o Teorema 7.2.2*b* e o fato de A ser diagonalizável para provar que A é ortogonalmente diagonalizável.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(g), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se A for uma matriz quadrada, então AA^T e A^TA serão ortogonalmente diagonalizáveis.

(b) Se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ forem autovetores de autoespaços distintos de uma matriz simétrica, então $\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2$.

(c) Qualquer matriz ortogonal é ortogonalmente diagonalizável.

(d) Se A for uma matriz ortogonalmente diagonalizável e também invertível, então A^{-1} é ortogonalmente diagonalizável.

(e) Qualquer autovalor de uma matriz ortogonal tem valor absoluto 1.

(f) Se A for uma matriz $n \times n$ ortogonalmente diagonalizável, então existe alguma base ortonormal de R^n formada de autovetores de A.

(g) Se A for ortogonalmente diagonalizável, então A tem autovalores reais.

7.3 Formas quadráticas

Nesta seção, utilizamos métodos matriciais para estudar funções reais de várias variáveis nas quais cada termo é o quadrado de alguma variável ou o produto de duas variáveis. Essas funções surgem em uma variedade de aplicações, que incluem as vibrações de sistemas mecânicos, bem como a Geometria, a Estatística e a Engenharia Elétrica.

Definição de uma forma quadrática

Expressões da forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

ocorreram no nosso estudo de equações e sistemas lineares. Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forem tratados como constantes fixadas, então essa expressão é uma função real das n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, denominada ***forma linear*** de R^n. Numa forma linear, todas as variáveis aparecem na primeira potência, e não há produtos de variáveis. Agora estudamos ***formas quadráticas*** de R^n, que são funções da forma

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2 + \text{(todos os termos } a_k x_i x_j \text{ possíveis nos quais } x_i \neq x_j)$$

Cada termo da forma $a_k x_i x_j$ é denominado ***termo com produto misto*** ou, às vezes, ***termo misto***. Para evitar duplicação, é costume combinar os termos com produto misto envolvendo $x_i x_j$ com os termos envolvendo $x_j x_i$ Assim, uma forma quadrática arbitrária de R^2 pode ser escrita como

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2a_3 x_1 x_2 \tag{1}$$

e uma forma quadrática arbitrária de R^3 como

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2a_4 x_1 x_2 + 2a_5 x_1 x_3 + 2a_6 x_2 x_3 \tag{2}$$

Se não fizermos alguma distinção entre o número a e a matriz 1×1 $[a]$, e se $\mathbf{x}$ denotar o vetor coluna das variáveis, então (1) e (2) podem ser dados em formato matricial como

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

(verifique). Observe que a matriz A nessas fórmulas é simétrica, suas entradas na diagonal são os coeficientes dos termos com quadrado, e suas entradas fora da diagonal são a metade dos coeficientes dos termos com produto misto. Em geral, se A for uma matriz $n \times n$ simétrica e $\mathbf{x}$ for o vetor coluna $n \times 1$ das variáveis, então dizemos que a função

$$Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} \tag{3}$$

é a ***forma quadrática associada a A***. Quando for conveniente, podemos escrever (3) na notação de produto como

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \tag{4}$$

No caso em que A for uma matriz diagonal, a forma quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ não tem termos com produto misto; por exemplo, se A tiver entradas diagonais $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, então

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

▶ EXEMPLO 1 Expressando formas quadráticas em notação matricial

Em cada parte, expresse a forma quadrática em notação matricial $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, sendo A simétrica.

(a) $2x^2 + 6xy - 5y^2$ (b) $x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_2$

Solução As entradas diagonais de A são os coeficientes dos termos com quadrado, e as entradas fora da diagonal são a metade dos coeficientes dos termos com produto misto, portanto,

$$2x^2 + 6xy - 5y^2 = [x \quad y] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3 = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$ ◀

Mudança de variáveis numa forma quadrática

Existem três tipos de problemas importantes que ocorrem nas aplicações de formas quadráticas.

Problema 1. Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^2 ou R^3, que tipo de curva ou superfície é representada pela equação $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = k$?

Problema 2. Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^n, que condições deve satisfazer A para garantir que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ tenha valores positivos com $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$?

Problema 3. Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^n, quais são seus valores máximo e mínimo se $\mathbf{x}$ for condicionado a satisfazer $\|\mathbf{x}\| = 1$?

Consideramos os dois primeiros problemas nesta seção e o terceiro na próxima seção.

Muitas das técnicas para resolver esses problemas têm por base a simplificação da forma quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ obtida com uma substituição

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y} \tag{5}$$

que expressa as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em termos das variáveis novas $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Se P for invertível, então (5) é denominada uma ***mudança de variáveis***, e se P for ortogonal, dizemos que (5) é uma ***mudança de variáveis ortogonal***.

Fazendo a mudança de coordenadas $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ na forma quadrática $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$, obtemos

$$\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = (P\,\mathbf{y})^TA(P\,\mathbf{y}) = \mathbf{y}^TP^TAP\mathbf{y} = \mathbf{y}^T(P^TAP)\mathbf{y} \tag{6}$$

Como a matriz $B = P^TAP$ é simétrica (verifique), o efeito da mudança de variáveis é produzir uma nova forma quadrática $\mathbf{y}^TB\mathbf{y}$ nas variáveis $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Em particular, se escolhermos P para diagonalizar A ortogonalmente, então a nova forma quadrática será $\mathbf{y}^TD\mathbf{y}$, onde D é uma matriz diagonal com os autovalores de A na diagonal principal, ou seja,

$$\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = \mathbf{y}^TD\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$
$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_1 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

Assim, temos o resultado seguinte, denominado ***teorema dos eixos principais***.

TEOREMA 7.3.1 Teorema dos eixos principais

Se A for uma matriz simétrica $n \times n$, então existe uma mudança de variáveis ortogonal que transforma a forma quadrática $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ na forma quadrática $\mathbf{y}^TD\mathbf{y}$ sem termos mistos. Especificamente, se P diagonaliza A ortogonalmente, então a mudança de variáveis $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ transforma a forma quadrática $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ na forma quadrática

$$\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = \mathbf{y}^TD\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

na qual $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de A associados aos autovetores que constituem as colunas sucessivas de P.

▶ EXEMPLO 2 Uma ilustração do teorema dos eixos principais

Encontre uma mudança de variáveis ortogonal que elimine os termos mistos da forma quadrática $Q = x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ e expresse Q em termos das novas variáveis.

Solução A forma quadrática pode ser expressa em notação matricial por

$$Q = \mathbf{x}^TA\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

A equação característica da matriz A é

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda = \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 3) = 0$$

de modo que os autovalores são $\lambda = 0, -3, 3$. Deixamos para o leitor mostrar que bases ortonormais dos três autoespaços são

$$\lambda = 0: \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \lambda = -3: \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \lambda = 3: \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Assim, a substituição $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ que elimina os termos mistos é

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Isso produz a nova forma quadrática

$$Q = \mathbf{y}^T(P^TAP)\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = -3y_2^2 + 3y_3^2$$

na qual não há termos mistos. ◀

Observação Se A for uma matriz simétrica $n \times n$, então a forma quadrática $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ é uma função real cuja imagem é o conjunto de todos os valores possíveis de $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$, com $\mathbf{x}$ variando em R^n. Pode ser mostrado que uma mudança de variáveis ortogonal $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ não altera a imagem de uma forma quadrática, ou seja, o conjunto de todos os valores de $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$, com $\mathbf{x}$ variando em R^n, é igual ao conjunto de todos valores de $\mathbf{y}^T(P^TAP)\mathbf{y}$, com $\mathbf{y}$ variando em R^n.

Formas quadráticas na geometria

Uma ***seção cônica*** ou, simplesmente, uma ***cônica***, é uma curva obtida cortando-se um cone circular reto por um plano (Figura 7.3.1). As seções cônicas mais importantes são as elipses, as hipérboles e as parábolas, que ocorrem quando o plano cortante não passa pelo vértice do cone. Os círculos são casos especiais de elipses, que resultam quando o plano cortante é perpendicular ao eixo de simetria do cone. Se o plano cortante passa pelo vértice, então a interseção resultante é denominada uma ***cônica degenerada***, cujas possibilidades são um ponto, um par de retas que se cortam ou uma única reta.

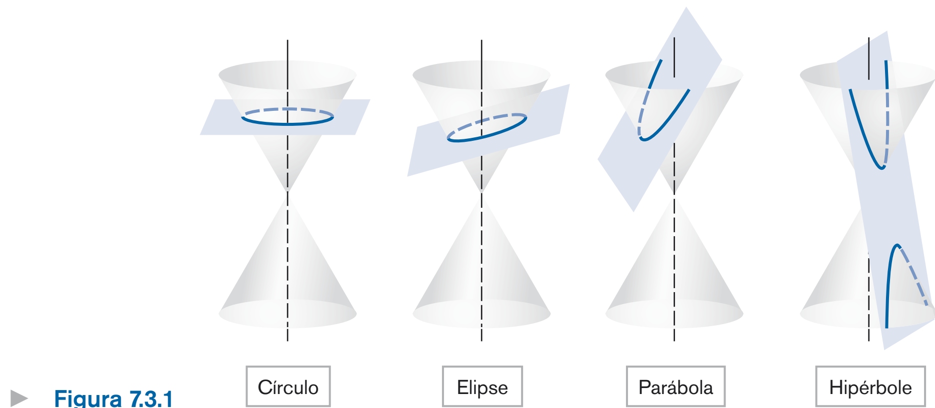


Figura 7.3.1

As formas quadráticas em R^2 surgem naturalmente no estudo de seções cônicas. Por exemplo, mostra-se em Geometria Analítica que uma equação da forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{7}$$

com a, b e c não todos nulos, representa uma seção cônica.‡ Se $d = e = 0$ em (7), então não existem termos lineares, e a equação se reduz a

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0 \tag{8}$$

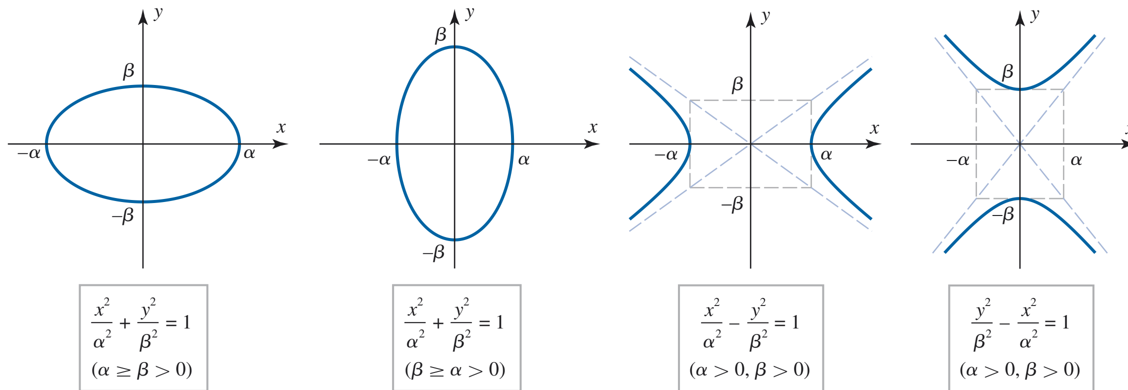
‡ Sempre existe a possibilidade de não haver valores reais de x e y que satisfaçam a equação, por exemplo, $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Nesses casos, dizemos que a equação ***não tem gráfico*** ou, então, que tem um ***gráfico vazio***.

denominada ***cônica central*** ou ***reduzida***. Essas cônicas incluem os círculos, as elipses e as hipérboles, mas não as parábolas. Além disso, se $b = 0$ em (8), não há termos mistos, e dizemos que a equação

$$ax^2 + cy^2 + f = 0 \tag{9}$$

representa uma ***cônica central em posição canônica***. As cônicas mais importantes desse tipo aparecem na Tabela 1.

Tabela 1

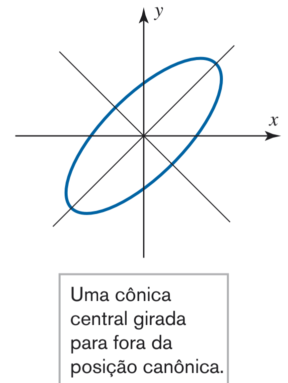


Passando a constante f nas Equações (8) e (9) para o lado direito e tomando $k = -f$, podemos reescrever essas equações em formato matricial como

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \tag{10}$$

A primeira dessas corresponde à Equação (8), em que há o termo misto $2bxy$, e a segunda corresponde à Equação (9), em que não há termo misto. Geometricamente, a existência de um termo misto indica que o gráfico da forma quadrática foi girado em torno da origem, como na Figura 7.3.2. Os análogos tridimensionais das equações em (10) são

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = k \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = k \tag{11}$$



Uma cônica central girada para fora da posição canônica.

▲ **Figura 7.3.2**

Se a, b e c não forem todos nulos, então os gráficos dessas equações em R^3 são denominados ***quádricas centrais***, ou ***reduzidas***, e, mais especificamente, o gráfico da segunda equação é denominado ***quádrica central em posição canônica***.

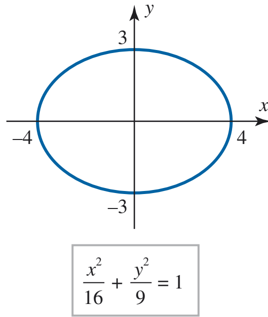
Identificando seções cônicas

Agora estamos prontos para considerar o primeiro dos três problemas apresentados anteriormente, o de identificar a curva ou superfície representada por uma equação $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = k$ em duas ou três variáveis. Vamos nos ocupar com o caso bidimensional. Já observamos que uma equação da forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0 \tag{12}$$

representa uma cônica central. Se $b = 0$, então a cônica está em posição canônica e se $b \neq 0$, ela está girada. É fácil identificar as cônicas centrais em posição canônica comparando sua equação com uma das equações em forma canônica. Por exemplo, a equação

$$9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$$



▲ **Figura 7.3.3**

pode ser reescrita como

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

que, por comparação com a Tabela 1, é a elipse mostrada na Figura 7.3.3.

Se uma cônica central for girada para fora de sua posição canônica, podemos identificá-la primeiro girando os eixos coordenados para colocá-la na posição canônica e então comparando sua equação com uma das equações em forma canônica da Tabela 1. Para encontrar uma rotação que elimine o termo misto da equação

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = k \tag{13}$$

é conveniente expressar a equação em forma matricial como

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = [x \quad y]\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \tag{14}$$

e procurar uma mudança de variáveis

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$$

que diagonalize A e tal que $\det(P) = 1$. Como no Exemplo 4 da Seção 7.1 vimos que a matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{15}$$

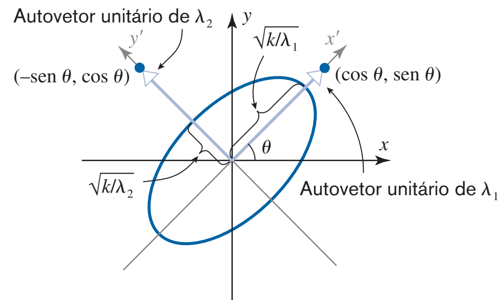
tem o efeito de girar os eixos xy de um sistema de coordenadas retangulares pelo ângulo θ, nosso problema se reduz a encontrar θ que diagonalize A, com o que eliminamos o termo misto em (13). Fazendo essa mudança de variáveis, resulta que a Equação (14) no sistema de coordenadas $x'y'$ é dada por

$$\mathbf{x}'^T D\mathbf{x}' = [x' \quad y']\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = k \tag{16}$$

onde λ_1 e λ_2 são os autovalores de A. A cônica pode agora ser identificada escrevendo (16) na forma

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = k \tag{17}$$

e efetuando a álgebra necessária para igualá-la a uma das formas canônicas da Tabela 1. Por exemplo, se λ_1, λ_2, e k forem positivos, então (17) representa uma elipse de eixos medindo $2\sqrt{k/\lambda_1}$ na direção x' e $2\sqrt{k/\lambda_2}$ na direção y'. O primeiro vetor coluna de P, que é um autovetor unitário associado a λ_1, está ao longo do eixo x' positivo, e o segundo vetor coluna de P, que é um autovetor unitário associado a λ_2, está ao longo do eixo y' positivo. Esses são os ***eixos principais*** da elipse, o que explica por que o Teorema 7.3.1 é denominado "teorema dos eixos principais". (Ver Figura 7.3.4.)



▶ **Figura 7.3.4**

▶ EXEMPLO 3 Identificando uma cônica por eliminação do termo misto

(a) Identifique a cônica de equação $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ girando os eixos xy até colocar a cônica em posição canônica.

(b) Encontre o ângulo θ pelo qual foram girados os eixos xy na parte (a).

Solução (a) A equação dada pode ser escrita no formato matricial como

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 36$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de A é

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

portanto, os autovalores são $\lambda = 4$ e $\lambda = 9$. Deixamos para o leitor mostrar que bases ortonormais dos autoespaços são

$$\lambda = 4: \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad \lambda = 9: \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Assim, A é ortogonalmente diagonalizável por

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Além disso, por acaso temos $\det(P) = 1$, de modo que sabemos que a substituição $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ executa uma rotação de eixos. Segue de (16) que a equação da cônica no sistema de coordenadas $x'y'$ é

Se tivéssemos tido $\det(P) = -1$, então trocaríamos as colunas para inverter o sinal.

$$[x' \quad y'] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 36$$

que pode ser escrita como

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36 \quad \text{ou} \quad \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

Agora vemos da Tabela 1 que a cônica é uma elipse cujo eixo tem comprimento $2\alpha = 6$ na direção x' e comprimento $2\beta = 4$ na direção y'.

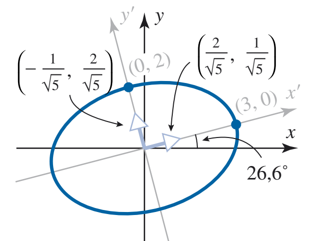
Solução (b) Segue de (15) que

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

o que implica

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2}$$

Assim, $\theta = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \approx 26{,}6°$ (Figura 7.3.5). ◀



▲ **Figura 7.3.5**

Observação Nos exercícios, pedimos ao leitor mostrar que, se $b \neq 0$, então o termo misto da equação

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = k$$

pode ser eliminado por uma rotação de ângulo θ que satisfaça

$$\operatorname{cotg} 2\theta = \frac{a-c}{2b} \tag{19}$$

Deixamos para o leitor confirmar que isso é consistente com a parte (b) do exemplo anterior.

Formas quadráticas positivas

Consideramos, agora, o segundo dos três problemas colocados anteriormente, o de determinar as condições sob as quais $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$, quaisquer que sejam os vetores não nulos $\mathbf{x}$. Em breve, explicamos por que isso seria importante, mas antes vamos apresentar alguma terminologia.

A terminologia na Definição 1 também é aplicada a matrizes, ou seja, dizemos que uma matriz simétrica é positiva, negativa ou indefinida se a forma quadrática associada a essa matriz tiver essa propriedade.

DEFINIÇÃO 1 Dizemos que uma forma quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é

positiva se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ com qualquer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

negativa se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$ com qualquer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

indefinida se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ tem valores tanto positivos quanto negativos

O próximo teorema, cuja prova é adiada para o final desta seção, fornece uma maneira de usar os autovalores para determinar se uma matriz A e sua forma quadrática associada são positivas, negativas ou indefinidas.

TEOREMA 7.3.2 *Seja A uma matriz simétrica. Valem as afirmações.*

(a) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ *é positiva se, e só se, todos os autovalores de A são positivos.*

(b) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ *é negativa se, e só se, todos os autovalores de A são negativos.*

(c) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ *é indefinida se, e só se, A tem pelo menos um autovalor positivo e pelo menos um autovalor negativo.*

Observação As três classificações na Definição 1 não cobrem todas as possibilidades. Por exemplo, uma forma quadrática para a qual $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$ se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ é denominada ***não negativa***, e uma para a qual $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq 0$ se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ é ***não positiva***. Cada forma positiva é não negativa, mas não reciprocamente, e cada forma negativa é não positiva, mas não reciprocamente (por quê?). Ajustando apropriadamente a prova do Teorema 7.3.2, podemos provar que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é não negativa se, e só se, todos os autovalores de A são não negativos e que é não positiva se, e só se, todos os autovalores de A são não positivos.

▶ EXEMPLO 4 Formas quadráticas positivas

Em geral, não é possível detectar a classificação de uma matriz simétrica A apenas a partir do sinal de suas entradas. Por exemplo, as entradas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

são todas não negativas, mas a matriz é indefinida, pois seus autovalores são $\lambda = 1, 4, -2$ (verifique). Para ver isso de uma outra maneira, escrevamos a forma quadrática como

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3x_1^2 + 2x_1x_2\ 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

Matrizes positivas e negativas são invertíveis. Por quê?

Agora podemos ver, por exemplo, que

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 4 \quad \text{com} \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$$

e que

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = -4 \quad \text{com} \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1 \quad ◀$$

Classificação de seções cônicas usando autovalores

Se $\mathbf{x}^T B\mathbf{x} = k$ for a equação de uma cônica e se $k \neq 0$, podemos dividir tudo por k e reescrever a equação na forma

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1 \tag{20}$$

onde $A = (1/k)B$. Girando, agora, os eixos coordenados para eliminar o termo misto (se houver) dessa equação, então a equação da cônica no novo sistema de coordenadas será da forma

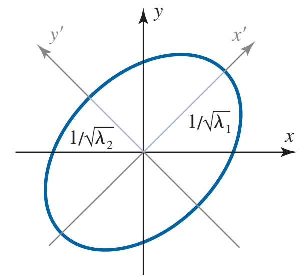
$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 1 \tag{21}$$

na qual λ_1 e λ_2 são os autovalores de A. O tipo de cônica representado por essa equação dependerá dos sinais dos autovalores λ_1 e λ_2. Por exemplo, não é difícil ver a partir de (21) que

- $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$representa uma elipse se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$.
- $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$ não tem gráfico se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$.
- $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$ representa uma hipérbole se λ_1 e λ_2 têm sinais opostos.

No caso da elipse, a Equação (21) pode ser reescrita como

$$\frac{x'^2}{(1/\sqrt{\lambda_1})^2} + \frac{y'^2}{(1/\sqrt{\lambda_2})^2} = 1 \tag{22}$$



▲ **Figura 7.3.6**

de modo que os eixos da elipse têm comprimentos $2/\sqrt{\lambda_1}$ e $2/\sqrt{\lambda_2}$ (Figura 7.3.6).

O próximo teorema é uma consequência imediata dessa discussão e do Teorema 7.3.2.

TEOREMA 7.3.3 *Seja A uma matriz* 2×2 *simétrica. Valem as afirmações.*

(*a*) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$ *representa uma elipse se A for positiva.*

(*b*) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$ *não tem gráfico se A for negativa.*

(*c*) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$ *representa uma hipérbole se A for indefinida.*

No Exemplo 3, efetuamos uma rotação para mostrar que a equação

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$$

representa uma elipse com um eixo maior de comprimento 6 e eixo menor de comprimento 4. Essa conclusão também pode ser obtida reescrevendo a equação na forma

$$\tfrac{5}{36}x^2 - \tfrac{1}{9}xy + \tfrac{2}{9}y^2 = 1$$

e mostrando que a matriz associada

$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{36} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

tem autovalores $\lambda_1 = \frac{1}{9}$ e $\lambda_2 = \frac{1}{4}$. Esses autovalores são positivos, de modo que a matriz A é positiva e a equação representa uma elipse. Além disso, segue de (21) que os eixos da elipse têm comprimentos $2/\sqrt{\lambda_1} = 6$ e $2/\sqrt{\lambda_2} = 4$, o que é consistente com o Exemplo 3.

Identificando matrizes positivas

Matrizes positivas são as matrizes simétricas mais importantes nas aplicações, portanto, é útil aprender um pouco mais sobre elas. Já sabemos que uma matriz simétrica é positiva se, e só se, seus autovalores são todos positivos. Vejamos, agora, um critério que pode ser usado para descobrir se uma matriz simétrica é positiva *sem precisar* encontrar os autovalores. Para isso, definimos a ***k-ésima submatriz principal*** de uma matriz A de tamanho $n \times n$ como a submatriz $k \times k$ consistindo nas primeiras k linhas e colunas de A. Por exemplo, as submatrizes principais de uma matriz 4×4 arbitrária são as seguintes.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Primeira submatriz principal | Segunda submatriz principal | Terceira submatriz principal | Quarta submatriz principal $= A$

O próximo teorema, que enunciamos sem prova, fornece um teste para determinar se uma matriz simétrica é positiva.

TEOREMA 7.3.4 *Uma matriz simétrica A é positiva se, e só se, o determinante de cada submatriz principal é positivo.*

▶ EXEMPLO 5 Trabalhando com submatrizes principais

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

é positiva, pois os determinantes

$$|2| = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

são todos positivos. Assim, podemos ter certeza de que todos autovalores de A são positivos e que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ com $\mathbf{x} \neq 0$. ◀

OPCIONAL

Concluímos esta seção com uma prova opcional do Teorema 7.3.2.

Prova do Teorema 7.3.2(a) e (b) Segue do teorema dos eixos principais (Teorema 7.3.1) que existe uma mudança de variáveis ortogonal $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ com a qual

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \tag{23}$$

onde os λ são os autovalores de A. Além disso, segue da invertibilidade de P que $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ se, e só se, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, de modo que os valores de $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ com $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ são os mesmos que os valores de $\mathbf{y}^T D\mathbf{y}$ com $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Assim, segue de (23) que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ com $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ se, e só se, todos os coeficientes λ naquela equação são positivos e que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$ com $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ se, e só se, todos os λ são negativos. Isso prova as partes (*a*) e (*b*).

Prova (c) Suponha que A tenha pelo menos um autovalor positivo e pelo menos um autovalor negativo e, para sermos específicos, suponha que $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ em (23). Então

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0 \quad \text{se} \quad y_1 = 1 \text{ e todos os demais } y \text{ são iguais a } 0$$

e

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0 \quad \text{se} \quad y_2 = 0 \text{ e todos os demais } y \text{ são iguais a } 0$$

o que prova que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é indefinida. Reciprocamente, se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ com algum $\mathbf{x}$, então $\mathbf{y}^T D\mathbf{y} > 0$ com algum $\mathbf{y}$, de modo que pelo menos um dos λ em (23) deve ser positivo. Analogamente, se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$ com algum $\mathbf{x}$, então $\mathbf{y}^T D\mathbf{y} < 0$ com algum $\mathbf{y}$, de modo que pelo menos um dos λ em (23) deve ser negativo, o que completa a prova. ◀

Revisão de conceitos

- Forma linear
- Forma quadrática
- Termo misto
- Forma quadrática associada a uma matriz
- Mudança de variáveis
- Mudança de variáveis ortogonal
- Teorema dos eixos principais
- Seção cônica
- Cônica degenerada
- Cônica central, ou reduzida
- Posição canônica de uma cônica central
- Forma canônica de uma cônica central
- Quádrica central
- Eixos principais de uma elipse
- Forma quadrática positiva
- Forma quadrática negativa
- Forma quadrática indefinida
- Forma quadrática não negativa
- Forma quadrática não positiva
- Submatriz principal

Aptidões desenvolvidas

- Expressar uma forma quadrática em notação matricial $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, em que A é simétrica.
- Encontrar uma mudança de variáveis ortogonal que elimine os termos mistos de uma forma quadrática e expressar a forma quadrática em termos das novas variáveis.
- Identificar uma seção cônica a partir de uma equação girando os eixos para colocar a cônica em posição canônica e encontrar o ângulo de rotação.
- Identificar uma seção cônica usando autovalores.
- Classificar matrizes simétricas e formas quadráticas como positivas, negativas, indefinidas, não negativas ou não positivas.

Conjunto de exercícios 7.3

▶ Nos Exercícios **1–2**, em cada parte, expresse a forma quadrática na notação matricial $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ com uma matriz simétrica A. ◀

1. (a) $3x_1^2 + 7x_2^2$ (b) $4x_1^2 - 9x_2^2 - 6x_1x_2$

(c) $9x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + x_2x_3$

2. (a) $5x_1^2 + 5x_1x_2$ (b) $-7x_1x_2$

(c) $x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 5x_1x_2 + 9x_1x_3$

▶ Nos Exercícios **3–4**, encontre uma fórmula para a forma quadrática que não utilize matrizes. ◀

3. $[x \quad y]\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

4. $[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} -2 & \frac{7}{2} & 1 \\ \frac{7}{2} & 0 & 6 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **5–8**, encontre uma mudança de variáveis ortogonal que elimine os termos mistos da forma quadrática Q e expresse Q em termos das novas variáveis. ◀

5. $Q = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$

6. $Q = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2$

7. $Q = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

8. $Q = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

▶ Nos Exercícios **9–10**, escreva a equação quadrática na notação matricial $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + f = 0$, onde $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é a forma quadrática associada e K é uma matriz apropriada. ◀

9. (a) $2x^2 + xy + x - 6y + 2 = 0$

(b) $y^2 + 7x - 8y - 5 = 0$

10. (a) $x^2 - xy + 5x + 8y - 3 = 0$

(b) $5xy = 8$

▶ Nos Exercícios **11–12**, identifique o tipo de cônica representada pela equação. ◀

11. (a) $2x^2 + 5y^2 = 20$ (b) $x^2 - y^2 - 8 = 0$

(c) $7y^2 - 2x = 0$ (d) $x^2 + y^2 - 25 = 0$

12. (a) $4x^2 + 9y^2 = 1$ (b) $4x^2 - 5y^2 = 20$

(c) $-x^2 = 2y$ (d) $x^2 - 3 = -y^2$

▶ Nos Exercícios **13–16**, identifique o tipo de cônica representada pela equação girando os eixos para colocar a cônica em posição canônica. Encontre a equação da cônica no sistema de coordenadas girado e determine o ângulo de rotação. ◀

13. $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$ **14.** $5x^2 + 4xy + 5y^2 = 9$

15. $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0$

16. $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}$

▶ Nos Exercícios **17–18**, determine, sem fazer contas, se a matriz é positiva, negativa, indefinida, não negativa ou não positiva. ◀

17. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

18. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **19–24**, classifique a forma quadrática como positiva, negativa, indefinida, não negativa ou não positiva. ◀

19. $x_1^2 + x_2^2$ **20.** $-x_1^2 - 3x_2^2$ **21.** $(x_1 - x_2)^2$

22. $-(x_1 - x_2)^2$ **23.** $x_1^2 - x_2^2$ **24.** x_1x_2

▶ Nos Exercícios **25–26**, mostre que a matriz A é positiva usando primeiro o Teorema 7.3.2 e depois o Teorema 7.3.4. ◀

25. (a) $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

26. (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **27–28**, encontre todos valores de k com os quais a forma quadrática é positiva. ◀

27. $5x_1^2 + x_2^2 + kx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

28. $3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_3 + 2kx_2x_3$

29. Seja $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ uma forma quadrática nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e defina $T: R^n \to R$ por $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$.

(a) Mostre que $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + 2\mathbf{x}^TA\mathbf{y} + T(\mathbf{y})$.

(b) Mostre que $T(c\mathbf{x}) = c^2T(\mathbf{x})$.

30. Expresse a forma quadrática $(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n)^2$ na notação matricial $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$, com A simétrica.

31. Na Estatística, as quantidades

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

e

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\left[(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2\right]$$

são denominadas, respectivamente, a ***média amostral*** e a ***variância amostral*** de $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

(a) Expresse a forma quadrática s_x^2 na notação matricial $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$, com A simétrica.

(b) s_x^2 será uma forma quadrática positiva? Explique.

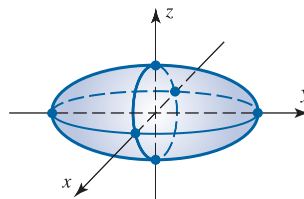
32. Num sistema de coordenadas xyz, o gráfico de uma equação do tipo $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, em que a, b e c são positivos, é uma superfície denominada ***elipsoide central em posição canônica*** (ver a figura dada). Isso é a generalização tridimensional da elipse $ax^2 + by^2 = 1$ do plano xy. As interseções do elipsoide $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ com os eixos coordenados determinam três segmentos de reta denominados ***eixos*** do elipsoide. Se um elipsoide central for girado em torno da origem de tal modo que dois ou mais de seus eixos não coincidam com os eixos coordenados, então a equação resultante terá um ou dois termos mistos.

(a) Mostre que a equação

$$\tfrac{4}{3}x^2 + \tfrac{4}{3}y^2 + \tfrac{4}{3}z^2 + \tfrac{4}{3}xy + \tfrac{4}{3}xz + \tfrac{4}{3}yz = 1$$

representa um elipsoide e encontre os comprimentos de seus eixos. [*Sugestão*: escreva a equação no formato $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = 1$ e efetue uma mudança de variáveis ortogonal para eliminar o termo misto.]

(b) Qual propriedade deve ter uma matriz simétrica 3×3 para que a equação $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = 1$ represente um elipsoide?



◀ **Figura Ex-32**

33. Qual propriedade deve ser satisfeita por uma matriz simétrica A de tamanho 2×2 para que $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = 1$ represente um círculo?

34. Prove: se $b \neq 0$, então o termo misto pode ser eliminado da forma quadrática $ax^2 + 2bxy + cy^2$ pela rotação dos eixos coordenados pelo ângulo θ que satisfaz a equação

$$\text{cotg } 2\theta = \frac{a - c}{2b}$$

35. Prove que se A for uma matriz $n \times n$ simétrica com todos os seus autovalores não negativos, então $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} \geq 0$, com qualquer $\mathbf{x}$ não nulo em R^n.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(l), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Uma matriz simétrica com autovalores positivos é positiva.

(b) $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2x_3$ é uma forma quadrática.

(c) $(x_1 - 3x_2)^2$ é uma forma quadrática.

(d) Uma matriz positiva é invertível.

(e) Uma matriz simétrica é positiva, negativa ou indefinida.

(f) Se A for positiva, então $-A$ será negativa.

(g) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ é uma forma quadrática, qualquer que seja $\mathbf{x}$ em R^n.

(h) Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática positiva, então $\mathbf{x}^T A^{-1}\mathbf{x}$ também é.

(i) Se A for uma matriz que só tem autovalores positivos, então $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é uma forma quadrática positiva.

(j) Se A for uma matriz 2×2 simétrica com entradas positivas e $\det(A) > 0$, então A é positiva.

(k) Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática sem termos mistos, então A é uma matriz diagonal.

(l) Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática positiva em duas variáveis e $c \neq 0$, então o gráfico da equação $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = c$ é uma elipse.

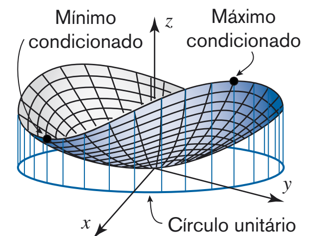
7.4 Otimização usando formas quadráticas

As formas quadráticas surgem numa variedade de problemas nos quais se exige encontrar o valor máximo ou mínimo de alguma quantidade. Nesta seção, discutiremos alguns problemas desse tipo.

Problemas de extremos condicionados

Nosso primeiro objetivo nesta seção é considerar o problema de encontrar os valores máximo e mínimo de uma forma quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ sujeita à condição $\|\mathbf{x}\| = 1$. Problemas desse tipo surgem numa ampla variedade de aplicações.

Para visualizar esse problema geometricamente no caso em que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é uma forma quadrática de R^2, vemos $z = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ como a equação de alguma superfície num sistema de coordenadas retangulares xyz e $\|\mathbf{x}\| = 1$ como o círculo unitário centrado na origem do plano xy. Geometricamente, o problema de encontrar os valores máximo e mínimo de $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ sujeita à condição $\|\mathbf{x}\| = 1$ equivale a encontrar o ponto mais alto e o mais baixo na interseção da superfície com o cilindro circular reto determinado pelo círculo (Figura 7.4.1).



▲ **Figura 7.4.1**

O próximo teorema, cuja prova é deixada para o final desta seção, é o resultado crucial para resolver esse tipo de problemas.

TEOREMA 7.4.1 Teorema dos extremos condicionados

Seja A uma matriz simétrica $n \times n$ cujos autovalores em ordem decrescente de tamanho são $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Então

(a) *a forma quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ atinge um valor máximo e um valor mínimo no conjunto de vetores tais que $\|\mathbf{x}\| = 1$;*

(b) *o valor máximo atingido na parte (a) ocorre num autovetor unitário associado ao autovalor λ_1;*

(c) *o valor mínimo atingido na parte (a) ocorre num autovetor unitário associado ao autovalor λ_n.*

Observação A condição $\|\mathbf{x}\| = 1$ nesse teorema é denominada uma ***restrição*** ou uma ***condição*** ou, ainda, um ***vínculo***, e o valor máximo ou mínimo de $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ sujeita à restrição é um ***extremo condicionado***. Essa restrição também pode ser expressa por $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$ ou por $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, quando for conveniente.

► EXEMPLO 1 Encontrando extremos condicionados

Encontre os valores máximo e mínimo da forma quadrática

$$z = 5x^2 + 5y^2 + 4xy$$

sujeita à condição $x^2 + y^2 = 1$.

Solução A forma quadrática pode ser expressa em notação matricial por

$$z = 5x^2 + 5y^2 + 4xy = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = [x \quad y]\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Deixamos para o leitor mostrar que os autovalores de A são $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = 3$ e que os autovetores associados são

$$\lambda_1 = 7: \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 3: \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalizando esses autovetores, obtemos

$$\lambda_1 = 7: \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 3: \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Assim, os extremos condicionados são

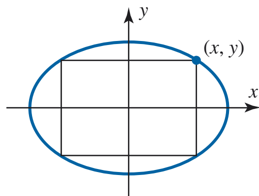
$$\text{máximo condicionado: } z = 7 \text{ em } (x, y) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{mínimo condicionado: } z = 3 \text{ em } (x, y) = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$$ ◄

Observação Como os negativos dos autovetores em (1) também são autovetores unitários, eles também fornecem os valores máximo e mínimo de z, ou seja, o máximo condicionado $z = 7$ também ocorre no ponto $(x, y) = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e o mínimo condicionado $z = 3$ também ocorre no ponto $(x, y) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

► EXEMPLO 2 Um problema de extremos condicionados

Queremos inscrever um retângulo na elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$, conforme a Figura 7.4.2. Use métodos de autovalores para encontrar valores não negativos de x e y que forneçam o retângulo inscrito de área máxima.



▲ **Figura 7.4.2** Um retângulo inscrito na elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Solução A área z do retângulo inscrito é dada por $z = 4xy$, de modo que o problema é maximizar a forma quadrática $z = 4xy$ sujeita à restrição $4x^2 + 9y^2 = 36$. Nesse problema, o gráfico da equação restrita é uma elipse em vez de ser o círculo unitário exigido pelo Teorema 7.4.1, mas isso pode ser remediado reescrevendo a restrição como

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

e definindo novas variáveis x_1 e x_2 pelas equações

$$x = 3x_1 \quad \text{e} \quad y = 2y_1$$

Isso nos permite reformular o problema como segue:

$$\text{maximizar } z = 4xy = 24x_1 y_1$$

sujeita à restrição

$$x_1^2 + y_1^2 = 1$$

Para resolver esse problema, escrevemos a forma quadrática $z = 24x_1 y_1$ como

$$z = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = [x_1 \quad y_1]\begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Agora deixamos para o leitor mostrar que o maior autovalor de A é $\lambda = 12$ e que o único autovetor associado com entradas não negativas é

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Assim, a área máxima é $z = 12$, que ocorre com

$$x = 3x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad y = 2y_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} \quad ◀$$

Extremos condicionados e curvas de nível

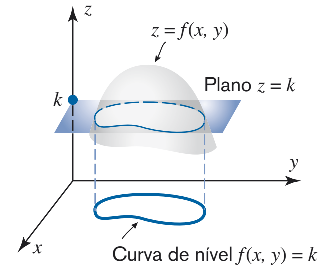
Uma maneira útil de visualizar o comportamento de uma função $f(x, y)$ de duas variáveis é considerar as curvas no plano xy ao longo das quais f é constante. Essas curvas têm equações da forma

$$f(x, y) = k$$

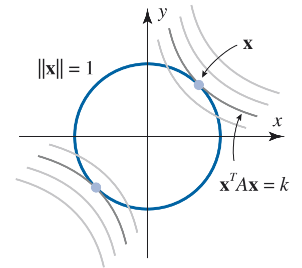
e são denominadas ***curvas de nível*** de f (Figura 7.4.3). Em particular, as curvas de nível de uma forma quadrática $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ de R^2 têm equações da forma

$$\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = k \tag{2}$$

de modo que os valores máximo e mínimo de $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ sujeita à restrição $\|\mathbf{x}\| = 1$ são os maiores e menores valores de k com os quais o gráfico de (2) intersecta o círculo unitário. Tipicamente, tais valores de k produzem curvas de nível que apenas tocam o círculo unitário (Figura 7.4.4), e os pontos nos quais essas curvas de nível apenas tocam o círculo produzem os vetores que maximizam e minimizam $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ sujeita à restrição $\|\mathbf{x}\| = 1$.



▲ **Figura 7.4.3**



▲ **Figura 7.4.4**

▶ EXEMPLO 3 De novo o Exemplo 1 usando curvas de nível

No Exemplo 1 (e na observação subsequente), encontramos os valores máximo e mínimo da forma quadrática

$$z = 5x^2 + 5y^2 + 4xy$$

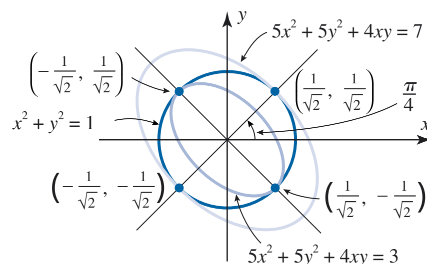
sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 1$. Mostramos que o máximo condicionado $z = 7$ ocorre nos pontos

$$(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{e} \quad (x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{3}$$

e que o mínimo condicionado $z = 3$ ocorre nos pontos

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{e} \quad (x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{4}$$

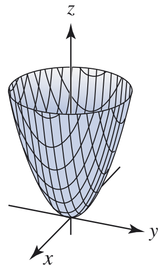
Geometricamente, isso significa que a curva de nível $5x^2 + 5y^2 + 4xy = 7$ deveria apenas tocar o círculo unitário nos pontos em (3) e que a curva de nível $5x^2 + 5y^2 + 4xy = 3$ deveria apenas tocar o círculo unitário nos pontos em (4). Isso tudo é consistente com a Figura 7.4.5. ◀



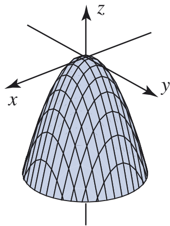
▶ **Figura 7.4.5**

REQUER CÁLCULO

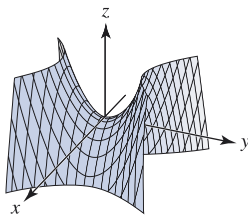
Extremos relativos de funções de duas variáveis



(*a*)



(*b*)



(*c*)

▲ **Figura 7.4.6**

Concluímos esta seção mostrando como as formas quadráticas podem ser usadas para estudar características de funções reais de duas variáveis reais.

No Cálculo, vê-se que se uma função $f(x, y)$ tem derivadas parciais de primeira ordem, então os máximos e mínimos relativos dessa função, se houver, ocorrem em pontos nos quais

$$f_x(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = 0$$

Tais pontos são denominados ***pontos críticos*** de f. O comportamento específico de f num ponto crítico (x_0, y_0) é determinado pelo sinal de

$$D(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) \tag{5}$$

nos pontos (x, y) que estão próximos, mas são distintos, de (x_0, y_0).

- Se $D(x, y) > 0$ nos pontos (x, y) que estão suficientemente próximos, mas são distintos de (x_0, y_0), então $f(x_0, y_0) < f(x,y)$ nesses pontos, e dizemos que f tem um ***mínimo relativo*** em (x_0, y_0) (Figura 7.4.6*a*).
- Se $D(x, y)$ nos pontos (x, y) que estão suficientemente próximos, mas são distintos de (x_0, y_0), então $f(x_0, y_0) > f(x,y)$ nesses pontos, e dizemos que f tem um ***máximo relativo*** em (x_0, y_0) (Figura 7.4.6*b*).
- Se $D(x, y)$ tem valores tanto positivos quanto negativos dentro de *qualquer* círculo centrado em (x_0, y_0), então existem pontos (x, y) arbitrariamente próximos de (x_0, y_0) nos quais $f(x_0, y_0) < f(x,y)$ e pontos (x, y) arbitrariamente próximos de (x_0, y_0) nos quais $f(x_0, y_0) > f(x,y)$. Nesse caso, dizemos que f tem um ***ponto de sela*** em (x_0, y_0) (Figura 7.4.6*c*).

Em geral, pode ser difícil determinar diretamente o sinal de (5). Contudo, o próximo teorema, que é provado em Cálculo, torna possível analisar os pontos críticos usando somente derivadas.

TEOREMA 7.4.2 Teste da derivada segunda

Suponha que (x_0, y_0) seja um ponto crítico de uma função $f(x, y)$ com derivadas parciais de segunda ordem contínuas em alguma região circular centrada em (x_0, y_0). Então:

(*a*) *f tem um mínimo relativo em (x_0, y_0) se*

$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f^2_{xy}(x_0, y_0) > 0 \quad \text{e} \quad f_{xx}(x_0, y_0) > 0$$

(*b*) *f tem um máximo relativo em (x_0, y_0) se*

$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f^2_{xy}(x_0, y_0) > 0 \quad \text{e} \quad f_{xx}(x_0, y_0) < 0$$

(*c*) *f tem um ponto de sela em (x_0, y_0) se*

$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f^2_{xy}(x_0, y_0) < 0$$

(*d*) *O teste é inconclusivo se*

$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f^2_{xy}(x_0, y_0) = 0$$

Nosso interesse aqui é mostrar como reformular esse teorema usando propriedades de matrizes simétricas. Para isso, consideremos a matriz simétrica

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

que é denominada ***matriz hessiana*** ou, simplesmente, a ***hessiana*** de f no ponto em questão, em homenagem ao matemático e cientista alemão Ludwig Otto Hesse (1811–1874).

A notação $H(x, y)$ enfatiza que as entradas da matriz dependem de x e y. Temos interesse na hessiana porque

$$\det[H(x_0, y_0)] = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$$

é a expressão que aparece no Teorema 7.4.2. Agora podemos reformular o teste da derivada segunda como segue.

TEOREMA 7.4.3 Forma hessiana do teste da derivada segunda

Suponha que (x_0, y_0) seja um ponto crítico de uma função $f(x, y)$ com derivadas parciais de segunda ordem contínuas em alguma região circular centrada em (x_0, y_0). Se $H(x_0, y_0)$ for a hessiana de f em (x_0, y_0), então:

(*a*) *f tem um mínimo relativo em (x_0, y_0) se $H(x_0, y_0)$ for uma matriz positiva.*

(*b*) *f tem um máximo relativo em (x_0, y_0) se $H(x_0, y_0)$ for uma matriz negativa.*

(*c*) *f tem um ponto de sela em (x_0, y_0) se $H(x_0, y_0)$ for uma matriz indefinida.*

(*d*) *O teste é inconclusivo nos demais casos.*

Provamos a parte (*a*), deixando a prova das demais partes como exercício.

Prova (a) Se $H(x_0, y_0)$ for uma matriz positiva, então o Teorema 7.3.4 implica que as submatrizes principais de $H(x_0, y_0)$ têm determinantes positivos. Assim,

$$\det[H(x_0, y_0)] = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$$

e

$$\det[f_{xx}(x_0, y_0)] = f_{xx}(x_0, y_0) > 0$$

de modo que f tem um mínimo relativo em (x_0, y_0) pela parte (*a*) do Teorema 7.4.2. ◀

▶ EXEMPLO 4 Usando a hessiana para classificar extremos relativos

Encontre os pontos críticos da função

$$f(x, y) = \tfrac{1}{3}x^3 + xy^2 - 8xy + 3$$

e use os autovalores da matriz hessiana nesses pontos para determinar quais desses pontos, se houver algum, são máximos relativos, mínimos relativos ou pontos de sela.

Solução Para encontrar tanto os pontos críticos quanto a matriz hessiana, precisamos calcular as derivas parciais de primeira e segunda ordem de f. Essas derivadas são

$$\begin{aligned} &f_x(x, y) = x^2 + y^2 - 8y, \quad && f_x(x, y) = 2xy - 8x, \quad && f_{xy}(x, y) = 2y - 8 \\ &f_{xx}(x, y) = 2x, && f_{yy}(x, y) = 2x && \end{aligned}$$

Assim, a matriz hessiana é

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y - 8 \\ 2y - 8 & 2x \end{bmatrix}$$

Para encontrar os pontos críticos, igualamos f_x e f_y a zero. Isso fornece as equações

$$f_x(x, y) = x^2 + y^2 - 8y = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = 2xy - 8x = 2x(y - 4) = 0$$

A resolução da segunda equação fornece $x = 0$ ou $y = 4$. Substituindo $x = 0$ na primeira equação e resolvendo em y, obtemos $y = 0$ ou $y = 8$; substituindo $y = 4$ na primeira equação e resolvendo em x, obtemos $x = 4$ ou $x = -4$. Assim, encontramos os quatro pontos críticos

$$(0, 0), \quad (0, 8), \quad (4, 4), \quad (-4, 4)$$

Calculando a matriz hessiana nesses pontos obtemos

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}, \quad H(0,8) = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$
$$H(4,4) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad H(-4,4) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Deixamos para o leitor encontrar os autovalores dessas matrizes e deduzir a classificação seguinte dos pontos estacionários.

Ponto crítico (x_0, y_0)	λ_1	λ_2	**Classificação**
(0, 0)	8	−8	Ponto de sela
(0, 8)	8	−8	Ponto de sela
(4, 4)	8	8	Mínimo relativo
(−4, 4)	−8	−8	Máximo relativo

◀

OPCIONAL

Concluímos esta seção com uma prova opcional do Teorema 7.4.1.

Prova do Teorema 7.4.1 O primeiro passo na prova é mostrar que $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ tem valores máximo e mínimo condicionados em $\|\mathbf{x}\| = 1$. Como A é simétrica, o teorema dos eixos principais (Teorema 7.3.1) implica que existe uma mudança de coordenadas ortogonal $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ tal que

$$\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \tag{6}$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de A. Suponha que $\|\mathbf{x}\| = 1$ e que os vetores coluna de P (que são autovetores unitários de A) tenham sido ordenados de tal modo que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \tag{7}$$

Como P é uma matriz ortogonal, a multiplicação por P preserva comprimentos, de modo que $\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| = 1$, ou seja,

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1$$

Segue dessa equação e de (7) que

$$\begin{aligned} \lambda_n = \lambda_n(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) &\leq \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \\ &\leq \lambda_1(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) = \lambda_1 \end{aligned}$$

e portanto, por (6), que

$$\lambda_n \leq \mathbf{x}^TA\mathbf{x} \leq \lambda_1$$

Isso mostra que todos os valores de $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ com $\|\mathbf{x}\| = 1$ estão entre o maior e o menor autovalor de A. Agora seja $\mathbf{x}$ um autovetor unitário associado a λ_1. Então

$$\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(\lambda_1\mathbf{x}) = \lambda_1\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \lambda_1\|\mathbf{x}\|^2 = \lambda_1$$

o que mostra que $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ tem λ_1 como máximo condicionado e que esse máximo ocorre se $\mathbf{x}$ for um autovetor unitário de A associado a λ_1. Analogamente, se $\mathbf{x}$ for um autovetor unitário associado a λ_n, então

$$\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(\lambda_n\mathbf{x}) = \lambda_n\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \lambda_n\|\mathbf{x}\|^2 = \lambda_n$$

de modo que $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ tem λ_n como um mínimo condicionado, e esse mínimo ocorre se $\mathbf{x}$ for um autovetor unitário de A associado a λ_n. Isso completa a prova. ◀

Revisão de conceitos

- Restrição
- Extremos condicionados
- Curvas de nível
- Ponto crítico
- Mínimo relativo
- Máximo relativo
- Ponto de sela
- Teste da derivada segunda
- Matriz hessiana

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar os valores máximo e mínimo de uma forma quadrática sujeita a alguma restrição.
- Encontrar os pontos críticos de uma função real de duas variáveis reais e usar os autovalores da matriz hessiana nos pontos críticos para classificá-los como máximos relativos, mínimos relativos ou pontos de sela.

Conjunto de exercícios 7.4

▶ Nos Exercícios **1–4**, encontre os valores máximo e mínimo da forma quadrática dada sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 1$ e determine os valores de x, y e z nos quais ocorrem esses extremos. ◀

1. $5x^2 - y^2$ **2.** xy **3.** $3x^2 + 7y^2$ **4.** $5x^2 + 5xy$

▶ Nos Exercícios **5–6**, encontre os valores máximo e mínimo da forma quadrática dada sujeita à restrição

$$x_2 + y_2 + z_2 = 1$$

e determine os valores de x, y e z nos quais ocorrem esses extremos. ◀

5. $9x^2 + 4y^2 + 3z^2$ **6.** $2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz$

7. Use o método do Exemplo 2 para encontrar os valores máximo e mínimo de xy sujeita à restrição $4x^2 + 8y^2 = 16$.

8. Use o método do Exemplo 2 para encontrar os valores máximo e mínimo de $x^2 + xy + 2y^2$ sujeita à restrição $x^2 + 3y^2 = 16$.

▶ Nos Exercícios **9–10**, esboce o círculo unitário e as curvas de nível correspondentes à forma quadrática dada. Mostre que o círculo unitário intersecta cada uma dessas curvas em exatamente dois pontos, determine esses pontos e verifique que os extremos condicionados ocorrem nesses pontos. ◀

9. $5x^2 - y^2$ **10.** xy

11. (a) Mostre que a função $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$ tem pontos críticos em (0, 0), (1, 1) e (−1, −1).

(b) Use a forma hessiana do teste da derivada segunda para mostrar que f tem máximos relativos em (1, 1) e (−1, −1) e um ponto de sela em (0, 0).

12. (a) Mostre que a função $f(x, y) = x^3 - 6xy - y^3$ tem pontos críticos em (0, 0) e (−2, −2).

(b) Use a forma hessiana do teste da derivada segunda para mostrar que f tem um máximo relativo em (−2, −2) e um ponto de sela em (0, 0).

▶ Nos Exercícios **13–16**, encontre, se houver, todos pontos críticos de f e classifique-os como máximos relativos, mínimos relativos ou pontos de sela. ◀

13. $f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$

14. $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$

15. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y$

16. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$

17. Um retângulo centrado na origem com lados paralelos aos eixos coordenados deve ser inscrito na elipse $x^2 + 25y^2 = 25$. Use o método do Exemplo 2 para encontrar valores não negativos de x e y que produzam o retângulo inscrito de maior área.

18. Suponha que a temperatura no ponto (x, y) de uma placa metálica seja dada por $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Uma formiga caminhando na placa percorre uma circunferência de raio 5 centrada na origem. Quais são a maior e a menor temperaturas encontradas pela formiga?

19. (a) Mostre que as funções

$$f(x, y) = x^4 + y^4 \quad \text{e} \quad g(x, y) = x^4 - y^4$$

têm pontos críticos em (0, 0), mas que o teste da derivada segunda é inconclusivo nesse ponto.

(b) Dê um argumento que mostre que f tem um mínimo relativo em (0, 0) e que g tem um ponto de sela em (0, 0).

20. Suponha que a matriz hessiana de uma certa forma quadrática $f(x, y)$ seja dada por

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

O que pode ser dito sobre a localização e a classificação dos pontos críticos de f?

21. Sejam A uma matriz simétrica $n \times n$ e

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

onde $\mathbf{x}$ é um vetor qualquer em R^n expresso em forma de coluna. O que pode ser dito sobre o valor de q se $\mathbf{x}$ for um autovetor unitário associado a um autovalor λ de A?

22. Prove: seja $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ uma forma quadrática cujos valores máximo e mínimo condicionados à restrição $\|\mathbf{x}\| = 1$ são m e M, respectivamente. Mostre que dado qualquer número c no intervalo $m \le c \le M$, existe algum vetor unitário $\mathbf{x}_c$ tal que $\mathbf{x}_c^T A\mathbf{x}_c = c$. [*Sugestão*: no caso em que $m < M$, sejam $\mathbf{u}_m$ e $\mathbf{u}_M$ autovetores unitários de A tais que $\mathbf{u}_m^T A\mathbf{u}_m = m$ e $\mathbf{u}_M^T A\mathbf{u}_M = M$ e tome

$$\mathbf{x}_c = \sqrt{\frac{M-c}{M-m}}\mathbf{u}_m + \sqrt{\frac{c-m}{M-m}}\mathbf{u}_M$$

Mostre que $\mathbf{x}_c^T A\mathbf{x}_c = c$.]

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Uma forma quadrática sempre tem algum valor máximo ou algum valor mínimo.

(b) O valor máximo de uma forma quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ sujeita à restrição $\|\mathbf{x}\| = 1$ ocorre num autovetor unitário associado ao maior autovalor de A.

(c) A matriz hessiana de uma função f com derivadas parciais de segunda ordem contínuas é uma matriz simétrica.

(d) Se (x_0, y_0) for um ponto crítico de uma função f e a matriz hessiana de f em (x_0, y_0) for a matriz nula, então f não tem um máximo relativo nem um mínimo relativo em (x_0, y_0).

(e) Se A for uma matriz simétrica e $\det(A) < 0$, então o mínimo de $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ sujeita à restrição $\|\mathbf{x}\| = 1$ é negativo.

7.5 Matrizes unitárias, normais e hermitianas

Sabemos que qualquer matriz simétrica real é ortogonalmente diagonalizável e que as matrizes simétricas reais são as únicas matrizes ortogonalmente diagonalizáveis. Nesta seção, consideramos o problema de diagonalização de matrizes complexas.

Matrizes hermitianas e unitárias

A operação de transposição é menos importante para matrizes complexas do que para as matrizes reais. Uma operação mais útil para matrizes complexas é a dada na definição seguinte.

DEFINIÇÃO 1 Se A for uma matriz complexa, então a ***transposta conjugada*** de A, denotada por A^*, é definida por

$$A^* = \overline{A}^T \tag{1}$$

Observação Como a parte (b) do Teorema 5.3.2 afirma que $(\overline{A^T}) = (\overline{A})^T$, não é relevante a ordem em que efetuamos as operações de transposição e conjugação no cálculo de $A^* = \overline{A}^T$. Também, no caso em que A tiver entradas reais, teremos $A^* = (\overline{A})^T = A^T$, de modo que A^* é igual a A^T com matrizes reais.

▶ EXEMPLO 1 Transposta conjugada

Encontre a transposta conjugada A^* da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -i & 0 \\ 2 & 3-2i & i \end{bmatrix}$$

Solução Temos

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-i & i & 0 \\ 2 & 3+2i & -i \end{bmatrix} \text{ e, portanto, } A^* = \overline{A}^T = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ i & 3+2i \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad ◀$$

O próximo teorema, partes do qual são provadas nos exercícios, mostra que as propriedades algébricas básicas da operação de transposição conjugada são semelhantes às da transposição (comparar com o Teorema 1.4.8).

TEOREMA 7.5.1 *Se k for um escalar complexo e se A, B e C são matrizes complexas cujos tamanhos são tais que as operações enunciadas podem ser efetuadas, então:*

(a) $(A^*)^* = A$

(b) $(A + B)^* = A^* + B^*$

(c) $(A - B)^* = A^* - B^*$

(d) $(kA)^* = \bar{k}A^*$

(e) $(AB)^* = B^*A^*$

Observação Note que a relação $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}^T\mathbf{u}$ na Fórmula (5) da Seção 5.3 pode ser expressa em termos de transposta conjugada por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^*\mathbf{u} \tag{2}$$

Agora estamos prontos para definir duas novas classes de matrizes que são importantes no nosso estudo de diagonalização em C^n.

DEFINIÇÃO 2 Uma matriz quadrada complexa A é dita ***unitária*** se

$$A^{-1} = A^* \tag{3}$$

e é dita ***hermitiana***‡ se

$$A^* = A \tag{4}$$

Se A é uma matriz real, então $A^* = A^T$, caso em que (3) se torna $A^{-1} = A^T$ e (4) se torna $A^T = A$. Assim, as matrizes unitárias são a generalização complexa das matrizes ortogonais reais, e as matrizes hermitianas são a generalização complexa das matrizes simétricas reais.

Observe que as matrizes unitárias também podem ser definidas como as matrizes quadradas complexas A que satisfazem

$$AA^* = A^*A = I$$

► **EXEMPLO 2 Reconhecendo matrizes hermitianas**

As matrizes hermitianas são fáceis de reconhecer porque suas entradas na diagonal são reais (por quê?), e as entradas posicionadas simetricamente em relação à diagonal principal são números complexos conjugados. Assim, por exemplo, podemos dizer, sem fazer contas, que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix}$$

é hermitiana. ◄

O fato de que matrizes simétricas reais têm autovalores reais é um caso especial do resultado mais geral a seguir, relativo a matrizes hermitianas, cuja prova é deixada como exercício.

TEOREMA 7.5.2 *Os autovalores de uma matriz hermitiana são números reais.*

O fato de que autovetores de autoespaços distintos de uma matriz simétrica real são ortogonais é um caso especial do resultado mais geral a seguir, relativo a matrizes hermitianas.

‡ Em homenagem ao matemático francês Charles Hermite (1822-1901).

TEOREMA 7.5.3 *Se A é uma matriz hermitiana, então autovetores de autoespaços diferentes são ortogonais.*

Prova Sejam $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ autovetores de A associados aos autovalores distintos λ_1 e λ_2. Usando a Fórmula (2) e os fatos de que $\lambda_1 = \overline{\lambda}_1$, $\lambda_2 = \overline{\lambda}_2$ e $A = A^*$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\lambda_1(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1) = (\lambda_1 \mathbf{v}_1)^* \mathbf{v}_2 &= (A\mathbf{v}_1)^* \mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}_1^* A^*)\mathbf{v}_2 \\ &= (\mathbf{v}_1^* A)\mathbf{v}_2 \ = \mathbf{v}_1^*(A\mathbf{v}_2) \\ &= \mathbf{v}_1^*(\lambda_2 \mathbf{v}_2) \ = \lambda_2(\lambda_1^* \mathbf{v}_2) = \lambda_2(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1)\end{aligned}$$

Isso implica $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1) = 0$ e, portanto, que $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = 0$ (já que $\lambda_1 \neq \lambda_2$). ◄

► EXEMPLO 3 Autovalores e autovetores de uma matriz hermitiana

Confirme que a matriz hermitiana

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$$

tem autovalores reais e que autovetores de autoespaços diferentes são ortogonais.

Solução O polinômio característico de A é

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1-i \\ -1+i & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 3) - (-1-i)(-1+i) \\ &= (\lambda^2 - 5\lambda + 6) - 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 4)\end{aligned}$$

de modo que os autovalores de A são $\lambda = 1$ e $\lambda = 4$, que são reais. As bases dos autoespaços de A podem ser obtidas resolvendo o sistema linear

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1-i \\ -1+i & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com $\lambda = 1$ e com $\lambda = 4$. Deixamos para o leitor mostrar que as soluções gerais desses sistemas são

$$\lambda = 1\colon \ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda = 4\colon \ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+i) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, as bases desses autoespaços são

$$\lambda = 1\colon \ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda = 4\colon \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+i) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são ortogonais, pois

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = (-1-i)\left(\overline{\tfrac{1}{2}(1+i)}\right) + (1)(1) = \tfrac{1}{2}(-1-i)(1-i) + 1 = 0$$

e, portanto, todos os múltiplos escalares desses vetores também são ortogonais. ◄

Em geral, não é fácil reconhecer uma matriz unitária sem fazer contas. Contudo, o análogo seguinte dos Teoremas 7.1.1 e 7.1.3, parte do qual é provado nos exercícios, fornece uma maneira de decidir se uma dada matriz é unitária sem precisar calcular sua inversa.

TEOREMA 7.5.4 *Se A for uma matriz $n \times n$ com entradas complexas, então as afirmações seguintes são equivalentes.*

(*a*) *A é unitária.*

(*b*) $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$, *qualquer que seja* $\mathbf{x}$ *em* C^n.

(*c*) $A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, *quaisquer que sejam* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *em* C^n.

(*d*) *Os vetores coluna de A formam um conjunto ortonormal em C^n em relação ao produto interno euclidiano complexo.*

(*e*) *Os vetores linha de A formam um conjunto ortonormal em C^n em relação ao produto interno euclidiano complexo.*

▶ EXEMPLO 4 Uma matriz unitária

Use o Teorema 7.5.4 para mostrar que

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1+i) \\ \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(-1+i) \end{bmatrix}$$

é unitária e encontre A^{-1}.

Solução Mostremos que os vetores linha

$$\mathbf{r}_1 = \left[\tfrac{1}{2}(1+i) \quad \tfrac{1}{2}(1+i)\right] \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2 = \left[\tfrac{1}{2}(1-i) \quad \tfrac{1}{2}(-1+i)\right]$$

são ortonormais. As contas pertinentes são

$$\|\mathbf{r}_1\| = \sqrt{\left|\tfrac{1}{2}(1+i)\right|^2 + \left|\tfrac{1}{2}(1+i)\right|^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}} = 1$$

$$\|\mathbf{r}_2\| = \sqrt{\left|\tfrac{1}{2}(1-i)\right|^2 + \left|\tfrac{1}{2}(-1+i)\right|^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}} = 1$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 &= \left(\tfrac{1}{2}(1+i)\right)\left(\overline{\tfrac{1}{2}(1-i)}\right) + \left(\tfrac{1}{2}(1+i)\right)\left(\overline{\tfrac{1}{2}(-1+i)}\right) \\ &= \left(\tfrac{1}{2}(1+i)\right)\left(\tfrac{1}{2}(1+i)\right) + \left(\tfrac{1}{2}(1+i)\right)\left(\tfrac{1}{2}(-1-i)\right) = \tfrac{1}{2}i - \tfrac{1}{2}i = 0 \end{aligned}$$

Como sabemos que A é unitária, segue que

$$A^{-1} = A^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1+i) \\ \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(-1-i) \end{bmatrix}$$

Deixamos para o leitor confirmar a validade desse resultado mostrando que $AA^* = A^*A = I$. ◀

Diagonalizabilidade unitária

Como as matrizes unitárias são o análogo complexo das matrizes ortogonais reais, a definição seguinte é uma generalização natural da ideia de diagonalização ortogonal de matrizes reais.

DEFINIÇÃO 3 Uma matriz quadrada complexa é dita ***unitariamente diagonalizável*** se existe uma matriz unitária P tal que $P^*AP = D$ é uma matriz diagonal complexa. Dizemos que qualquer matriz P nessas condições ***diagonaliza A unitariamente***.

Lembre que uma matriz simétrica A de tamanho $n \times n$ tem um conjunto ortonormal de n autovetores e é ortogonalmente diagonalizável por qualquer matriz $n \times n$ cujos vetores coluna constituam um conjunto ortonormal de autovetores de A. Aqui está o análogo complexo desse resultado.

TEOREMA 7.5.5 *Qualquer matriz hermitiana A de tamanho n × n tem um conjunto ortonormal de n autovetores e é unitariamente diagonalizada por qualquer matriz P de tamanho n × n cujos vetores coluna constituem um conjunto ortonormal de autovetores de A.*

O procedimento para diagonalizar unitariamente uma matriz hermitiana A é exatamente o mesmo utilizado para diagonalizar ortogonalmente uma matriz simétrica.

Diagonalização unitária de uma matriz hermitiana

Passo 1. Encontre uma base de cada autoespaço de A.

Passo 2. Aplique o processo de Gram-Schmidt a cada uma das bases para produzir bases ortonormais dos autoespaços.

Passo 3. Forme a matriz P cujos vetores coluna são os vetores de base obtidos no Passo 2. Essa matriz é unitária (Teorema 7.5.4) e diagonaliza A unitariamente.

► EXEMPLO 5 Diagonalização unitária de uma matriz hermitiana

Encontre uma matriz P que diagonaliza unitariamente a matriz hermitiana

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$$

Solução Mostramos no Exemplo 3 que os autovalores de A são $\lambda = 1$ e $\lambda = 4$ e que bases dos autoespaços associados são

$$\lambda = 1: \ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda = 4: \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+i) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como cada autoespaço tem somente um vetor na base, aplicar o processo de Gram-Schmidt significa simplesmente normalizar esses vetores de base. Deixamos para o leitor mostrar que

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{-1-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{p}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Assim, A é unitariamente diagonalizada pela matriz

$$P = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2] = \begin{bmatrix} \frac{-1-i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Embora seja um pouco tedioso, o leitor pode querer conferir esse resultado mostrando que

$$P^*AP = \begin{bmatrix} \frac{-1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1-i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$ ◄

Matrizes antissimétricas e anti-hermitianas

No Exercício 37 da Seção 1.7, definimos uma matriz quadrada com entradas reais como sendo **antissimétrica** se $A^T = -A$. Uma matriz antissimétrica necessariamente tem entra-

das nulas na diagonal principal (por quê?) e cada entrada fora da diagonal principal deve ser o negativo da entrada posicionada simetricamente em relação à diagonal principal. Vejamos um exemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{[antissimétrica]}$$

Deixamos para o leitor confirmar que $A^T = -A$.

O análogo complexo das matrizes antissimétricas são as matrizes tais que $A^* = -A$, denominadas ***anti-hermitianas***.

Como uma matriz anti-hermitiana A tem a propriedade

$$A^* = \overline{A}^T = -A$$

uma matriz anti-hermitiana necessariamente tem entradas nulas ou imaginárias puras na diagonal principal (por quê?), e os complexos conjugados das entradas posicionadas simetricamente em relação à diagonal principal são o negativo uma da outra. Vejamos um exemplo.

$$A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 5 \\ -1-i & 2i & i \\ -5 & i & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{[anti-hermitiana]}$$

Matrizes normais

As matrizes hermitianas possuem várias, mas não todas, propriedades de matrizes simétricas reais. Por exemplo, sabemos que matrizes simétricas reais são ortogonalmente diagonalizáveis e que matrizes hermitianas são unitariamente diagonalizáveis. Contudo, ao passo que as matrizes simétricas reais são as únicas matrizes ortogonalmente diagonalizáveis, as matrizes hermitianas não constituem toda a classe de matrizes complexas unitariamente diagonalizáveis, ou seja, existem matrizes unitariamente diagonalizáveis que não são hermitianas. Mais especificamente, pode ser provado que uma matriz quadrada complexa A é unitariamente diagonalizável se, e só se,

$$AA^* = A^*A \tag{5}$$

Matrizes com essa propriedade são ditas ***normais***. As matrizes normais incluem as hermitianas, as anti-hermitianas e as unitárias no caso complexo, e as simétricas, as antissimétricas e as ortogonais no caso real. As matrizes antissimétricas não nulas são particularmente interessantes por serem exemplos de matrizes reais que não são ortogonalmente diagonalizáveis, mas são unitariamente diagonalizáveis.

Uma comparação de autovalores

Vimos que matrizes hermitianas têm autovalores reais. Nos exercícios, pedimos ao leitor mostrar que os autovalores de matrizes anti-hermitianas são ou nulos ou imaginários puros (ou seja, têm parte real nula) e que os autovalores de matrizes unitárias têm módulo 1. Esses resultados estão ilustrados esquematicamente na Figura 7.5.1

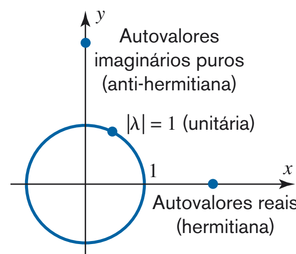


Figura 7.5.1

Revisão de conceitos
- Transposta conjugada
- Matriz unitária
- Matriz hermitina
- Matriz unitariamente diagonalizável
- Matriz antissimétrica
- Matriz anti-hermitiana
- Matriz normal

Aptidões desenvolvidas
- Encontrar a transposta conjugada de uma matriz.
- Ser capaz de identificar matrizes hermitianas.
- Encontrar a inversa de uma matriz unitária.
- Encontrar uma matriz unitária que diagonaliza uma matriz hermitiana.

Conjunto de exercícios 7.5

▶ Nos Exercícios 1–2, encontre A^*. ◀

1. $A = \begin{bmatrix} 2i & 1-i \\ 4 & 3+i \\ 5+i & 0 \end{bmatrix}$ **2.** $A = \begin{bmatrix} 2i & 1-i & -1+i \\ 4 & 5-7i & -i \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 3–4, encontre números que, colocados no lugar dos sinais ×, tornem A hermitiana. ◀

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & i & 2-3i \\ \times & -3 & 1 \\ \times & \times & 2 \end{bmatrix}$ **4.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3+5i \\ \times & -4 & -i \\ \times & \times & 6 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 5–6, em cada caso, mostre que A não é hermitiana para qualquer escolha dos sinais ×. ◀

5. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & i & 2-3i \\ -i & -3 & \times \\ 2-3i & \times & \times \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} \times & \times & 3+5i \\ 0 & i & -i \\ 3-5i & i & \times \end{bmatrix}$

6. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & \times \\ 1+i & 7 & \times \\ 6-2i & \times & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & \times & 3+5i \\ \times & 3 & 1-i \\ 3-5i & \times & 2+i \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 7–8, verifique que os autovalores de A são reais e que os autovetores de autoespaços diferentes são ortogonais, de acordo com o Teorema 7.5.3. ◀

7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2-3i \\ 2+3i & -1 \end{bmatrix}$ **8.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 2 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 9–12, mostre que A é unitária e encontre A^{-1}. ◀

9. $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5}i \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}i \end{bmatrix}$ **10.** $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1+i) \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+i) & \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-i\sqrt{3}) \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i\sqrt{3}) & \frac{1}{2\sqrt{2}}(i-\sqrt{3}) \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}(-1+i) & \frac{1}{\sqrt{6}}(1-i) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 13–18, encontre uma matriz unitária P que diagonalize a matriz hermitiana A e determine $P^{-1}AP$. ◀

13. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{bmatrix}$ **14.** $A = \begin{bmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 6 & 2+2i \\ 2-2i & 4 \end{bmatrix}$ **16.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 3+i \\ 3-i & -3 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+i \\ 0 & -1-i & 0 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{\sqrt{2}}i & -\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}i & 2 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 & 2 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 19–20, encontre números que, colocados no lugar dos sinais ×, tornem A anti-hermitiana. ◀

19. $A = \begin{bmatrix} 0 & i & 2-3i \\ \times & 0 & 1 \\ \times & \times & 4i \end{bmatrix}$ **20.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3-5i \\ \times & 0 & -i \\ \times & \times & 0 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 21–22, mostre que A não é anti-hermitiana, qualquer que seja a escolha dos sinais ×. ◀

21. (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & i & 2-3i \\ -i & 0 & \times \\ 2+3i & \times & \times \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & \times & 3-5i \\ \times & 2i & -i \\ -3+5i & i & 3i \end{bmatrix}$

22. (a) $A = \begin{bmatrix} i & \times & 2-3i \\ \times & 0 & 1+i \\ 2+3i & -1-i & \times \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -i & 4+7i \\ \times & 0 & \times \\ -4-7i & \times & 1 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **23–24**, verifique que os autovalores da matriz anti-hermitiana A são números imaginários puros. ◀

23. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1+i \\ 1+i & i \end{bmatrix}$ **24.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 3i \\ 3i & 0 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **25–26**, mostre que A é normal. ◀

25. $A = \begin{bmatrix} 1+2i & 2+i & -2-i \\ 2+i & 1+i & -i \\ -2-i & -i & 1+i \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 2+2i & i & 1-i \\ i & -2i & 1-3i \\ 1-i & 1-3i & -3+8i \end{bmatrix}$

27. Mostre que a matriz

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} e^{i\theta} & e^{-i\theta} \\ ie^{i\theta} & -ie^{-i\theta} \end{bmatrix}$$

é unitária, qualquer que seja o valor de θ. [*Nota*: ver a Fórmula (17) no Apêndice B para a definição de $e^{i\theta}$.]

28. Mostre que cada entrada na diagonal principal de uma matriz anti-hermitiana é igual a zero ou é um número imaginário puro.

29. Seja A uma matriz $n \times n$ com entradas complexas e defina as matrizes B e C por

$$B = \frac{1}{2}(A + A^*) \quad \text{e} \quad C = \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

(a) Mostre que B e C são hermitianas.

(b) Mostre que $A = B + iC$ e $A^* = B - iC$

(c) Que condições devem satisfazer B e C para que A seja normal?

30. Mostre que se A for uma matriz $n \times n$ com entradas complexas e se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem vetores em C^n dados em forma de coluna, então

$$A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot A^*\mathbf{v} \quad \text{e} \quad \mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = A^*\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

31. Mostre que se A for uma matriz unitária, então A^* também será unitária.

32. Mostre que os autovalores de uma matriz anti-hermitiana são ou nulos ou imaginários puros.

33. Mostre que os autovalores de uma matriz unitária têm módulo 1.

34. Mostre que se $\mathbf{u}$ for um vetor não nulo em C^n, escrito em forma de coluna, então $P = \mathbf{u}\mathbf{u}^*$ é uma matriz hermitiana.

35. Mostre que se $\mathbf{u}$ for um vetor unitário em C^n, escrito em forma de coluna, então $H = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*$ é uma matriz unitária e hermitiana.

36. O que pode se dito sobre a inversa de uma matriz A que é hermitiana e unitária?

37. Encontre uma matriz 2×2 que seja hermitiana e unitária e cujas entradas não sejam todas números reais.

38. Sob quais circunstâncias é normal a matriz A?

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

39. Que interpretações geométricas plausíveis poderiam ser dadas à multiplicação pelas matrizes $P = \mathbf{u}\mathbf{u}^*$ e $H = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*$ nos Exercícios 34 e 35?

40. Prove: se A for uma matriz invertível, então A^* é invertível e $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

41. (a) Prove que $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

(b) Use o resultado da parte (a) e o fato de que uma matriz quadrada e sua transposta têm o mesmo determinante para provar que $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$.

42. Use a parte (b) do Exercício 41 para provar as afirmações.

(a) Se A for hermitiana, então $\det(A)$ será real.

(b) Se A for unitária, então $|\det(A)| = 1$.

43. Use propriedades da transposição e da conjugação complexa para provar as partes (*a*) e (*e*) do Teorema 7.5.1.

44. Use propriedades da transposição e da conjugação complexa para provar as partes (*b*) e (*d*) do Teorema 7.5.1.

45. Prove que uma matriz A de tamanho $n \times n$ com entradas complexas é unitária se, e só se, as coluna de A formam um conjunto ortonormal em C^n.

46. Prove que os autovalores de uma matriz hermitiana são reais.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) A matriz $\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 2 \end{bmatrix}$ é hermitiana.

(b) A matriz $\begin{bmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ é unitária.

(c) A transposta conjugada de uma matriz unitária é unitária.

(d) Qualquer matriz unitariamente diagonalizável é hermitiana.

(e) Uma potência inteira positiva de uma matriz anti-hermitiana é anti-hermitiana.

Capítulo 7 Exercícios suplementares

1. Em cada caso, verifique que a matriz é ortogonal e encontre sua inversa.

(a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{9}{25} & \frac{4}{5} & -\frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{3}{5} & \frac{16}{25} \end{bmatrix}$

2. Prove: se Q for uma matriz ortogonal, então cada entrada de Q é dada pelo seu cofator se $\det(Q) = 1$ e pelo negativo de seu cofator se $\det(Q) = -1$.

3. Prove que se A for uma matriz simétrica positiva e **u** e **v** vetores em forma de coluna, então

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T A \mathbf{v}$$

é um produto interno de R^n.

4. Encontre o polinômio característico e as dimensões dos autoespaços da matriz simétrica

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Encontre uma matriz P que diagonalize

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ortogonalmente e determine a matriz diagonal $D = P^T AP$.

6. Em cada caso, expresse a forma quadrática em notação matricial $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$.

(a) $-4x_1^2 + 16x_2^2 - 15x_1x_2$

(b) $9x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + x_2x_3$

7. Classifique a forma quadrática

$$x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2$$

como positiva, negativa, indefinida, não negativa ou não positiva.

8. Em cada caso, encontre uma mudança de variável ortogonal que elimine o termo misto da forma quadrática e expresse a forma quadrática em termos das variáveis novas.

(a) $-3x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2$

(b) $-5x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_1x_2$

9. Em cada caso, identifique o tipo da seção cônica representada pela equação.

(a) $y - x^2 = 0$ (b) $3x - 11y^2 = 0$

10. Encontre uma matriz unitária U que diagonaliza

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e determine a matriz diagonal $D = U^{-1}AU$.

11. Mostre que se U for uma matriz unitária $n \times n$ e

$$|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| = 1$$

então o produto

$$U \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z_n \end{bmatrix}$$

também é unitário.

12. Suponha que $A^* = -A$.

(a) Mostre que iA é hermitiana.

(b) Mostre que A é unitariamente diagonalizável e tem autovalores imaginários puros.

CAPÍTULO 8

Transformações Lineares

CONTEÚDO DO CAPÍTULO

INTRODUÇÃO

Nas Seções 4.9 e 4.10, estudamos transformações lineares de R^n em R^m. Neste capítulo, vamos definir e estudar transformações lineares de um espaço vetorial arbitrário V num espaço vetorial arbitrário W. Os resultados aqui obtidos têm aplicações importantes na Física, na Engenharia e em várias áreas da Matemática.

8.1 Transformações lineares arbitrárias

Até aqui, nosso estudo de transformações lineares ficou concentrado nas transformações matriciais de R^n em R^m. Nesta seção, passamos a estudar transformações lineares envolvendo espaços vetoriais arbitrários. Mostramos como surgem tais transformações e estabelecemos uma relação fundamental entre espaços vetoriais arbitrários de dimensão n e o R^n.

Definições e terminologia

Na Seção 4.9, definimos uma *transformação matricial* $T_A : R^n \to R^m$ como sendo uma aplicação da forma

$$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

em que A é uma matriz $m \times n$. Depois disso, estabelecemos, nos Teoremas 4.10.2 e 4.10.3, que as transformações matriciais são exatamente as *transformações lineares* de R^n em R^m, ou seja, as transformações com as propriedades de linearidade

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \quad \text{e} \quad T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$$

Utilizamos essas duas propriedades como o ponto inicial da definição de transformações lineares mais gerais.

DEFINIÇÃO 1 Se $T : V \to W$ for uma função de um espaço vetorial V num espaço vetorial W, então T é denominada ***transformação linear*** de V em W se as duas propriedades seguintes forem válidas com quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V e qualquer escalar k.

(i) $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$ **[Homogeneidade]**

(ii) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ **[Aditividade]**

No caso especial em que $V = W$, a transformação linear é denominada ***operador linear*** do espaço vetorial V.

A homogeneidade e a aditividade de uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ podem ser usadas em combinação para mostrar que, se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ forem vetores em V e k_1 e k_2 escalares quaisquer, então

$$T(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2) = k_1T(\mathbf{v}_1) + k_2T(\mathbf{v}_2)$$

Mais geralmente, se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ forem vetores em V e $k_1, k_2, \ldots, k_r$ forem escalares quaisquer, então

$$T(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r) = k_1T(\mathbf{v}_1) + k_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + k_rT(\mathbf{v}_r) \tag{1}$$

O próximo teorema é um análogo das partes (*a*) e (*d*) do Teorema 4.9.1.

TEOREMA 8.1.1 *Se $T : V \rightarrow W$ for uma transformação linear, então*

(*a*) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

(*b*) $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$, *quaisquer que sejam* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *em* V.

Use as duas partes do Teorema 8.1.1 para provar que

$$T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$$

com qualquer $\mathbf{v}$ em V.

Prova Seja $\mathbf{u}$ um vetor qualquer em V. Como $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$, segue da homogeneidade na Definição 1 que

$$T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{u}) = 0T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

provando (*a*).

Podemos provar a parte (*b*) reescrevendo $T(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ como

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= T\big(\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}\big) \\ &= T(\mathbf{u}) + (-1)T(\mathbf{v}) \\ &= T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Deixamos para o leitor justificar cada um dos passos dados. ◀

▶ EXEMPLO 1 Transformações matriciais

Como utilizamos as propriedades de homogeneidade e aditividade de *transformações matriciais* para definir uma transformação linear arbitrária, segue que qualquer transformação matricial $T_A : R^n \rightarrow R^m$ também é uma transformação linear nesse contexto mais geral, com $V = R^n$ e $W = R^m$.

▶ EXEMPLO 2 A transformação nula

Sejam V e W dois espaços vetoriais quaisquer. A aplicação $T : V \rightarrow W$ tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, qualquer que seja o vetor $\mathbf{v}$ em V, é a transformação linear denominada ***transformação nula*** ou ***zero***. Para ver que T é linear, observe que

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad T(k\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

Portanto,

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \quad \text{e} \quad T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$$

▶ EXEMPLO 3 O operador identidade

Seja V um espaço vetorial qualquer. A aplicação $I : V \rightarrow V$ definida por $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ é denominada ***operador identidade*** de V. Deixamos para o leitor verificar a linearidade de I.

EXEMPLO 4 Operadores dilatação e contração

Se V for um espaço vetorial e k um escalar qualquer, então a aplicação $T : V \to V$ dada por $T(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$ é um operador linear de V, pois, dados um escalar c e vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V quaisquer, então

$$T(c\mathbf{v}) = k(c\mathbf{v}) = c(k\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$$
$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

Dizemos que T é uma ***contração*** de V de fator k se $0 < k < 1$ e uma ***dilatação*** de V de fator k se $k > 1$ (Figura 8.1.1).

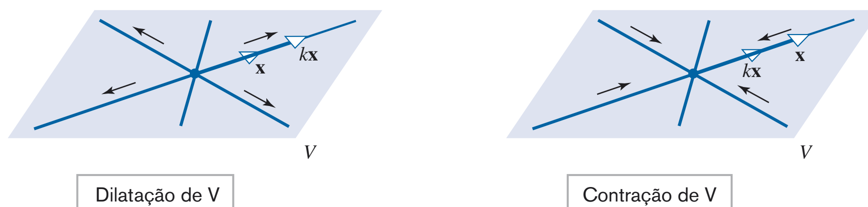


Figura 8.1.1

EXEMPLO 5 Uma transformação linear de P_n em P_{n+1}

Seja $\mathbf{p} = p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ um polinômio em P_n e defina a transformação $T : P_n \to P_{n+1}$ por

$$T(\mathbf{p}) = T(p(x)) = xp(x) = c_0 x + c_1 x^2 + \cdots + c_n x^{n+1}$$

Essa transformação é linear, pois, dado qualquer escalar k e quaisquer polinômios $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$, temos

$$T(k\mathbf{p}) = T(kp(x)) = x(kp(x)) = k(xp(x)) = kT(\mathbf{p})$$

e

$$T(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = T(p_1(x) + p_2(x)) = x(p_1(x) + p_2(x))$$
$$= xp_1(x) + xp_2(x) = T(\mathbf{p}_1) + T(\mathbf{p}_2)$$

EXEMPLO 6 Uma transformação linear usando um produto interno

Dados um espaço com produto interno V e um vetor $\mathbf{v}_0$ qualquer fixado em V, seja $T : V \to R$ a transformação

$$T(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle$$

que associa a cada vetor $\mathbf{x}$ o seu produto interno com $\mathbf{v}_0$. Essa transformação é linear, pois, dados qualquer escalar k e quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V, das propriedades de produtos internos decorre que

$$T(k\mathbf{v}) = \langle k\mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = k\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = kT(\mathbf{v})$$
$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_0 \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

EXEMPLO 7 Transformações de espaços matriciais

Seja M_{nn} o espaço vetorial das matrizes $n \times n$. Em cada parte, determine se a transformação é linear.

(a) $T_1(A) = A^T$ (b) $T_2(A) = \det(A)$

Solução (a) Segue das partes (*b*) e (*d*) do Teorema 1.4.8 que

$$T_1(kA) = (kA)^T = kA^T = kT_1(A)$$
$$T_1(A + B) = (A + B)^T = A^T + B^T = T_1(A) + T_1(B)$$

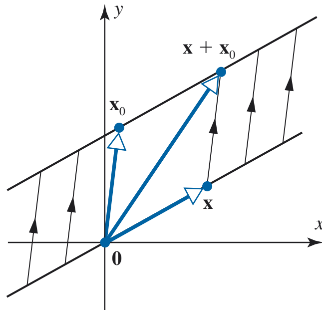
de modo que T_1 é linear.

Solução (b) Segue da Fórmula (1) da Seção 2.3 que

$$T_2(kA) = \det(kA) = k^n \det(A) = k^n T_2(A)$$

Assim, T_2 não é homogênea e, portanto, não é linear, se $n > 1$. Observe que a aditividade também falha, pois mostramos no Exemplo 1 da Seção 2.3 que $\det(A + B)$ e $\det(A) + \det(B)$ não são iguais em geral.

▶ EXEMPLO 8 A translação não é linear



▲ **Figura 8.1.2** $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$ translada cada ponto $\mathbf{x}$ ao longo de uma reta paralela a $\mathbf{x}_0$ por uma distância $\|\mathbf{x}_0\|$.

A parte (*a*) do Teorema 8.1.1 afirma que uma transformação linear faz corresponder **0** a **0**. Essa propriedade é útil para identificar transformações que *não são* lineares. Por exemplo, fixando um vetor não nulo $\mathbf{x}_0$ em R^2, a transformação

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$$

tem o efeito geométrico de transladar cada ponto $\mathbf{x}$ numa direção paralela a $\mathbf{x}_0$, por uma distância $\|\mathbf{x}_0\|$ (Figura 8.1.2). Isso não pode ser uma transformação linear, pois $T(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_0$, de modo que T não associa **0** a **0**.

▶ EXEMPLO 9 A transformação de avaliação

Dados um subespaço V de $F(-\infty, \infty)$ e números reais distintos

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

seja $T: V \to R^n$ a transformação

$$T(f) = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)) \tag{2}$$

que associa a f a ênupla de valores dessa função em $x_2, \ldots, x_n$. Dizemos que essa é a ***transformação de avaliação*** de V em $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Assim, por exemplo, se

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 4$$

e se $f(x) = x^2 - 1$, então

$$T(f) = (f(x_1), f(x_2), f(x_3)) = (0, 3, 15)$$

A transformação de avaliação em (2) é linear, pois, dados qualquer escalar k e quaisquer funções f e g em V, então

$$\begin{aligned} T(kf) &= \big((kf)(x_1), (kf)(x_2), \ldots, (kf)(x_n)\big) \\ &= \big(kf(x_1), kf(x_2), \ldots, kf(x_n)\big) \\ &= k\big(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\big) = kT(f) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(f+g) &= \big((f+g)(x_1), (f+g)(x_2), \ldots, (f+g)(x_n)\big) \\ &= \big(f(x_1)+g(x_1), f(x_2)+g(x_2), \ldots, f(x_n)+g(x_n)\big) \\ &= \big(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\big) + \big(g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n)\big) \\ &= T(f) + T(g) \end{aligned}$$ ◀

Encontrando transformações lineares a partir das imagens de vetores de uma base

Vimos na Fórmula (12) da Seção 4.9 que se T for uma transformação matricial, digamos, a multiplicação por A, e se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ forem os vetores da base canônica de R^n, então A pode ser expressa por

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2) \mid \ldots \mid T(\mathbf{e}_n)]$$

Segue disso que a imagem de qualquer vetor $\mathbf{v} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ em R^n pela multiplicação por A pode ser expressa por

$$T(\mathbf{v}) = c_1\, T(\mathbf{e}_1) + c_2\, T(\mathbf{e}_2) + \cdots + c_n\, T(\mathbf{e}_n)$$

Essa fórmula nos diz que a imagem de qualquer vetor por uma transformação matricial pode ser escrita como uma combinação linear das imagens dos vetores da base canônica. Isso é um caso especial do resultado geral seguinte.

TEOREMA 8.1.2 *Se $V \to W$ for uma transformação linear, V um espaço vetorial de dimensão finita e $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base de V, então a imagem de qualquer vetor $\mathbf{v}$ em V pode ser escrita como*

$$T(\mathbf{v}) = c_1 T(\mathbf{v}_1) + c_2 T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_n T(\mathbf{v}_n) \tag{3}$$

em que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são os coeficientes que expressam $\mathbf{v}$ como uma combinação linear dos vetores em S.

Prova Escreva $\mathbf{v}$ como $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$ e use a linearidade de T. ◀

▶ EXEMPLO 10 Calculando com imagens de vetores de base

Considere a base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de R^3 com

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$$

Seja $T : R^3 \to R^2$ a transformação linear tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, 0), \quad T(\mathbf{v}_2) = (2, -1), \quad T(\mathbf{v}_3) = (4, 3)$$

Encontre uma fórmula para $T(x_1, x_2, x_3)$ e use essa fórmula para calcular $T(2, -3, 5)$.

Solução Inicialmente precisamos escrever $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ como uma combinação linear de $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Escrevendo

$$(x_1, x_2, x_3) = c_1(1, 1, 1) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 0, 0)$$

e equacionando componentes correspondentes, obtemos

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= x_1 \\ c_1 + c_2 \quad\;\; &= x_2 \\ c_1 \qquad\quad\;\; &= x_3 \end{aligned}$$

que dá $c_1 = x_3$, $c_2 = x_2 - x_3$, $c_3 = x_1 - x_2$, portanto,

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= x_3(1, 1, 1) + (x_2 - x_3)(1, 1, 0) + (x_1 - x_2)(1, 0, 0) \\ &= x_3\mathbf{v}_1 + (x_2 - x_3)\mathbf{v}_2 + (x_1 - x_2)\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3) &= x_3 T(\mathbf{v}_1) + (x_2 - x_3)T(\mathbf{v}_2) + (x_1 - x_2)T(\mathbf{v}_3) \\ &= x_3(1, 0) + (x_2 - x_3)(2, -1) + (x_1 - x_2)(4, 3) \\ &= (4x_1 - 2x_2 - x_3,\ 3x_1 - 4x_2 + x_3) \end{aligned}$$

A partir dessa fórmula, obtemos

$$T(2, -3, 5) = (9, 23)$$

REQUER CÁLCULO

▶ EXEMPLO 11 Uma transformação linear de $C^1(-\infty, \infty)$ em $F(-\infty, \infty)$

Sejam $V = C^1(-\infty, \infty)$ o espaço vetorial das funções com derivadas contínuas em $(-\infty, \infty)$ e $W = F(-\infty, \infty)$ o espaço vetorial de todas as funções reais definidas em $(-\infty, \infty)$. Seja $D: V \to W$ a transformação que associa cada função $\mathbf{f} = f(x)$ à sua derivada, isto é,

$$D(\mathbf{f}) = f'(x)$$

Pelas propriedades da derivação, temos

$$D(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = D(\mathbf{f}) + D(\mathbf{g}) \quad \text{e} \quad D(k\mathbf{f}) + kD(\mathbf{f})$$

Assim, D é uma transformação linear.

REQUER CÁLCULO

▶ EXEMPLO 12 Uma transformação integral

Sejam $V = C(-\infty, \infty)$ o espaço vetorial das funções contínuas no intervalo $(-\infty, \infty)$ e $W = C^1(-\infty, \infty)$ o espaço vetorial das funções com derivadas contínuas em $(-\infty, \infty)$. Seja $J: V \to W$ a transformação que associa cada função $\mathbf{f} = f(x)$ a

$$J(f) = \int_0^x f(t)\,dt$$

Por exemplo, se $f(x) = x^2$, então

$$J(f) = \int_0^x t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\bigg]_0^x = \frac{x^3}{3}$$

A transformação $J: V \to W$ é linear, pois, dados qualquer constante k e quaisquer funções f e g em V, as propriedades da integração garantem que

$$J(kf) = \int_0^x kf(t)\,dt = k\int_0^x f(t)\,dt = kJ(f)$$

$$J(f+g) = \int_0^x (f(t) + g(t))\,dt = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x g(t)\,dt = J(f) + J(g) \quad ◀$$

Núcleo e imagem

Lembre que se A for uma matriz $m \times n$, então o espaço nulo de A consiste em todos os vetores $\mathbf{x}$ em R^n tais que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e, pelo Teorema 4.7.1, o espaço coluna de A consiste em todos os vetores $\mathbf{b}$ em R^m para os quais existe pelo menos um vetor $\mathbf{x}$ em R^n tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Do ponto de vista de transformações matriciais, o espaço nulo de A consiste em todos os vetores em R^n que a multiplicação por A transforma em $\mathbf{0}$ e o espaço coluna de A consiste em todos os vetores em R^m que são imagem de pelo menos um vetor em R^m na multiplicação por A. A definição seguinte estende essas ideias a transformações lineares arbitrárias.

DEFINIÇÃO 2 Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. O conjunto dos vetores em V que T transforma em 0 é denominado ***núcleo*** de T e é denotado por Nuc(T). O conjunto de todos os vetores em W que são imagem por T de pelo menos um vetor em V é denominado ***imagem*** de T e é denotado por Im(T).

▶ EXEMPLO 13 Núcleo e imagem de uma transformação matricial

Se $T_A: R^n \to R^m$ for a multiplicação pela matriz A de tamanho $m \times n$, então, pelo que acabamos de observar, o núcleo de T_A é o espaço nulo de A, e a imagem de T_A é o espaço coluna de A.

▶ EXEMPLO 14 Núcleo e imagem da transformação nula

Seja $T: V \to W$ a transformação nula. Como T transforma *cada* vetor em V em $\mathbf{0}$, segue que Nuc(T) = V. Além disto, como $\mathbf{0}$ é a *única* imagem por T de vetores em V, segue que Im(T) = $\{\mathbf{0}\}$.

▶ EXEMPLO 15 Núcleo e imagem do operador identidade

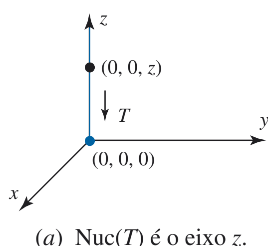
Seja $I: V \to V$ o operador identidade. Como $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ com qualquer vetor em V, *qualquer* vetor em V é a imagem de algum vetor (a saber, ele mesmo); assim, Im(I) = V. Como $\mathbf{0}$ é o *único* vetor que I transforma em $\mathbf{0}$, segue que Nuc(I) = $\{\mathbf{0}\}$.

▶ EXEMPLO 16 Núcleo e imagem de uma projeção ortogonal

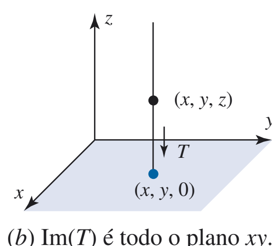
Conforme ilustrado na Figura 8.1.3*a*, os pontos que T transforma em $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ são exatamente os do eixo z, de modo que Nuc(T) é o conjunto dos pontos da forma $(0, 0, z)$. Conforme ilustrado na Figura 8.1.3*b*, T transforma os pontos de R^3 no plano xy, sendo cada ponto desse plano a imagem de todos os pontos da reta vertical acima dele. Assim, Im(T) é o conjunto dos pontos da forma $(x, y, 0)$.

▶ EXEMPLO 17 Núcleo e imagem de uma rotação

Seja $T: R^2 \to R^2$ o operador linear que gira cada vetor no plano xy pelo ângulo θ (Figura 8.1.4). Como *cada* vetor no plano xy pode ser obtido pela rotação de algum vetor pelo ângulo θ, segue que Im(T) = R^2. Além disso, o único vetor que gira em $\mathbf{0}$ é $\mathbf{0}$, portanto, Nuc(T) = $\{\mathbf{0}\}$.

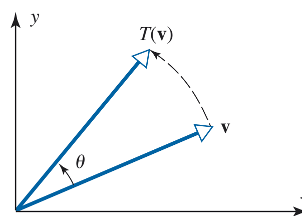


(*a*) Nuc(T) é o eixo z.



(*b*) Im(T) é todo o plano xy.

▲ Figura 8.1.3



▲ Figura 8.1.4

▶ EXEMPLO 18 Núcleo de uma transformação de derivação

REQUER CÁLCULO

Sejam $V = C^1(-\infty, \infty)$ o espaço vetorial das funções com derivadas contínuas em $(-\infty, \infty)$, $W = F(-\infty, \infty)$ o espaço vetorial de todas as funções reais definidas em $(-\infty, \infty)$ e $D: V \to W$ a transformação de derivação $D(\mathbf{f}) = f'(x)$. O núcleo de D é o conjunto de todas as funções em V com derivada zero. Do Cálculo, sabemos que esse é o conjunto das funções constantes em $(-\infty, \infty)$. ◀

Propriedades do núcleo e da imagem

Em todos os exemplos dados, Nuc(T) e Im(T) sempre foram *subespaços*. Nos Exemplos 14, 15 e 17, foram ou o subespaço nulo ou todo o espaço vetorial. No Exemplo 16, o núcleo foi uma reta pela origem e a imagem foi um plano pela origem, ambos os quais são subespaços de R^3. Tudo isso é uma consequência do resultado geral seguinte.

TEOREMA 8.1.3 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear.*

(*a*) *O núcleo de T é um subespaço de V.*

(*b*) *A imagem de T é um subespaço de W.*

Prova (a) Para mostrar que Nuc(T) é um subespaço, precisamos mostrar que contém pelo menos um vetor e que é fechado na adição e na multiplicação por escalar. Pela parte (*a*) do Teorema 8.1.1, o vetor **0** está em Nuc (T), de modo que esse conjunto contém pelo menos um vetor. Sejam $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ vetores em Nuc(T) e k um escalar quaisquer. Então

$$T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

de modo que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ está em Nuc(T). Também

$$T(k\mathbf{v}_1) = kT(\mathbf{v}_1) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

de modo que $k\mathbf{v}_1$ está em Nuc(T).

Prova (b) Para mostrar que Im(T) é um subespaço de W, precisamos mostrar que contém pelo menos um vetor e que é fechado na adição e na multiplicação por escalar. Contudo, a imagem contém pelo menos o vetor zero de W, pois $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, pela parte (*a*) do Teorema 8.1.1. Para provar que é fechado na adição e multiplicação pro escalar, devemos mostrar que, se $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ forem vetores em Im(T) e k for um escalar qualquer, então existem vetores **a** e **b** em V com os quais

$$T(\mathbf{a}) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \quad \text{e} \quad T(\mathbf{b}) = k\mathbf{w}_1 \tag{4}$$

Mas, como $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ estão em Im(T), existem vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ em V tais que

$$T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1 \quad \text{e} \quad T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$$

As contas a seguir completam a prova, mostrando que os vetores $\mathbf{a} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{b} = k\mathbf{v}_1$ satisfazem as equações de (4), a saber,

$$T(\mathbf{a}) = T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$
$$T(\mathbf{b}) = T(k\mathbf{v}_1) = kT(\mathbf{v}_1) = k\mathbf{w}_1 \quad ◀$$

REQUER CÁLCULO

▶ EXEMPLO 19 Aplicação às equações diferenciais

As equações diferenciais da forma

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad (\omega \text{ uma constante positiva}) \tag{5}$$

surgem no estudo das vibrações. O conjunto de todas as soluções dessa equação no intervalo $(-\infty, \infty)$ é o núcleo da transformação linear $D : C^2(-\infty, \infty) \to C(-\infty, \infty)$ dada por

$$D(y) = y'' + \omega^2 y$$

Mostra-se em qualquer livro texto de Equações Diferenciais que o núcleo é um subespaço bidimensional de $C^2(-\infty, \infty)$, de modo que se obtivermos duas soluções linearmente independentes de (5), então todas as outras soluções podem ser obtidas como combinação linear dessas duas. Deixamos para o leitor confirmar que

$$y_1 = \cos \omega x \quad \text{e} \quad y_2 = \text{sen}\, \omega x$$

são soluções de (5). Essas funções são linearmente independentes, pois nenhuma é um múltiplo escalar da outra e, portanto,

$$y = c_1 \cos \omega x + c_2\, \text{sen}\, \omega x \tag{6}$$

é uma "solução geral" de (5), no sentido de que qualquer escolha de c_1 e c_2 produz alguma solução e qualquer solução é dessa forma. ◀

Na Definição 1 da Seção 4.8 definimos as noções de *posto* e *nulidade* de uma matriz $m \times n$ e no Teorema 4.8.2, que denominamos teorema da dimensão, provamos que a soma do posto com a nulidade é n. A seguir, mostramos que esse resultado é um caso especial de um resultado mais geral sobre transformações lineares. Começamos com uma definição.

Posto e nulidade de transformações lineares

DEFINIÇÃO 3 Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Se a imagem de T tiver dimensão finita, dizemos que sua dimensão é o ***posto de T***, e se o núcleo de T tiver dimensão finita, dizemos que sua dimensão é a ***nulidade de T***. O posto de T é denotado por $\text{pos}(T)$ e a nulidade por $\text{nul}(T)$.

O teorema seguinte generaliza o Teorema 4.8.2 (a prova é opcional).

TEOREMA 8.1.4 Teorema da dimensão para transformações lineares

Se $T : V \to W$ for uma transformação linear de um espaço vetorial V de dimensão n num espaço vetorial W, então

$$\text{pos}(T) + \text{nul}(T) = n \tag{7}$$

No caso especial em que A, for uma matriz $m \times n$ e $T_A : R^n \to R^m$ a multiplicação por A, o núcleo de T_A é o espaço nulo de A, e a imagem de T_A é o espaço coluna de A. Assim, segue do Teorema 8.1.4 que

$$\text{pos}(T_A) + \text{nul}(T_A) = n$$

OPCIONAL

Prova do Teorema 8.1.4 Precisamos mostrar que

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Nuc}(T)) = n$$

Vejamos a prova no caso $1 \le \dim(\text{Nuc}(T)) < n$, deixando os casos $\dim(\text{Nuc}(T)) = 0$ e $\dim(\text{Nuc}(T)) = n$ para os exercícios. Suponha que $\dim(\text{Nuc}(T)) = r$ e seja $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ uma base do núcleo. Como $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ é linearmente independente, o Teorema 4.5.5*b* garante que existem $n - r$ vetores $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ tais que o conjunto aumentado $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base de V. Para completar a prova, mostramos que os $n - r$ vetores no conjunto $S = \{T(\mathbf{v}_{r+1}), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ formam uma base da imagem de T. Disso decorre, então, que

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Nuc}(T)) = (n - r) + r = n$$

Primeiro provamos que S gera a imagem de T. Se $\mathbf{b}$ for um vetor qualquer da imagem de T, então $\mathbf{b} = T(\mathbf{v})$ com algum vetor $\mathbf{v}$ em V. Como $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base de V, podemos escrever o vetor $\mathbf{v}$ no formato

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r + c_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

Como $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ são vetores do núcleo de T, temos $T(\mathbf{v}_1) = \cdots = T(\mathbf{v}_r) = \mathbf{0}$, logo

$$\mathbf{b} = T(\mathbf{v}) = c_{r+1}T(\mathbf{v}_{r+1}) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n)$$

Assim, S gera a imagem de T.

Finalmente mostramos que S é um conjunto linearmente independente e que, consequentemente, forma uma base da imagem de T. Suponha que alguma combinação linear de vetores em S seja nula. Então

$$k_{r+1}T(\mathbf{v}_{r+1}) + \cdots + k_nT(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0} \tag{8}$$

Precisamos mostrar que $k_{r+1} = \cdots = k_n = 0$. Como T é linear, (8) pode ser reescrita como

$$T(k_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + k_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$$

que diz que $k_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + k_n\mathbf{v}_n$ está no núcleo de T. Esse vetor pode, portanto, ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ da base, digamos,

$$k_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = k_1\mathbf{v}_1 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r$$

Assim,

$$k_1\mathbf{v}_1 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r - k_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} - \cdots - k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Como $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é linearmente independente, todos os coeficientes k_i são nulos; em particular, $k_{r+1} = \cdots = k_n = 0$, completando a prova. ◀

Revisão de conceitos

- Transformação linear
- Operador linear
- Transformação nula
- Transformação identidade
- Contração
- Dilatação
- Transformação de avaliação
- Núcleo
- Imagem
- Posto
- Nulidade

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se uma função é uma transformação linear.
- Encontrar uma fórmula para uma transformação linear $T: V \to W$ sendo dados os valores de T numa base de V.
- Encontrar uma base do núcleo de uma transformação linear.
- Encontrar uma base da imagem de uma transformação linear.
- Encontrar o posto de uma transformação linear.
- Encontrar a nulidade de uma transformação linear.

Conjunto de exercícios 8.1

▶ Nos Exercícios **1–8**, determine se a função é uma transformação linear. Justifique sua resposta. ◀

1. $T: V \to R$, sendo V um espaço vetorial com produto interno e $T(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|$.

2. $T: R^3 \to R^3$, sendo $\mathbf{v}_0$ um vetor fixado em R^3 e $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}_0$.

3. $T: M_{22} \to M_{23}$, sendo B uma matriz 2×3 fixada e $T(A) = AB$.

4. $T: M_{nn} \to R$, sendo $T(A) = \text{tr}(A)$.

5. $F: M_{mn} \to M_{nm}$, sendo $F(A) = A^T$.

6. $T: M_{22} \to R$, sendo

(a) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 3a - 4b + c - d$

(b) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a^2 + b^2$

7. $T: P_2 \to P_2$, sendo

(a) $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x + 1) + a_2(x + 1)^2$

(b) $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + 1) + (a_1 + 1)x + (a_2 + 1)x^2$

8. $T: F(-\infty, \infty) \to F(-\infty, \infty)$, sendo

(a) $T(f(x)) = 1 + f(x)$ (b) $T(f(x)) = f(x + 1)$

9. Considere a base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de R^2, em que $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 0)$ e seja $T: R^2 \to R^2$ o operador linear tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, -2) \quad \text{e} \quad T(\mathbf{v}_2) = (-4, 1)$$

Encontre uma fórmula para $T(x_1, x_2)$ e use essa fórmula para obter $T(5, -3)$.

10. Considere a base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de R^2, em que $\mathbf{v}_1 = (-2, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 3)$ e seja $T: R^2 \to R^3$ a transformação linear tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = (-1, 2, 0) \quad \text{e} \quad T(\mathbf{v}_2) = (0, -3, 5)$$

Encontre uma fórmula para $T(x_1, x_2)$ e use essa fórmula para obter $T(2, -3)$.

11. Considere a base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de R^3, em que $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$ e seja $T: R^3 \to R^3$ o operador linear tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = (2, -1, 4),\ T(\mathbf{v}_2) = (3, 0, 1),$$
$$T(\mathbf{v}_3) = (-1, 5, 1)$$

Encontre uma fórmula para $T(x_1, x_2, x_3)$ e use essa fórmula para obter $T(2, 4, -1)$.

12. Considere a base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de R^3, em que $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$ e seja $T: R^3 \to R^2$ a transformação linear tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, 0), \quad T(\mathbf{v}_2) = (-1, 1), \quad T(\mathbf{v}_3) = (0, 1)$$

Encontre uma fórmula para $T(x_1, x_2, x_3)$ e use essa fórmula para obter $T(7, 13, 7)$.

13. Sejam $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ vetores num espaço vetorial V e seja $T: V \to R^3$ uma transformação linear tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, -1, 2), T(\mathbf{v}_2) = (0, 3, 2), \\ T(\mathbf{v}_3) = (-3, 1, 2)$$

Encontre $T(2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3)$.

14. Seja $T: R^2 \to R^2$ o operador linear dado pela fórmula

$$T(x, y) = (2x - y, -8x + 4y)$$

Em cada caso, decida se o vetor está em Im(T).

(a) $(1, -4)$ (b) $(5, 0)$ (c) $(-3, 12)$

15. Seja $T: R^2 \to R^2$ o operador linear do Exercício 14. Em cada caso, decida se o vetor está em Nuc(T).

(a) $(5, 10)$ (b) $(3, 2)$ (c) $(1, 1)$

16. Seja $T: R^4 \to R^3$ a transformação linear dada pela fórmula

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4, 6x_1 - 9x_3 + 9x_4)$$

Em cada caso, decida se o vetor está em Im(T).

(a) $(0, 0, 6)$ (b) $(1, 3, 0)$ (c) $(2, 4, 1)$

17. Seja $T: R^4 \to R^3$ a transformação linear do Exercício 16. Em cada caso, decida se o vetor está em Nuc(T).

(a) $(3, -8, 2, 0)$ (b) $(0, 0, 0, 1)$ (c) $(0, -4, 1, 0)$

18. Seja $T: P_2 \to P_3$ a transformação linear definida por $T(p(x)) = xp(x)$. Em cada caso, decida se o vetor está em Nuc(T).

(a) x^2 (b) 0 (c) $1 + x$

19. Seja $T: P_2 \to P_3$ a transformação linear do Exercício 18. Em cada caso, decida se o vetor está em Im(T).

(a) $x + x^2$ (b) $1 + x$ (c) $3 - x^2$

20. Encontre uma base do núcleo

(a) do operador linear do Exercício 14.

(b) da transformação linear do Exercício 16.

(c) da transformação linear no Exercício 18.

21. Encontre uma base da imagem

(a) do operador linear do Exercício 14.

(b) da transformação linear do Exercício 16.

(c) da transformação linear no Exercício 18.

22. Verifique a Fórmula (7) do teorema da dimensão para

(a) o operador linear do Exercício 14.

(b) a transformação linear do Exercício 16.

(c) a transformação linear no Exercício 18.

▶ Nos Exercícios 23–26, seja T a multiplicação pela matriz A. Encontre

(a) uma base da imagem de T.

(b) uma base do núcleo de T.

(c) o posto e a nulidade de T.

(d) o posto e a nulidade de A. ◀

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ **24.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 20 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

27. Descreva o núcleo e a imagem

(a) da projeção ortogonal sobre o plano xz.

(b) da projeção ortogonal sobre o plano yz.

(c) da projeção ortogonal sobre o plano definido pela equação $y = x$.

28. Sejam V um espaço vetorial qualquer e $T: V \to V$ definido por $T(\mathbf{v}) = 3\mathbf{v}$.

(a) Qual é o núcleo de T?

(b) Qual é a imagem de T?

29. Em cada parte, use a informação dada para encontrar a nulidade da transformação linear T.

(a) $T: R^5 \to R^7$ tem posto 3.

(b) $T: P_4 \to P_3$ tem posto 1.

(c) A imagem de $T: R^6 \to R^3$ é R^3.

(d) $T: M_{22} \to M_{22}$ tem posto 3.

30. Seja A uma matriz 7×6 tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ só tem a solução trivial e seja $T: R^6 \to R^7$ a multiplicação por A. Encontre o posto e a nulidade de T.

31. Seja A uma matriz 5×7 com posto 4.

(a) Qual é a dimensão do espaço solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$?

(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ será consistente qualquer que seja o vetor $\mathbf{b}$ em R^5? Explique.

32. Seja $T: R^3 \to W$ uma transformação linear de R^3 num espaço vetorial qualquer. Dê uma descrição geométrica de Nuc(T).

33. Seja $T: V \to R^3$ uma transformação linear de um espaço vetorial qualquer em R^3. Dê uma descrição geométrica de Im(T).

34. Seja $T: R^3 \to R^3$ a multiplicação por

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que o núcleo de T é uma reta pela origem e encontre equações paramétricas dessa reta.

(b) Mostre que a imagem de T é um plano pela origem e encontre uma equação desse plano.

35. (a) Mostre que se a_1, a_2, b_1 e b_2 forem escalares quaisquer, então a fórmula

$$F(x, y) = (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y)$$

define um operador linear de R^2.

(b) A fórmula $F(x, y) = (a_1x_2 + b_1y_2, a_2x_2 + b_2y_2)$ define um operador linear de R^2? Explique.

36. Sejam $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$uma base de um espaço vetorial V e $T: V \to W$ uma transformação linear. Mostre que se

$$T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2) = \cdots = T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$$

então T é a transformação nula.

37. Sejam $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base de um espaço vetorial V e $T: V \to V$ um operador linear. Mostre que se

$$T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1, \quad T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2, \ldots, \quad T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{v}_n$$

então T é o operador identidade de V.

38. Dado um inteiro positivo $n > 1$ qualquer, seja $T: M_{nn} \to R$ a transformação linear definida por $T(A) = \text{tr}(A)$, em que A é uma matriz de entradas reais. Determine a dimensão de Nuc(T).

39. Prove: se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ for uma base de V e $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ vetores em W, não necessariamente distintos, então existe alguma transformação linear $T: V \to W$ tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, \quad T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2, \ldots, \quad T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$$

40. (***Requer Cálculo***) Sejam $V = C[a, b]$ o espaço vetorial das funções contínuas em $[a, b]$ e $T: V \to V$ a transformação definida por

$$T(\mathbf{f}) = 5f(x) + 3\int_a^x f(t)\,dt$$

Será T um operador linear?

41. (***Requer Cálculo***) Seja $D: P_3 \to P_2$ a transformação de derivação $D(\mathbf{p}) = p'(x)$. Descreva o núcleo de D.

42. (***Requer Cálculo***) Seja $J: P_1 \to R$ a transformação de integração $J(\mathbf{p}) = \int_{-1}^{1} p(x)\,dx$. Descreva o núcleo de J.

43. (***Requer Cálculo***) Sejam V o espaço vetorial das funções reais com derivadas contínuas de todas as ordens no intervalo $(-\infty, \infty)$ e $W = F(-\infty, \infty)$ o espaço vetorial de todas as funções reais definidas em $(-\infty, \infty)$.

(a) Encontre uma transformação linear $T: V \to W$ cujo núcleo seja P_3.

(b) Encontre uma transformação linear $T: V \to W$ cujo núcleo seja P_n.

44. Se A for uma matriz $m \times n$ e se o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for consistente com qualquer vetor $\mathbf{b}$ em R^m, o que pode ser dito sobre a imagem de $T_A: R^n \to R^m$?

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(i), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se $T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2)$ com quaisquer vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ em V e quaisquer escalares c_1 e c_2, então T é uma transformação linear.

(b) Se $\mathbf{v}$ for um vetor não nulo em V, então existe exatamente uma transformação linear $T: V \to W$ tal que $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$.

(c) Existe exatamente uma transformação linear $T: V \to W$ tal que $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u} - \mathbf{v})$, quaisquer que sejam os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V.

(d) Se $\mathbf{v}_0$ for um vetor não nulo em V, então a fórmula $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$ define um operador linear de V.

(e) O núcleo de uma transformação linear é um espaço vetorial.

(f) A imagem de uma transformação linear é um espaço vetorial.

(g) Se $T: P_6 \to M_{22}$ for uma transformação linear, então a nulidade de T é 3.

(h) A função $T: M_{22} \to R$ definida por $T(A) = \det(A)$ é uma transformação linear.

(i) A transformação linear $T: M_{22} \to M_{22}$ definida por

$$T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} A$$

tem posto 1.

8.2 Isomorfismo

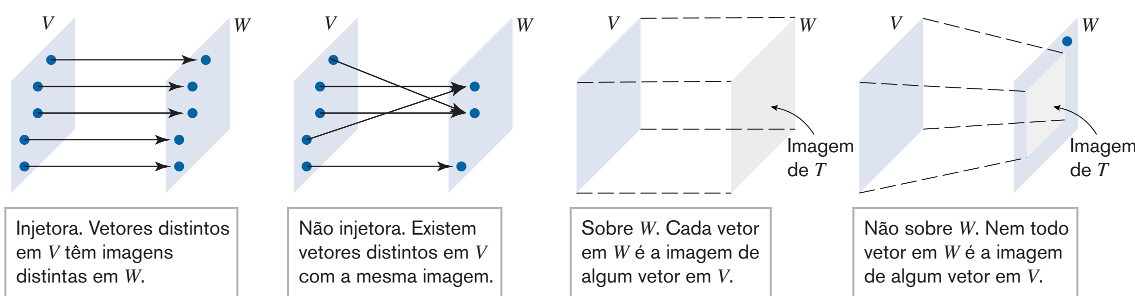
Nesta seção, estabelecemos uma conexão fundamental entre espaços vetoriais de dimensão finita e o espaço euclidiano R^n. Essa conexão não só tem importância teórica como tem aplicações práticas, por nos permitir efetuar cálculos vetoriais em espaços vetoriais arbitrários utilizando vetores de R^n.

Injetora e sobrejetora

Embora muitos dos teoremas neste texto tenham se ocupado exclusivamente com o espaço vetorial R^n, isso não é tão restritivo como pode parecer. Como veremos, o espaço vetorial R^n é a "mãe" de todos os espaços vetoriais reais de dimensão finita, no sentido de que qualquer espaço desses pode até diferir de R^n na notação usada para representar seus vetores, mas não difere em sua estrutura algébrica. Para explicar o que se entende por isso, precisamos de duas definições, a primeira das quais é uma generalização da Definição 1 das Seção 4.10. (Ver Figura 8.2.1.)

DEFINIÇÃO 1 Se $T : V \to W$ for uma transformação linear de um espaço vetorial V num espaço vetorial W, dizemos que T é uma transformação ***injetora*** se T transformar vetores distintos de V em vetores distintos de W.

DEFINIÇÃO 2 Se $T : V \to W$ for uma transformação linear de um espaço vetorial V num espaço vetorial W, dizemos que T é uma transformação ***sobrejetora*** ou, simplesmente, ***sobre W***, se qualquer vetor em W for a imagem de pelo menos um vetor em V.



▲ **Figura 8.2.1**

O próximo teorema fornece uma maneira útil de dizer se uma dada transformação linear é injetora a partir de seu núcleo.

TEOREMA 8.2.1 *Se $T : V \to W$ for uma transformação linear, as afirmações seguintes são equivalentes.*

(*a*) *T é injetora.*

(*b*) $\text{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Prova (a) ⇒ (b) Como T é linear, sabemos que $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ pelo Teorema 8.1.1*a*. Como T é injetora, não pode haver outros vetores em V que são transformados em $\mathbf{0}$, de modo que $\text{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Prova (b) ⇒ (a) Vamos supor que $\text{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Dados vetores distintos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V, temos $\mathbf{u} - \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Isso implica que $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$ pois, caso contrário, $\text{Nuc}(T)$ conteria um vetor não nulo. Como T é linear, segue que

$$T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$$

de modo que T transforma vetores distintos de V em vetores distintos de W, ou seja, é injetora. ◀

No caso especial em que V for de dimensão finita e T um operador linear de V, podemos acrescentar uma terceira afirmação àquelas no Teorema 8.2.1.

TEOREMA 8.2.2 *Se V for um espaço vetorial de dimensão finita e $T: V \to V$ for um operador linear, as afirmações seguintes são equivalentes.*

(*a*) *T é injetor.*

(*b*) $\text{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

(*c*) *T é sobrejetor, ou seja,* $\text{Im}(T) = V$.

Prova Já sabemos que (*a*) e (*b*) são equivalentes pelo Teorema 8.2.1, de modo que basta mostrar que (*b*) e (*c*) são equivalentes. Deixamos para o leitor mostrar isso, supondo que $\dim(V) = n$ e aplicando o Teorema 8.1.4. ◀

▶ EXEMPLO 1 Dilatações e contrações são injetores e sobre

Mostre que se V for um espaço vetorial de dimensão finita e c algum escalar não nulo, então o operador linear $T: V \to V$ definido por $T(\mathbf{v}) = c\mathbf{v}$ é injetor e sobre.

Solução O operador T é sobre (e, portanto, injetor), pois um vetor $\mathbf{v}$ qualquer em V é a imagem do vetor $(1/c)\mathbf{v}$.

▶ EXEMPLO 2 Operadores matriciais

Se $T_A: R^n \to R^n$ for o operador matricial $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, então segue das partes (*r*) e (*s*) do Teorema 5.1.6 que T_A é injetor e sobre se, e só se, A é invertível.

▶ EXEMPLO 3 Operadores de translação

Seja $V = R^\infty$ o espaço de sequências discutido no Exemplo 3 da Seção 4.1 e considere o operador de translação de V definido por

$$T_1(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) = (0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$$
$$T_2(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) = (u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots)$$

(a) Mostre que T_1 é injetor, mas não sobre.

(b) Mostre que T_2 é sobre, mas não injetor.

Solução (a) O operador T_1 é injetor porque sequências distintas de R^∞ claramente têm imagens distintas. Esse operador não é sobre porque, por exemplo, nenhum vetor em R^∞ é aplicado na sequência $(1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Por que o Exemplo 3 não contradiz o Teorema 8.2.2?

Solução (b) O operador T_2 não é injetor porque, por exemplo, ambos os vetores $(1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ e $(2, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ são transformados em $(0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Esse operador é sobre porque qualquer sequência de números reais pode ser obtida com uma escolha apropriada dos números $u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$.

EXEMPLO 4 Transformações básicas que são injetoras e sobre

A transformações lineares $T_1 : P_3 \to R^4$ e $T_2 : M_{22} \to R^4$ definidas por

$$T_1(a + bx + cx^2 + dx^3) = (a, b, c, d)$$
$$T_2\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a, b, c, d)$$

são injetoras e sobre (verifique isso mostrando que seus núcleos contêm apenas o vetor nulo).

EXEMPLO 5 Uma transformação linear injetora

Seja $T : P_n \to P_{n+1}$ a transformação linear

$$T(\mathbf{p}) = T(p(x)) = xp(x)$$

estudada no Exemplo 5 da Seção 8.1. Se

$$p = p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = q(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n$$

forem polinômios distintos, então eles diferem em pelo menos um coeficiente. Logo,

$$T(\mathbf{p}) = c_0 x + c_1 x^2 + \cdots + c_n x^{n+1} \quad \text{e} \quad T(\mathbf{q}) = d_0 x + d_1 x^2 + \cdots + d_n x^{n+1}$$

também diferem em pelo menos um coeficiente. Assim, T é injetora, pois transforma polinômios distintos $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ em polinômios distintos $T(\mathbf{p})$ e $T(\mathbf{q})$.

EXEMPLO 6 Uma transformação que não é injetora

REQUER CÁLCULO

Seja

$$D : C^1(-\infty, \infty) \to F(-\infty, \infty)$$

a transformação de derivação estudada no Exemplo 11 da Seção 8.1. Essa transformação linear *não é* injetora, porque transforma funções que diferem por uma constante na mesma função. Por exemplo,

$$D(x^2) = D(x^2 + 1) = 2x \quad ◀$$

Dimensão e transformações lineares

Nos exercícios, pedimos ao leitor que prove os dois fatos importantes seguintes sobre uma transformação linear $T : V \to W$ no caso em que V e W são de dimensão finita.

1. Se $\dim(W) < \dim(V)$, então T não pode ser injetora.
2. Se $\dim(V) < \dim(W)$, então T não pode ser sobrejetora.

Enunciado informalmente, se uma transformação linear transformar um espaço "maior" num espaço "menor", então alguns pontos do espaço "maior" devem ter a mesma imagem; e se uma transformação linear transformar um espaço "menor" num espaço "maior", então devem existir pontos do espaço "maior" que não são imagem de qualquer ponto do espaço "menor".

Observação Essas observações nos dizem, por exemplo, que qualquer transformação linear de R^3 em R^2 deve transformar certos pontos distintos de R^3 no mesmo ponto de R^2, e também nos dizem que não existe transformação linear alguma de R^2 que seja sobre *todo* o R^3.

Isomorfismo

Nossa próxima definição prepara o terreno para o resultado principal desta seção.

DEFINIÇÃO 3 Se uma transformação linear $T : V \to W$ for injetora e sobre, dizemos que T é um ***isomorfismo*** e que os espaços vetoriais V e W são ***isomorfos***.

A palavra *isomorfo* deriva dos radicais gregos *iso*, que significa "idêntico" e *morfo*, que significa "forma". Essa terminologia é apropriada porque, como veremos agora, espaços isomorfos têm a mesma "forma algébrica", mesmo se consistirem em objetos de tipos distintos. Para ilustrar essa ideia, na Tabela 1 mostramos como o isomorfismo

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \xrightarrow{T} (a_0, a_1, a_2)$$

"traduz" as operações de P_2 e R^3.

Tabela 1

Operação em P_2	Operação em R^3
$3(1 - 2x + 3x^2) = 3 - 6x + 9x^2$	$3(1, -2, 3) = (3, -6, 9)$
$(2 + x - x^2) + (1 - x + 5x^2) = 3 + 4x^2$	$(2, 1, -1) + (1, -1, 5) = (3, 0, 4)$
$(4 + 2x + 3x^2) - (2 - 4x + 3x^2) = 2 + 6x$	$(4, 2, 3) - (2, -4, 3) = (2, 6, 0)$

O próximo teorema, que é um dos mais importantes resultados da Álgebra Linear, revela a importância fundamental do espaço vetorial R^n.

TEOREMA 8.2.3 *Qualquer espaço vetorial real de dimensão n é isomorfo a R^n.*

O Teorema 8.2.3 nos diz que um espaço vetorial real de dimensão n pode diferir de R^n na notação, mas tem a mesma estrutura algébrica.

Prova Seja V um espaço vetorial real de dimensão n. Para provar que V é isomorfo a R^n, devemos encontrar uma transformação linear $T: V \to R^n$ que seja injetora e sobre. Para isso, sejam

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$$

uma base qualquer de V e

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n \tag{1}$$

a representação de um vetor $\mathbf{u}$ em V como uma combinação linear dos vetores da base, e defina a transformação $T: V \to R^n$ por

$$T(\mathbf{u}) = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \tag{2}$$

Mostremos que T é um isomorfismo (linear, injetor e sobre). Para provar a linearidade, sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dois vetores de V e a um escalar e sejam

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n \tag{3}$$

as representações de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ como combinações lineares dos vetores da base. Então segue de (1) que

$$\begin{aligned} T(a\mathbf{u}) &= T(ak_1\mathbf{v}_1 + ak_2\mathbf{v}_2 + \cdots + ak_n\mathbf{v}_n) \\ &= (ak_1, ak_2, \ldots, ak_n) \\ &= a(k_1, k_2, \ldots, k_n) = aT(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

e segue de (2) que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T\big((k_1 + d_1)\mathbf{v}_1 + (k_2 + d_2)\mathbf{v}_1 + \cdots + (k_n + d_n)\mathbf{v}_n\big) \\ &= (k_1 + d_1, k_2 + d_2, \ldots, k_n + d_n) \\ &= (k_1, k_2, \ldots, k_n) + (d_1, d_2, \ldots, d_n) \\ &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

mostrando que T é linear. Para mostrar que T é injetora, devemos mostrar que, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem vetores distintos em V, então suas imagens em R^n também o são. Mas se $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ e se

as representações desses vetores em termos dos vetores da base forem como em (3), então devemos ter $k_i \neq d_i$ com pelo menos um i. Assim,

$$T(\mathbf{u}) = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \neq (d_1, d_2, \ldots, d_n) = T(\mathbf{v})$$

mostrando que **u** e **v** têm imagens distintas por T. Finalmente, a transformação T é sobre pois se

$$\mathbf{w} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

for um vetor qualquer de R^n, então segue de (2) que **w** é a imagem por T do vetor

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n \quad ◀$$

Observação Note que o isomorfismo T na Fórmula (2) da prova precedente é a aplicação de coordenadas

$$\mathbf{u} \xrightarrow{T} (k_1, k_2, \ldots, k_n) = (\mathbf{u})_S$$

que transforma **u** em seu vetor de coordenadas em relação à base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Como em geral há muitas bases possíveis de um dado espaço vetorial, geralmente há muitos isomorfismos entre V e R^n, um para cada base distinta.

▶ EXEMPLO 7 O isomorfismo natural de P_{n-1} em R^n

Deixamos a cargo do leitor mostrar que a aplicação

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \xrightarrow{T} (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$$

de P_{n-1} em R^n é injetora, sobre e linear. Essa transformação é denominada ***isomorfismo natural*** de P_{n-1} em R^n, pois, como mostra o cálculo a seguir, ela transforma a base natural $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ de P^{n-1} na base canônica de R^n.

$$\begin{array}{llll}
1 = 1 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^{n-1} & \xrightarrow{T} & (1, 0, 0, \ldots, 0) \\
x = 0 + x + 0x^2 + \cdots + 0x^{n-1} & \xrightarrow{T} & (0, 1, 0, \ldots, 0) \\
\vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\
x^{n-1} = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + x^{n-1} & \xrightarrow{T} & (0, 0, 0, \ldots, 1)
\end{array}$$

▶ EXEMPLO 8 O isomorfismo natural de M_{22} em R^4

As matrizes

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

formam uma base do espaço vetorial M_{22} das matrizes 2×2. Podemos construir um isomorfismo $T : M_{22} \to R^4$ escrevendo primeiro uma matriz A de M_{22} em termos dos vetores da base como

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e então definindo T como

$$T(A) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

Assim, por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{T} (1, -3, 4, 6)$$

Mais geralmente, essa ideia pode ser usada para mostrar que o espaço vetorial M_{mn} das matrizes $m \times n$ com entradas reais é isomorfo a R^{mn}.

REQUER CÁLCULO

▶ EXEMPLO 9 Derivação por multiplicação matricial

Considere a transformação de derivação $D : P_3 \to P_2$ no espaço vetorial dos polinômios de grau no máximo 3. Se usarmos os isomorfismos naturais para associar P_3 e P_2 a R^4 e R^3, respectivamente, então a transformação D produz uma transformação matricial correspondente de R^4 em R^3. Mais especificamente, a transformação de derivação

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \xrightarrow{D} a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

produz a transformação matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \end{bmatrix}$$

Assim, por exemplo, a derivada

$$\frac{d}{dx}(2 + x + 4x^2 - x^3) = 1 + 8x - 3x^2$$

pode ser calculada com o produto matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Essa ideia é útil na construção de algoritmos numéricos para efetuar cálculos de derivação. ◀

Isomorfismos de espaços com produto interno

Se V for um espaço com produto interno real de dimensão n, então ambos V e R^n têm, além de sua estrutura algébrica, uma estrutura geométrica resultante de seus respectivos produtos internos. Assim, é razoável perguntar se existe um isomorfismo de V em R^n que preserve a estrutura geométrica, bem como a estrutura algébrica. Por exemplo, gostaríamos que vetores ortogonais em V tivessem como contrapartida vetores ortogonais em R^n e que conjuntos ortonormais em V correspondessem a conjuntos ortonormais em R^n.

Para um isomorfismo preservar a estrutura geométrica, é óbvio que ele deve preservar o produto interno, já que as noções de comprimento, ângulo e ortogonalidade têm por base o produto interno. Assim, se V e W forem espaços com produto interno, dizemos que um isomorfismo $T : V \to W$ é um ***isomorfismo de espaços com produto interno*** se

$$\langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$$

Pode ser provado que se V for um espaço com produto interno real de dimensão n qualquer e R^n tiver o produto interno euclidiano (o produto escalar), então existe um isomorfismo de espaços com produto interno de V em R^n. Por meio de tal isomorfismo, o espaço com produto interno V tem as mesmas estruturas algébrica e geométrica de R^n. Nesse sentido, cada espaço com produto interno real de dimensão n é uma "cópia carbono" de R^n com o produto interno euclidiano que difere desse espaço apenas na notação usada para representar seus vetores.

▶ EXEMPLO 10 Um isomorfismo de espaços com produto interno

Sejam R^n o espaço vetorial das ênuplas reais e M_n o espaço vetorial das matrizes reais $n \times 1$. Em R^n, tomamos o produto interno euclidiano $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e, em M_n, tomamos

o produto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T\mathbf{v}$, em que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são dados em forma de coluna. A aplicação $T: R^n \to M_n$ definida por

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

é um isomorfismo de espaço com produto interno, de modo que a distinção entre o espaço com produto interno R^n e o espaço com produto interno M_n é essencialmente uma diferença de notação, um fato que foi utilizado várias vezes neste texto. ◀

Revisão de conceitos

- Transformação injetora
- Transformação sobrejetora
- Isomorfismo
- Espaços vetoriais isomorfos
- Isomorfismo natural
- Isomorfismo de espaço com produto interno

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se uma transformação linear é injetora.
- Determinar se uma transformação linear é sobre.
- Determinar se uma transformação linear é um isomorfismo.

Conjunto de exercícios 8.2

1. Em cada parte, encontre Nuc(T) e determine se a transformação linear é injetora.

(a) $T: R^2 \to R^2$, com $T(x, y) = (y, x)$

(b) $T: R^2 \to R^2$, com $T(x, y) = (0, 2x + 3y)$

(c) $T: R^2 \to R^2$, com $T(x, y) = (x + y, x - y)$

(d) $T: R^2 \to R^3$, com $T(x, y) = (x, y, x + y)$

(e) $T: R^2 \to R^3$, com $T(x, y) = (x - y, y - x, 2x - 2y)$

(f) $T: R^3 \to R^2$, com $T(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z)$

2. Quais das transformações do Exercício 1 são sobre?

3. Em cada parte, determine se a multiplicação por A é uma transformação linear injetora.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

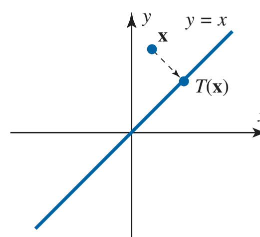
(c) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

4. Quais das transformações do Exercício 3 são sobre?

5. Conforme indicado na figura, seja $T: R^2 \to R^2$ a projeção ortogonal na reta $y = x$.

(a) Encontre o núcleo de T.

(b) T será injetora? Justifique sua resposta.

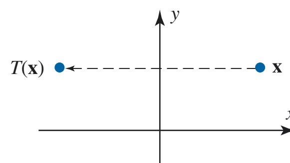


◀ **Figura Ex-5**

6. Conforme indicado na figura, seja $T: R^2 \to R^2$ o operador linear que reflete cada ponto no eixo y.

(a) Encontre o núcleo de T.

(b) T será injetora? Justifique sua resposta.



◀ **Figura Ex-6**

7. Em cada parte, use a informação dada para determinar se a transformação linear T é injetora.

(a) $T: R^m \to R^m$; nul(T) = 0

(b) $T: R^n \to R^n$; por(T) = $n - 1$

(c) $T: R^m \to R^n$; $n < m$

(d) $T: R^n \to R^n$; $R(T) = R^n$

8. Em cada parte, determine se a transformação linear T é injetora.

(a) $T: P_2 \to P_3$ com $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = x(a_0 + a_1x + a_2x^2)$

(b) $T: P_2 \to P_2$ com $T(p(x)) = p(x + 1)$

9. Prove: se V e W forem espaços vetoriais de dimensão finita tais que $\dim(W) < \dim(V)$, então nenhuma transformação linear $T: V \to W$ é injetora.

10. Prove: só pode haver alguma transformação linear de V sobre W se $\dim(V) \geq \dim(W)$.

11. (a) Encontre um isomorfismo entre o espaço vetorial de todas as matrizes 3×3 simétricas e R^6.

(b) Encontre dois isomorfismos diferentes entre o espaço de todas as matrizes 2×2 e R^4.

(c) Encontre um isomorfismo entre o espaço vetorial de todos os polinômios de grau no máximo 3 e tais que $p(0) = 0$ e R^3.

(d) Encontre um isomorfismo entre os espaços vetoriais $\text{ger}\{1, \text{sen}(x), \cos(x)\}$ e R^3.

12. (***Requer cálculo***) Seja $J: P_1 \to R$ a transformação de integração $J(\mathbf{p}) = \int_{-1}^{1} p(x)\,dx$. Determine se J é injetora. Justifique sua resposta.

13. (***Requer cálculo***) Seja V o espaço vetorial $C^1[0, 1]$ e defina $T: V \to R$ por

$$T(\mathbf{f}) = f(0) + 2f'(0) + 3f'(1)$$

Verifique que T é uma transformação linear. Determine se T é injetora e justifique sua resposta.

14. (***Requer cálculo***) Projete um método de usar a multiplicação matricial para derivar funções do espaço vetorial $\text{ger}\{1, \text{sen}(x), \cos(x), \text{sen}(2x), \cos(2x)\}$. Use o método projetado para encontrar a derivada de $3 - 4\,\text{sen}(x) + \text{sen}(2x) + 5\cos(2x)$.

15. Decida se a fórmula $T(a, b, c) = ax^2 + bx + c$ define uma transformação linear injetora de R^3 em P_2. Explique seu raciocínio.

16. Seja E uma matriz elementar 2×2 fixada. Decida se a fórmula $T(A) = EA$ define um operador linear injetor de M_{22}. Explique seu raciocínio.

17. Seja $\mathbf{a}$ um vetor em R^3 fixado. Decida se a fórmula $T(\mathbf{v}) = \mathbf{a} \times \mathbf{v}$ define um operador linear injetor de R^3. Explique seu raciocínio.

18. Prove que um isomorfismo de espaços com produto interno preserva ângulos e distâncias, ou seja, mostre que o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V é igual ao ângulo entre $T(\mathbf{u})$ e $T(\mathbf{v})$ em W e que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V = \|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})\|_W$.

19. É verdade que um isomorfismo de espaços com produto interno transforma conjuntos ortonormais em conjuntos ortonormais? Explique seu raciocínio.

20. Encontre um isomorfismo de espaços com produto interno entre P_5 e M_{23}.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(f), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Os espaços vetoriais R^2 e P_2 são isomorfos.

(b) Se o núcleo de uma transformação linear $T: P_3 \to P_3$ for $\{\mathbf{0}\}$, então T é um isomorfismo.

(c) Qualquer transformação linear de M_{33} em P_9 é um isomorfismo.

(d) Existe algum subespaço de M_{23} que é isomorfo a R^4.

(e) Existe alguma matriz P de tamanho 2×2 tal que $T: M_{22} \to M_{22}$ definida por $T(A) = AP - PA$ seja um isomorfismo.

(f) Existe alguma transformação linear $T: P_4 \to P_4$ tal que o núcleo de T seja isomorfo à imagem de T.

8.3 Composições e transformações inversas

Na Seção 4.10, discutimos a composição e a inversa de transformações matriciais. Esta seção estende algumas daquelas ideias a transformações lineares arbitrárias.

Composição de transformações lineares

A definição seguinte estende a Fórmula (1) da Seção 4.10 a transformações lineares arbitrárias.

DEFINIÇÃO 1 Se $T_1: U \to V$ e $T_2: V \to W$ forem transformações lineares, então a ***composição de T_2 com T_1***, denotada por $T_2 \circ T_1$ (que lemos "T_2 bola T_1") é a aplicação definida pela fórmula

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) = T_2(T_1(\mathbf{u})) \qquad (1)$$

em que $\mathbf{u}$ é um vetor em U.

Observe que a palavra "com" estabelece a ordem nas operações de composição. A composição de T_2 *com* T_1 é

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) = T_2(T_1(\mathbf{u}))$$

enquanto a composição de T_1 *com* T_2 é

$$(T_1 \circ T_2)(\mathbf{u}) = T_1(T_2(\mathbf{u}))$$

Observação Note que essa definição exige que o domínio de T_2 (que é V) contenha a imagem de T_1. Isso é essencial para que a fórmula $T_2(T_1(\mathbf{u}))$ faça sentido (Figura 8.3.1).

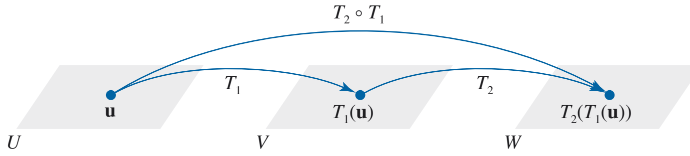


Figura 8.3.1 A composição de T_2 com T_1.

Nosso primeiro teorema mostra que a composição de transformações lineares é, ela mesma, uma transformação linear.

TEOREMA 8.3.1 *Se $T_1 : U \to V$ e $T_2 : V \to W$ forem transformações lineares, então $(T_2 \circ T_1) : U \to W$ também é uma transformação linear.*

Prova Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem vetores em U e c um escalar, então segue de (1) e da linearidade de T_1 e de T_2 que

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T_2(T_1(\mathbf{u}+\mathbf{v})) = T_2(T_1(\mathbf{u}) + T_1(\mathbf{v}))\\ &= T_2(T_1(\mathbf{u})) + T_2(T_1(\mathbf{v}))\\ &= (T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) + (T_2 \circ T_1)(\mathbf{v})\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(c\mathbf{v}) &= T_2(T_1(c\mathbf{v})) = T_2(cT_1(\mathbf{v}))\\ &= cT_2(T_1(\mathbf{v})) = c(T_2 \circ T_2)(\mathbf{v})\end{aligned}$$

Assim, $T_2 \circ T_1$ satisfaz as duas exigências de uma transformação linear. ◀

▶ EXEMPLO 1 Composição de transformações lineares

Sejam $T_1 : P_1 \to P_2$ e $T_2 : P_2 \to P_2$ as transformações lineares dadas pelas fórmulas

$$T_1(p(x)) = xp(x) \quad \text{e} \quad T_2(p(x)) = p(2x + 4)$$

Então a composição $(T_2 \circ T_1) : P_1 \to P_2$ é dada pela fórmula

$$(T_2 \circ T_1)(p(x)) = T_2(T_1(p(x))) = T_2(xp(x)) = (2x + 4)p(2x + 4)$$

Em particular, se $p(x) = c_0 + c_1x$, então

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(p(x)) &= (T_2 \circ T_1)(c_0 + c_1x) = (2x+4)(c_0 + c_1(2x+4))\\ &= c_0(2x+4) + c_1(2x+4)^2\end{aligned}$$

▶ EXEMPLO 2 Composição com o operador identidade

Se $T : V \to V$ for um operador linear qualquer e $I : V \to V$ o operador identidade (Exemplo 3 da Seção 8.1), então, dado qualquer vetor $\mathbf{v}$ em V, temos

$$\begin{aligned}(T \circ I)(\mathbf{v}) &= T(I(\mathbf{v})) = T(\mathbf{v})\\ (I \circ T)(\mathbf{v}) &= I(T(\mathbf{v})) = T(\mathbf{v})\end{aligned}$$

Segue que $T \circ I$ e $I \circ T$ são iguais a T, ou seja,

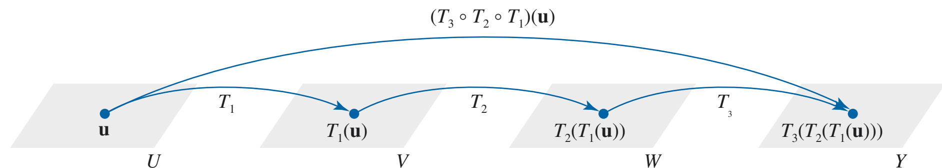
$$T \circ I = T \quad \text{e} \quad I \circ T = T \qquad (2)$$ ◀

Conforme indicado na Figura 8.3.2, podemos definir a composição com mais do que duas transformações lineares. Por exemplo, se

$$T_1 : U \to V, \quad T_2 : V \to W \quad \text{e} \quad T_3 : W \to Y$$

forem transformações lineares, então a composição $T_3 \circ T_2 \circ T_1$ é definida por

$$(T_3 \circ T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) = T_3(T_2(T_1(\mathbf{u}))) \tag{3}$$

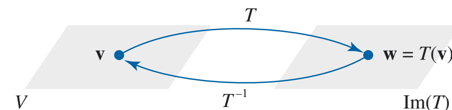


▲ **Figura 8.3.2** A composição de três transformações lineares.

Transformações lineares inversas

No Teorema 4.10.1, mostramos que um operador matricial $T_A : R^n \to R^n$ é injetor se, e só se, a matriz A é invertível, caso em que o operador inverso é $T_{A^{-1}}$. Depois mostramos que se $\mathbf{w}$ for a imagem de um vetor $\mathbf{x}$ pelo operador T_A, então $\mathbf{x}$ é a imagem por $T_{A^{-1}}$ do vetor $\mathbf{w}$ (Figura 4.10.8). Nosso próximo objetivo é estender a noção de invertibilidade a transformações lineares arbitrárias.

Lembre que se $T : V \to W$ for uma transformação linear, então a imagem de T, denotada por $\text{Im}(T)$, é o subespaço de W consistindo em todas as imagens por T de vetores em V. Se T for injetora, então cada vetor $\mathbf{w}$ em $\text{Im}(T)$ é a imagem de um único vetor $\mathbf{v}$ em V. Essa unicidade nos permite definir uma nova aplicação, denominada transformação ***inversa*** de T e denotada por T^{-1}, que transforma $\mathbf{w}$ de volta em $\mathbf{v}$ (Figura 8.3.3).



▶ **Figura 8.3.3** A inversa de T transforma $T(\mathbf{v})$ de volta em $\mathbf{v}$.

Pode ser provado (Exercício 19) que $T^{-1} : \text{Im}(T) \to V$ é uma transformação linear. Além disso, segue da definição de T^{-1} que

$$T^{-1}(T(\mathbf{v})) = T^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \tag{4}$$

$$T(T^{-1}(\mathbf{w})) = T(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \tag{5}$$

de modo que T e T^{-1}, aplicadas em sucessão e em qualquer ordem, cancelam uma o efeito da outra.

Observação É importante notar que se $T : V \to W$ for uma transformação linear injetora, então o domínio de T^{-1} é a *imagem* de T, ao passo que a imagem pode ou não ser todo o W. Contudo, no caso especial em que $T : V \to V$ for um *operador linear* injetor e V um espaço vetorial de dimensão n, segue do Teorema 8.2.2 que T também deve ser sobre, de modo que o domínio de T^{-1} é *todo* o espaço V.

▶ EXEMPLO 3 Uma transformação inversa

No Exemplo 5 da Seção 8.2, mostramos que a transformação linear $T: P_n \to P_{n+1}$ dada por

$$T(\mathbf{p}) = T(p(x)) = xp(x)$$

é injetora; assim, T tem uma inversa. Nesse caso, a imagem de T *não é* todo o espaço P_{n+1}, mas apenas o subespaço de P_{n+1} consistindo em todos os polinômios com termo constante zero. Isso é evidente a partir da fórmula de T, como segue.

$$T(c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n) = c_0 x + c_1 x^2 + \cdots + c_n x^{n+1}$$

Segue que $T^{-1}: \text{Im}(T) \to P_n$ é dada pela fórmula

$$T^{-1}(c_0 x + c_1 x^2 + \cdots + c_n x^{n+1}) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

Por exemplo, no caso em que $n \geq 3$,

$$T^{-1}(2x - x^2 + 5x^3 + 3x^4) = 2 - x + 5x^2 + 3x^3$$

▶ EXEMPLO 4 Uma transformação inversa

Seja $T: R^3 \to R^3$ o operador linear definido pela fórmula

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2, -2x_1 - 4x_2 + 3x_3, 5x_1 + 4x_2 - 2x_3)$$

Determine se T é injetor; se for, encontre $T^{-1}(x_1, x_2, x_3)$.

Solução Segue da Fórmula (12) da Seção 4.9 que a matriz canônica de T é

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

(verifique). Essa matriz é invertível e, pela Fórmula (7) da Seção 4.10, a matriz canônica de T^{-1} é

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Segue que

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = [T^{-1}]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ -11x_1 + 6x_2 + 9x_3 \\ -12x_1 + 7x_2 + 10x_3 \end{bmatrix}$$

Expressando esse resultado em notação horizontal, temos

$$T^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 - 2x_2 - 3x_3, -11x_1 + 6x_2 + 9x_3, -12x_1 + 7x_2 + 10x_3)$$ ◀

Composição de transformações lineares injetoras

O próximo teorema mostra que a composição de transformações lineares injetoras é injetora e relaciona a inversa da composição às inversas das transformações lineares individuais.

TEOREMA 8.3.2 *Se $T_1: U \to V$ e $T_2: V \to W$ forem transformações lineares injetoras, então*

(a) $T_2 \circ T_1$ é injetora e

(b) $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$.

Prova (a) Queremos mostrar que $T_2 \circ T_1$ transforma vetores distintos de U em vetores distintos em W. Mas se **u** e **v** forem vetores distintos em U, então $T_1(\mathbf{u})$ e $T_1(\mathbf{v})$ serão vetores distintos em V, pois T_1 é injetora. Usando isso e o fato de que T_2 é injetora, obtemos que

$$T_2(T_1(\mathbf{u})) \quad \text{e} \quad T_2(T_1(\mathbf{v}))$$

também serão vetores distintos. No entanto, essas expressões também podem ser escritas como

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) \quad \text{e} \quad (T_2 \circ T_1)(\mathbf{v})$$

de modo que $T_2 \circ T_1$ transforma **u** e **v** em vetores distintos em W.

Prova (b) Queremos mostrar que

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(\mathbf{w}) = (T_1^{-1} \circ T_2^{-1})(\mathbf{w})$$

qualquer que seja o vetor **w** na imagem de $T_2 \circ T_1$. Para isso, seja

$$\mathbf{u} = (T_2 \circ T_1)^{-1}(\mathbf{w}) \tag{6}$$

de modo que o nosso objetivo é mostrar que

$$\mathbf{u} = (T_1^{-1} \circ T_2^{-1})(\mathbf{w})$$

Observe que de (6) segue

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$$

ou, equivalentemente,

$$T_2(T_1(\mathbf{u})) = \mathbf{w}$$

Agora, aplicando T_2^{-1} em cada lado dessa equação, depois aplicando T_1^{-1} em cada lado do resultado e, então, usando (4), obtemos (verifique)

$$\mathbf{u} = T_1^{-1}(T_2^{-1}(\mathbf{w}))$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbf{u} = (T_1^{-1} \circ T_2^{-1})(\mathbf{w}) \quad ◀$$

Em palavras, a parte (*b*) do Teorema 8.3.2 afirma que *a inversa de uma composição é a composição das inversas na ordem inversa.* Esse resultado pode ser estendido a composições de três ou mais transformações lineares; por exemplo,

$$(T_3 \circ T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1} \circ T_3^{-1} \tag{7}$$

Note a ordem das matrizes nos índices dos dois lados de (8).

No caso especial em que T_A, T_B e T_C forem operadores matriciais em R^n, a Fórmula (7) pode ser escrita como

$$(T_C \circ T_B \circ T_A)^{-1} = T_A^{-1} \circ T_B^{-1} \circ T_C^{-1}$$

ou, alternativamente,

$$(T_{CBA})^{-1} = T_{A^{-1}B^{-1}C^{-1}} \tag{8}$$

Revisão de conceitos

- Composição de transformações lineares
- Inversa de uma transformação linear

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar o domínio e a imagem da composição de duas transformações lineares.
- Encontrar a composição de duas transformações lineares.
- Determinar se uma transformação linear tem uma inversa.
- Encontrar a inversa de uma transformação linear.

Conjunto de exercícios 8.3

1. Em cada caso, encontre $(T_2 \circ T_1)(x, y)$.

(a) $T_1(x, y) = (2x, 3y)$, $T_2(x, y) = (x - y, x + y)$

(b) $T_1(x, y) = (x - 3y, 0)$, $T_2(x, y) = (4x - 5y, 3x - 6y)$

(c) $T_1(x, y) = (2x, -3y, x + y)$,
$T_2(x, y, z) = (x - y, y + z)$

(d) $T_1(x, y) = (x - y, y, x)$,
$T_2(x, y, z) = (0, x + y + z)$

2. Em cada caso, encontre $(T_2 \circ T_1)(x, y)$.

(a) $T_1(x, y) = (-2y, 3x, x - 2y)$, $T_2(x, y, z) = (y, z, x)$,
$T_3(x, y, z) = (x + z, y - z)$

(b) $T_1(x, y) = (x + y, y, -x)$,
$T_2(x, y, z) = (0, x + y + z, 3y)$,
$T_3(x, y, z) = (3x + 2y, 4z - x - 3y)$

3. Sejam $T_1 : M_{22} \to R$ e $T_2 : M_{22} \to M_{22}$ as transformações lineares dadas por $T_1(A) = \text{tr}(A)$ e $T_2(A) = A^T$.

(a) Encontre $(T_1 \circ T_2)(A)$ com $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

(b) Você consegue encontrar $(T_1 \circ T_2)(A)$? Explique.

4. Sejam $T_1 : P_n \to P_n$ e $T_2 : P_n \to P_n$ os operadores lineares dados por $T_1(p(x)) = p(x - 1)$ e $T_2(p(x)) = p(x + 1)$. Encontre $(T_1 \circ T_2)(p(x))$ e $(T_2 \circ T_1)(p(x))$.

5. Seja $T_1 : V \to V$ a dilatação $T_1(\mathbf{v}) = 4\mathbf{v}$. Encontre um operador linear $T_2 : V \to V$ tal que $T_1 \circ T_2 = I$ e $T_2 \circ T_1 = I$.

6. Suponha que as transformações lineares $T_1 : P_2 \to P_2$ e $T_2 : P_2 \to P_3$ sejam dadas pelas fórmulas $T_1(p(x)) = p(x + 1)$ e $T_2(p(x)) = xp(x)$. Encontre $(T_2 \circ T_1)(a_0 + a_1x + a_2x^2)$.

7. Seja $q_0(x)$ um polinômio de grau m fixado e defina a função T de domínio P_n pela fórmula $T(p(x)) = p(q_0(x))$. Mostre que T é uma transformação linear.

8. Use a definição de $T_3 \circ T_2 \circ T_1$ dada na Fórmula (3) para provar que

(a) $T_3 \circ T_2 \circ T_1$ é uma transformação linear.

(b) $T_3 \circ T_2 \circ T_1 = (T_3 \circ T_2) \circ T_1$.

(c) $T_3 \circ T_2 \circ T_1 = T_3 \circ (T_2 \circ T_1)$.

9. Seja $T : R^3 \to R^3$ a projeção ortogonal de R^3 sobre o plano xy. Mostre que $T \circ T = T$.

10. Em cada parte, seja $T : R^2 \to R^2$ a multiplicação por A. Determine se T tem uma inversa; se tiver, encontre

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$$

(a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

11. Em cada parte, seja $T : R^3 \to R^3$ a multiplicação por A. Determine se T tem uma inversa; se tiver, encontre

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)$$

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

12. Em cada parte, determine se o operador linear $T : R^n \to R^n$ é injetor; se for, encontre $T^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

(a) $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$

(b) $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1)$

(c) $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$

13. Seja $T : R^n \to R^n$ o operador linear definido pela fórmula

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n)$$

em que $a_1, \ldots, a_n$ são constantes.

(a) Sob quais condições T terá uma inversa?

(b) Supondo que as condições determinadas na parte (a) estejam satisfeitas, encontre uma fórmula para $T^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

14. Sejam $T_1 : R^2 \to R^2$ e $T_2 : R^2 \to R^2$ os operadores lineares dados pelas fórmulas

$$T_1(x, y) = (x + y, x - y) \quad \text{e} \quad T_2(x, y) = (2x + y, x - 2y)$$

(a) Mostre que T_1 e T_2 são injetores.

(b) Encontre fórmulas para

$$T_1^{-1}(x, y), \quad T_2^{-1}(x, y), \quad (T_2 \circ T_1)^{-1}(x, y)$$

(c) Verifique que $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$.

15. Sejam $T_1 : P_2 \to P_3$ e $T_2 : P_3 \to P_3$ os operadores lineares dados pelas fórmulas

$$T_1(p(x)) = xp(x) \quad \text{e} \quad T_2(p(x)) = p(x + 1)$$

(a) Encontre fórmulas para $T_1^{-1}(p(x))$, $T_2^{-1}(p(x))$ e $(T_2 \circ T_1)^{-1}(p(x))$.

(b) Verifique que $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$.

16. Sejam $T_A : R^3 \to R^3$, $T_B : R^3 \to R^3$ e $T_C : R^3 \to R^3$ as reflexões nos planos xy, xz e yz, respectivamente. Verifique a Fórmula (8) com esses operadores.

17. Seja $T : P_1 \to R^2$ a função definida pela fórmula

$$T(p(x)) = (p(0), p(1))$$

(a) Encontre $T(1 - 2x)$.

(b) Mostre que T é uma transformação linear.

(c) Mostre que T é injetora.

(d) Encontre $T^{-1}(2, 3)$ e esboce seu gráfico.

18. Seja $T : R^2 \to R^2$ o operador linear dado pela fórmula $T(x, y) = (x + ky, -y)$. Mostre que T é injetor e que $T^{-1} = T$, qualquer que seja o valor real de k.

19. Prove: se $T : V \to W$ for uma transformação linear injetora, então $T^{-1} : \text{Im}(T) \to V$ é uma transformação linear injetora.

▶ Nos Exercícios **20–21**, em cada caso, determine se $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$. ◀

20. (a) $T_1 : R^2 \to R^2$ é a projeção ortogonal no eixo x e $T_2 : R^2 \to R^2$ é a projeção ortogonal no eixo y.

(b) $T_1 : R^2 \to R^2$ é a rotação em torno da origem pelo ângulo θ_1 e $T_2 : R^2 \to R^2$ é a rotação em torno da origem pelo ângulo θ_2.

(c) $T_1 : R^3 \to R^3$ é a rotação em torno do eixo x pelo ângulo θ_1 e $T_2 : R^3 \to R^3$ é a rotação em torno do eixo z pelo ângulo θ_2.

21. (a) $T_1 : R^2 \to R^2$ é a reflexão no eixo x e $T_2 : R^2 \to R^2$ é a reflexão no eixo y.

(b) $T_1 : R^2 \to R^2$ é a projeção ortogonal no eixo x e $T_2 : R^2 \to R^2$ é a rotação anti-horária pelo ângulo θ.

(c) $T_1 : R^3 \to R^3$ é a dilatação de fator k e $T_2 : R^3 \to R^3$ é a rotação anti-horária em torno do eixo z pelo ângulo θ.

22. (***Requer Cálculo***) Sejam

$$D(\mathbf{f}) = f'(x) \quad \text{e} \quad J(\mathbf{f}) = \int_0^x f(t)\,dt$$

as transformações lineares dos Exemplos 11 e 12 da Seção 8.1. Em cada parte, encontre $(J \circ D)(\mathbf{f})$.

(a) $\mathbf{f}(x) = x^2 + 3x + 2$ (b) $\mathbf{f}(x) = \text{sen}\, x$

(c) $\mathbf{f}(x) = e^x + 3$

23. (***Requer Cálculo***) O teorema fundamental do Cálculo implica que a integração e a derivação são ações que se cancelam mutuamente. Defina a transformação $D : P_n \to P_{n-1}$ por $D(p(x)) = p'(x)$ e defina $J : P_{n-1} \to P_n$ por

$$J(p(x)) = \int_0^x p(t)\,dt$$

(a) Mostre que D e J são transformações lineares.

(b) Explique por que J não é a transformação inversa de D.

(c) Será possível restringir o domínio ou o contradomínio de D e J de tal modo que sejam transformações lineares inversas?

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(h), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) A composição de duas transformações lineares também é uma transformação linear.

(b) Se $T_1 : V \to V$ e $T_2 : V \to V$ forem dois operadores lineares quaisquer, então $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.

(c) A inversa de uma transformação linear é uma transformação linear.

(d) Se uma transformação linear T tiver uma inversa, então o núcleo de T será o espaço nulo.

(e) Se $T : R^2 \to R^2$ for a projeção ortogonal sobre o eixo x, então $T^{-1} : R^2 \to R^2$ associa a cada ponto do eixo x uma reta que é perpendicular ao eixo x.

(f) Se $T_1 : U \to V$ e $T_2 : V \to W$ forem transformações lineares e se T_1 não for injetora, então tampouco $T_2 \circ T_1$ será injetora.

8.4 Matrizes de transformações lineares arbitrárias

Nesta seção, mostramos que uma transformação linear arbitrária de qualquer espaço vetorial de dimensão n num espaço vetorial de dimensão m pode ser considerada como uma transformação matricial apropriada de R^n em R^m. Essa ideia é utilizada em cálculos computacionais, pois os computadores são muito bons em cálculos matriciais.

Matrizes de transformações lineares

Suponha que V seja um espaço vetorial de dimensão n, W um espaço vetorial de dimensão m e $T : V \to W$ uma transformação linear. Suponha também que B seja uma base de V, B' uma base de W e que, dado qualquer $\mathbf{x}$ em V, a matriz de coordenadas de $\mathbf{x}$ e $T(\mathbf{x})$ sejam $[\mathbf{x}]_B$ e $[T(\mathbf{x})]_{B'}$, respectivamente (Figura 8.4.1).

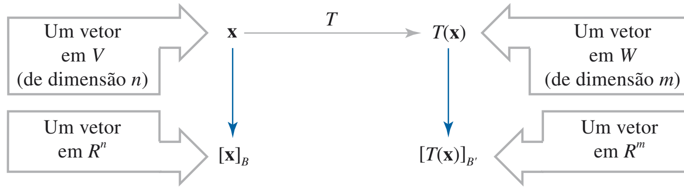


Figura 8.4.1

Nosso objetivo é encontrar uma matriz A de tamanho $m \times n$ tal que a multiplicação por A transforma o vetor $[\mathbf{x}]_B$ no vetor $[T(\mathbf{x})]_{B'}$, qualquer que seja o vetor $\mathbf{v}$ em V (Figura 8.4.2*a*). Se conseguirmos isso, então, conforme sugere a Figura 8.4.2*b*, seremos capazes de executar a transformação linear T usando a multiplicação matricial e o procedimento *indireto* indicado a seguir.

Encontrando $T(\mathbf{x})$ indiretamente

Passo 1. Calcule o vetor de coordenadas $[\mathbf{x}]_B$.

Passo 2. Multiplique $[\mathbf{x}]_B$ à esquerda por A para obter $[T(\mathbf{x})]_{B'}$.

Passo 3. Reconstrua $T(\mathbf{x})$ a partir de seu vetor de coordenadas $[T(\mathbf{x})]_{B'}$.

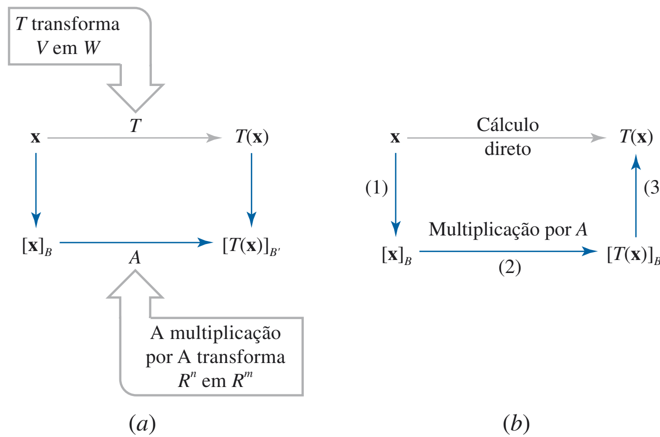


Figura 8.4.2

O passo fundamental para executar esse plano é encontrar uma matriz A de tamanho $m \times n$ com a propriedade de que

$$A[\mathbf{x}]_B = [T(\mathbf{x})]_{B'} \tag{1}$$

Para isso, sejam $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ uma base do espaço vetorial V de dimensão n e $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ uma base do espaço vetorial W de dimensão m. Como a Equação (1) deve valer qualquer que seja o vetor em V, deve valer em particular com os vetores de base B, ou seja,

$$A[\mathbf{u}_1]_B = [T(\mathbf{u}_1)]_{B'}, \quad A[\mathbf{u}_2]_B = [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}, \ldots, \quad A[\mathbf{u}_n]_B = [T(\mathbf{u}_n)]_{B'} \tag{2}$$

Mas

$$[\mathbf{u}_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{u}_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \quad [\mathbf{u}_n]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$A[\mathbf{u}_1]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

$$A[\mathbf{u}_2]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$A[\mathbf{u}_n]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

A substituição desses resultados em (2) fornece

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = [T(\mathbf{u}_1)]_{B'}, \quad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} = [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}, \ldots, \quad \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = [T(\mathbf{u}_n)]_{B'}$$

o que mostra que as colunas sucessivas de A são os vetores de coordenadas de

$$T(\mathbf{u}_1), T(\mathbf{u}_2), \ldots, T(\mathbf{u}_n)$$

em relação à base B'. Assim, a matriz A que completa a gráfico na Figura 8.4.2*a* é

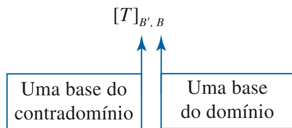
$$A = \big[[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} \mid \cdots \mid [T(\mathbf{u}_n)]_{B'}\big] \tag{3}$$

Dizemos que essa é a ***matriz de T em relação às bases B e B′***, que denotamos por $[T]_{B',B}$. Com essa notação, podemos reescrever a Fórmula (3) como

$$[T]_{B',B} = \big[[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} \mid \cdots \mid [T(\mathbf{u}_n)]_{B'}\big] \tag{4}$$

e, por (1), essa matriz tem a propriedade de que

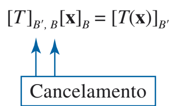
$$[T]_{B',B}[\mathbf{x}]_B = [T(\mathbf{x})]_{B'} \tag{5}$$



▲ **Figura 8.4.3**

Deixamos como um exercício mostrar que, no caso especial em que $T_C: R^n \to R^m$ é a multiplicação por C e em que B e B' são as bases canônicas de R^n e R^m, respectivamente, então

$$[T_C]_{B',B} = C \tag{6}$$



▲ **Figura 8.4.4**

Observação Observe que na notação $[T]_{B',B}$, o índice da direita é uma base do domínio de T e o índice da esquerda é uma base do contradomínio de T (Figura 8.4.3). Além disso, observe como o índice B parece "cancelar" na Fórmula (5) (Figura 8.4.4).

▶ EXEMPLO 1 A matriz de uma transformação linear

Seja $T : P_1 \to P_2$ a transformação linear definida por

$$T(p(x)) = xp(x)$$

Encontre a matriz de T em relação às bases canônicas

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \quad \text{e} \quad B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$$

em que

$$\mathbf{u}_1 = 1, \quad \mathbf{u}_2 = x\,; \quad \mathbf{v}_1 = 1, \quad \mathbf{v}_2 = x, \quad \mathbf{v}_3 = x^2$$

Solução Pela fórmula dada para T, obtemos

$$T(\mathbf{u}_1) = T(1) = (x)(1) = x$$
$$T(\mathbf{u}_2) = T(x) = (x)(x) = x^2$$

Por inspeção, os vetores de coordenadas de $T(\mathbf{u}_1)$ e $T(\mathbf{u}_2)$ em relação a B' são

$$[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

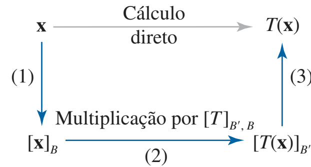
Assim, a matriz de T em relação a B e B' é

$$[T]_{B',B} = \big[[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}\big] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▶ EXEMPLO 2 O procedimento de três passos

Considere a transformação linear $T : P_1 \to P_2$ do Exemplo 1 e use o procedimento de três passos descrito na figura seguinte para calcular

$$T(a + bx) = x(a + bx) = ax + bx^2$$



Solução

Passo 1. O vetor de coordenadas de $\mathbf{x} = a + bx$ em relação à base $B = \{1, x\}$ é

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Passo 2. Multiplicando $[\mathbf{x}]_B$ pela matriz $[T]_{B',B}$ encontrada no Exemplo 1, obtemos

$$[T]_{B',B}[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix} = [T(\mathbf{x})]_{B'}$$

Embora o Exemplo 2 seja simples, o procedimento ilustrado é aplicável a problemas de grande complexidade.

Passo 3. Reconstruindo $T(\mathbf{x}) = T(a + bx)$ a partir de $[T(\mathbf{x})]_{B'}$, obtemos

$$T(a + bx) = 0 + ax + bx^2 = ax + bx^2$$

▶ EXEMPLO 3 A matriz de uma transformação linear

Seja $T: R^2 \to R^3$ a transformação linear definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -5x_1 + 13x_2 \\ -7x_1 + 16x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 13 \\ -7 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Encontre a matriz da transformação T em relação às bases $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de R^2 e $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de R^3, sendo

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solução Pela fórmula de T,

$$T(\mathbf{u}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{u}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Expressando esses vetores como combinações lineares de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$, obtemos (verifique)

$$T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3, \quad T(\mathbf{u}_2) = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$$

Assim,

$$[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e portanto,

$$[T]_{B',B} = \big[[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}\big] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad ◀$$

Observação O Exemplo 3 deixa claro que uma transformação linear específica geralmente tem múltiplas representações, cada uma dependendo das bases escolhidas. Nesse caso, ambas as matrizes

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 13 \\ -7 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T]_{B',B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

representam a transformação T, a primeira em relação às bases canônicas de R^2 e R^3, a segunda em relação às bases B e B' fornecidas no exemplo.

Matrizes de operadores lineares

No caso especial em que $V = W$ (de modo que $T: V \to V$ é um operador linear), é costume tomar $B = B'$ na construção de uma matriz de T. Nesse caso, a matriz resultante é denominada ***matriz de T em relação à base B*** e costuma ser denotada por $[T]_B$ em vez de $[T]_{B,B}$. Se $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, então as Fórmulas (4) e (5) se tornam

$$[T]_B = \big[[T(\mathbf{u}_1)]_B \mid [T(\mathbf{u}_2)]_B \mid \cdots \mid [T(\mathbf{u}_n)]_B\big] \tag{7}$$

$$[T]_B[\mathbf{x}]_B = [T(\mathbf{x})]_B \tag{8}$$

Dito informalmente, as Fórmulas (7) e (8) afirmam que *a matriz de T, quando multiplicada pelo vetor de coordenadas de* **x** *produz o vetor de coordenadas de T*(**x**).

No caso especial em que $T: R^n \to R^n$ é um operador matricial, digamos a multiplicação por A e em que B é a base canônica de R^n, então a Fórmula (7) simplifica para

$$[T]_B = A \tag{9}$$

Matrizes de operadores identidade

Lembre que o operador identidade $I : V \to V$ transforma cada vetor de V nele mesmo, ou seja, $I(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, qualquer que seja o vetor $\mathbf{x}$ em V. O exemplo seguinte mostra que se V for de dimensão n, então a matriz de I em relação a *qualquer* base B de V é a matriz identidade $n \times n$.

▶ EXEMPLO 4 Matrizes de operadores identidade

Se $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ for uma base de um espaço vetorial V de dimensão finita e se $I : V \to V$ for o operador identidade de V, então

$$I(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, \quad I(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2, \ldots, I(\mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_n$$

Segue que

$$[I]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow$$

$$[I(\mathbf{u}_1)]_B \quad [I(\mathbf{u}_2)]_B \quad [I(\mathbf{u}_n)]_B$$

▶ EXEMPLO 5 Operador linear de P_2

Seja $T : P_2 \to P_2$ o operador linear definido por

$$T(p(x)) = p(3x - 5)$$

isto é, $T(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) = c_0 + c_1(3x - 5) + c_2(3x - 5)^2$.

(a) Encontre $[T]_B$ em relação à base $B = \{1, x, x^2\}$.

(b) Use o procedimento indireto para calcular $T(1 + 2x + 3x^2)$.

(c) Confira o resultado em (b) calculando diretamente $T(1 + 2x + 3x^2)$.

Solução (*a*) Pela fórmula de T,

$$T(1) = 1, \quad T(x) = 3x - 5, \quad T(x^2) = (3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

portanto,

$$[T(1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(x)]_B = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(x^2)]_B = \begin{bmatrix} 25 \\ -30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Solução (*b*)

Passo 1. O vetor de coordenadas de $\mathbf{p} = 1 + 2x + 3x^2$ em relação à base $B = \{1, x, x^2\}$ é

$$[\mathbf{p}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Passo 2. Multiplicando $[\mathbf{p}]_B$ pela matriz $[T]_B$ encontrada na parte (a), obtemos

$$[T]_B[\mathbf{p}]_B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ -84 \\ 27 \end{bmatrix} = [T(\mathbf{p})]_B$$

Passo 3. Reconstruindo $T(\mathbf{p}) = T(1 + 2x + 3x^2)$ a partir de $[T(\mathbf{p})]_B$, obtemos

$$T(1 + 2x + 3x^2) = 66 - 84x + 27x^2$$

Solução (c) Calculando diretamente,

$$\begin{aligned} T(1 + 2x + 3x^2) &= 1 + 2(3x - 5) + 3(3x - 5)^2 \\ &= 1 + 6x - 10 + 27x^2 - 90x + 75 \\ &= 66 - 84x + 27x^2 \end{aligned}$$

de acordo com o resultado em (b). ◀

Matrizes de composições e de inversas

Concluímos esta seção mencionando sem prova dois teoremas que generalizam as Fórmulas (4) e (7) da Seção 4.10.

TEOREMA 8.4.1 *Se $T_1 : U \to V$ e $T_2 : V \to W$ forem transformações lineares e B, B'' e B' bases de U, V e W, respectivamente, então*

$$[T_2 \circ T_1]_{B',B} = [T_2]_{B',B''}[T_1]_{B'',B} \qquad (10)$$

TEOREMA 8.4.2 *Se $T : V \to V$ for um operador linear e B uma base de V, as afirmações seguintes são equivalentes.*

(a) T é injetor.

(b) $[T]_B$ é invertível.

Além disso, se valerem essas condições equivalentes, então

$$[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1} \qquad (11)$$

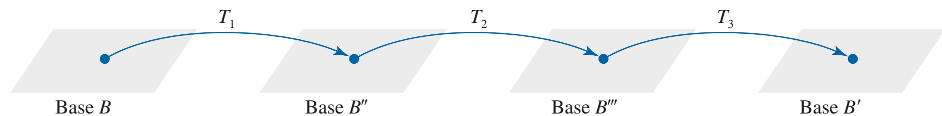
$$[T_2 \circ T_1]_{B',B} = [T_2]_{B',B''}[T_1]_{B'',B}$$

Cancelamento Cancelamento

▲ **Figura 8.4.5**

Observação Observe como, em (10), o índice interno B'' (a base do espaço intermediário V) parece "cancelar", deixando como índices somente as bases do domínio e do contradomínio da composta (Figura 8.4.5). Esse cancelamento de índices internos sugere a extensão seguinte da Fórmula (10) da composição de três transformações lineares (Figura 8.4.6).

$$[T_3 \circ T_2 \circ T_1]_{B',B} = [T_3]_{B',B'''}[T_2]_{B''',B''}[T_1]_{B'',B} \qquad (12)$$



▲ **Figura 8.4.6**

O próximo exemplo ilustra o Teorema 8.4.1.

▶ EXEMPLO 6 Composição

Sejam $T_1 : P_1 \to P_2$ a transformação linear definida por

$$T_1(p(x)) = xp(x)$$

e $T_2 : P_2 \to P_2$ o operador linear definido por

$$T_2(p(x)) = p(3x - 5)$$

Então a composição $(T_2 \circ T_1) : P_1 \to P_2$ é dada por

$$(T_2 \circ T_1)(p(x)) = T_2(T_1(p(x))) = T_2(xp(x)) = (3x - 5)p(3x - 5)$$

Assim, se $p(x) = c_0 + c_1x$, então

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(c_0 + c_1x) &= (3x - 5)(c_0 + c_1(3x - 5)) \\ &= c_0(3x - 5) + c_1(3x - 5)^2 \end{aligned} \tag{13}$$

Nesse exemplo, P_1 desempenha o papel de U no Teorema 8.4.1 e P_2, o de ambos V e W; assim, podemos tomar $B' = B''$ em (10), o que simplifica a fórmula para

$$[T_2 \circ T_1]_{B',B} = [T_2]_{B'}\,[T_1]_{B',B} \tag{14}$$

Para base de P_1 escolhemos $B = \{1, x\}$ e para base de P_2 escolhemos $B' = \{1, x, x^2\}$. Nos Exemplos 1 e 5, mostramos que

$$[T_1]_{B',B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Assim, segue de (14) que

$$[T_2 \circ T_1]_{B',B} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 25 \\ 3 & -30 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Para conferir, calculamos $[T_2 \circ T_1]_{B',B}$ diretamente da Fórmula (4). Como $B = \{1, x\}$, segue da Fórmula (4) com $\mathbf{u}_1 = 1$ e $\mathbf{u}_2 = x$ que

$$[T_2 \circ T_1]_{B',B} = \big[[(T_2 \circ T_1)(1)]_{B'} \mid [(T_2 \circ T_1)(x)]_{B'}\big] \tag{16}$$

Usando (13), obtemos

$$(T_2 \circ T_1)(1) = 3x - 5 \quad \text{e} \quad (T_2 \circ T_1)(x) = (3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

Disso e do fato de termos $B' = \{1, x, x^2\}$, segue que

$$[(T_2 \circ T_1)(1)]_{B'} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [(T_2 \circ T_1)(x)]_{B'} = \begin{bmatrix} 25 \\ -30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Substituindo em (16), obtemos

$$[T_2 \circ T_1]_{B',B} = \begin{bmatrix} -5 & 25 \\ 3 & -30 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

que confere com (15). ◀

Revisão de conceitos

- Matriz de uma transformação linear em relação a bases
- Matriz de um operador linear em relação a uma base
- O procedimento de três passos para encontrar $T(\mathbf{x})$

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar a matriz de uma transformação linear $T: V \to W$ em relação a bases de V e W.
- Dada uma transformação linear $T: V \to W$, encontrar $T(\mathbf{x})$ usando a matriz de T em relação a bases de V e W.

Conjunto de exercícios 8.4

1. Seja $T: P_2 \to P_3$ a transformação linear definida por $T(p(x)) = xp(x)$.

(a) Encontre a matriz de T em relação às bases canônicas

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \quad \text{e} \quad B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$$

em que

$$\mathbf{u}_1 = 1, \quad \mathbf{u}_2 = x, \quad \mathbf{u}_3 = x^2$$
$$\mathbf{v}_1 = 1, \quad \mathbf{v}_2 = x, \quad \mathbf{v}_3 = x^2, \quad \mathbf{v}_4 = x^3$$

(b) Verifique que a matriz $[T]_{B',B}$ obtida na parte (a) satisfaz a Fórmula (5) com qualquer vetor $x = c_0 + c_1x + c_2x^2$ em P_2.

2. Seja $T: P_2 \to P_1$ a transformação linear definida por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$$

(a) Encontre a matriz de T em relação às bases canônicas $B = \{1, x, x^2\}$ e $B' = \{1, x\}$ de P_2 e P_1.

(b) Verifique que a matriz $[T]_{B',B}$ obtida na parte (a) satisfaz a Fórmula (5) com qualquer vetor $x = c_0 + c_1x + c_2x^2$ em P_2.

3. Seja $T: P_2 \to P_2$ o operador linear definido por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)^2$$

(a) Encontre a matriz de T em relação à base canônica $B = \{1, x, x^2\}$ de P_2.

(b) Verifique que a matriz $[T]_B$ obtida na parte (a) satisfaz a Fórmula (8) com qualquer vetor $x = a_0 + a_1x + a_2x^2$ em P_2.

4. Seja $T: R^2 \to R^2$ o operador linear definido por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

e seja $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ a base em que

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre $[T]_B$.

(b) Verifique que a Fórmula (8) vale com qualquer vetor $\mathbf{x}$ em R^2.

5. Seja $T: R^2 \to R^3$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre a matriz $[T]_{B',B}$ em relação às bases $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, em que

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) Verifique que a Fórmula (5) vale com qualquer vetor em R^2.

6. Seja $T: R^3 \to R^3$ o operador linear definido por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_1, x_1 - x_3)$$

(a) Encontre a matriz de T em relação à base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, em que

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)$$

(b) Verifique que a Fórmula (8) com qualquer vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ em R^3.

(c) T será injetor? Se for, encontre a matriz de T^{-1} em relação à base B.

7. Seja $T: P_2 \to P_2$ o operador linear definido por $T(p(x)) = p(2x + 1)$, ou seja,

$$T(c_0 + c_1x + c_2x^2) = c_0 + c_1(2x + 1) + c_2(2x + 1)^2$$

(a) Encontre $[T]_B$ em relação à base $B = \{1, x, x^2\}$.

(b) Use o procedimento de três passos ilustrado no Exemplo 2 para calcular $T(2 - 3x + 4x^2)$.

(c) Confira o resultado obtido na parte (b) calculando diretamente $T(2 - 3x + 4x^2)$.

8. Seja $T: P_2 \to P_3$ a transformação linear definida por $T(p(x)) = xp(x - 3)$, ou seja,

$$T(c_0 + c_1x + c_2x^2) = x(c_0 + c_1(x - 3) + c_2(x - 3)^2)$$

(a) Encontre $[T]_{B',B}$ em relação às bases $B = \{1, x, x^2\}$ e $B' = \{1, x, x^2, x^3\}$.

(b) Use o procedimento de três passos ilustrado no Exemplo 2 para calcular $T(1 + x - x^2)$.

(c) Confira o resultado obtido na parte (b) calculando diretamente $T(1 + x - x^2)$.

9. Sejam $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ e seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

a matriz de $T: R^2 \to R^2$ em relação à base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

(a) Encontre $[T(\mathbf{v}_1)]_B$ e $[T(\mathbf{v}_2)]_B$.

(b) Encontre $T(\mathbf{v}_1)$ e $T(\mathbf{v}_2)$.

(c) Encontre uma fórmula para $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$.

(d) Use a fórmula obtida em (c) para calcular $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

10. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz de $T: R^4 \to R^3$ em relação às bases $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ e $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, em que

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre $[T(\mathbf{v}_1)]_{B'}$, $[T(\mathbf{v}_2)]_{B'}$, $[T(\mathbf{v}_3)]_{B'}$ e $[T(\mathbf{v}_4)]_{B'}$.

(b) Encontre $T(\mathbf{v}_1)$, $T(\mathbf{v}_2)$, $T(\mathbf{v}_3)$ e $T(\mathbf{v}_4)$.

(c) Encontre uma fórmula para $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right)$.

(d) Use a fórmula obtida em (c) para calcular $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.

11. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ a matriz de $T: P_2 \to P_2$ em relação às bases $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, em que $\mathbf{v}_1 = 3x + 3x^2$, $\mathbf{v}_2 = -1 + 3x + 2x^2$, $\mathbf{v}_3 = 3 + 7x + 2x^2$.

(a) Encontre $[T(\mathbf{v}_1)]_B$, $[T(\mathbf{v}_2)]_B$ e $[T(\mathbf{v}_3)]_B$.

(b) Encontre $T(\mathbf{v}_1)$, $T(\mathbf{v}_2)$ e $T(\mathbf{v}_3)$.

(c) Encontre uma fórmula para $T(a_0 + a_1x + a_2x^2)$.

(d) Use a fórmula obtida em (c) para calcular $T(1 + x^2)$.

12. Sejam $T_1: P_1 \to P_2$ a transformação linear definida por

$$T_1(p(x)) = xp(x)$$

e $T_2: P_2 \to P_2$ o operador linear definido por

$$T_2(p(x)) = p(2x + 1)$$

Sejam $B = \{1, x\}$ e $B' = \{1, x, x^2\}$ as bases canônicas de P_1 e P_2.

(a) Encontre $[T_2 \circ T_1]_{B',B}$, $[T_2]_{B'}$ e $[T_1]_{B',B}$.

(b) Enuncie uma fórmula relacionando as matrizes da parte (a).

(c) Verifique que as matrizes da parte (a) satisfazem a fórmula que você enunciou na parte (b).

13. Sejam $T_1: P_1 \to P_2$ a transformação linear definida por

$$T_1(c_0 + c_1x) = 2c_0 - 3c_1x$$

e $T_2: P_2 \to P_3$ a transformação linear definida por

$$T_2(c_0 + c_1x + c_2x^2) = 3c_0x + 3c_1x^2 + 3c_2x^3$$

Sejam $B = \{1, x\}$, $B = \{1, x, x^2\}$ e $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.

(a) Encontre $[T_2 \circ T_1]_{B',B}$, $[T_2]_{B',B''}$ e $[T_1]_{B'',B}$.

(b) Enuncie uma fórmula relacionando as matrizes da parte (a).

(c) Verifique que as matrizes da parte (a) satisfazem a fórmula que você enunciou na parte (b).

14. Mostre que se $T: V \to W$ for a transformação nula, então a matriz de T em relação a quaisquer bases de V e de W é a matriz zero.

15. Mostre que se $T: V \to V$ for uma contração de V (Exemplo 4 da Seção 8.1), então a matriz de T em relação a qualquer base de V é um múltiplo escalar positivo da matriz identidade.

16. Seja $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ uma base de um espaço vetorial V. Encontre a matriz em relação a B do operador linear $T: V \to V$ definido por $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$, $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_4$, $T(\mathbf{v}_4) = \mathbf{v}_1$.

17. Prove que se B e B' forem as bases canônicas de R^n e R^m, respectivamente, então a matriz de uma transformação linear $T: R^n \to R^m$ em relação às bases B e B' será a matriz canônica de T.

18. (***Requer Cálculo***) Seja $D: P_2 \to P_2$ o operador de derivação $D(\mathbf{p}) = p'(x)$. Nas partes (a) e (b), encontre a matriz de D em relação à base $B = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ dada.

(a) $\mathbf{p}_1 = 1$, $\mathbf{p}_2 = x$, $\mathbf{p}_3 = x^2$

(b) $\mathbf{p}_1 = 2$, $\mathbf{p}_2 = 2 - 3x$, $\mathbf{p}_3 = 2 - 3x + 8x^2$

(c) Use a matriz da parte (a) para calcular $D(6 - 6x + 24x^2)$.

(d) Repita as instruções da parte (c) para a matriz da parte (b).

19. (***Requer Cálculo***) Em cada parte, $B = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ é uma base de um subespaço V do espaço vetorial das funções reais definidas na reta real. Nas partes (a), (b) e (c), encontre a matriz do operador derivação $D: V \to V$ em relação a B.

(a) $\mathbf{f}_1 = 1$, $\mathbf{f}_2 = \operatorname{sen} x$, $\mathbf{f}_3 = \cos x$

(b) $\mathbf{f}_1 = 1$, $\mathbf{f}_2 = e^x$, $\mathbf{f}_3 = e^{2x}$

(c) $\mathbf{f}_1 = e^{2x}$, $\mathbf{f}_2 = xe^{2x}$, $\mathbf{f}_3 = x^2e^{2x}$

(d) Use a matriz da parte (c) para calcular $D(4e^{2x} + 6xe^{2x} - 10x^2e^{2x})$.

20. Seja V uma transformação linear de um espaço vetorial V de dimensão quatro com base B' num espaço vetorial W de dimensão sete com base T: $V \to W$. Identifique os quatro espaços vetoriais que contêm os vetores dos vértices do diagrama da figura.

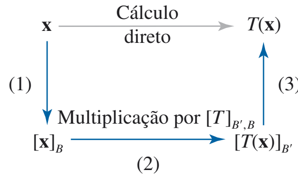


Figura Ex-20

21. Em cada parte, preencha a lacuna na equação.

(a) $[T_2 \circ T_1]_{B',B} = [T_2]__?__[T_1]_{B'',B}$

(b) $[T_3 \circ T_2 \circ T_1]_{B',B} = [T_3]__?__[T_2]_{B''',B''}[T_1]_{B'',B}$

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se a matriz de uma transformação linear $T: V \to W$ em relação a bases de V e W for $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, então existe algum vetor não nulo $\mathbf{x}$ em V tal que $T(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$.

(b) Se a matriz de uma transformação linear $T: V \to W$ em relação a bases de V e W for $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, então existe algum vetor não nulo $\mathbf{x}$ em V tal que $T(\mathbf{x}) = 4\mathbf{x}$.

(c) Se a matriz de uma transformação linear $T: V \to W$ em relação a certas bases de V e W for $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, então T é injetora.

(d) Se $S: V \to V$ e $T: V \to V$ forem operadores lineares e B for uma base de V, então a matriz de $S \circ T$ em relação a B é $[T]_B[S]_B$.

(e) Se $T: V \to V$ for um operador linear invertível e B for uma base de V, então a matriz de T^{-1} em relação a B é $[T]_B^{-1}$.

8.5 Semelhança

A matriz de um operador linear $T: V \to V$ depende da base selecionada para V. Um dos problemas fundamentais da Álgebra Linear é escolher uma base de V que torne a matriz de T tão simples quanto possível, digamos, por exemplo, uma matriz diagonal ou triangular. Nesta seção, estudamos esse problema.

Matrizes simples de operadores lineares

As bases canônicas não necessariamente produzem as matrizes mais simples para operadores lineares. Por exemplo, consideremos o operador matricial $T: R^2 \to R^2$ de matriz canônica

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

e interpretemos $[T]$ como a matriz de T em relação à base canônica $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de R^2. Comparemos essa matriz à matriz de T em relação à base $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ de R^2 dada por

$$\mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Como

$$T(\mathbf{u}'_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{u}'_1 \quad \text{e} \quad T(\mathbf{u}'_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{u}'_2$$

segue que

$$[T(\mathbf{u}'_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T(\mathbf{u}'_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

de modo que a matriz de T em relação à base B' é

$$[T]_{B'} = \left[T(\mathbf{u}'_1)_{B'} \mid T(\mathbf{u}'_2)_{B'} \right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Essa matriz, por ser diagonal, é de formato mais simples que $[T]$ e transmite claramente que o operador T muda a escala de $\mathbf{u}'_1$ pelo fator 2 e a de $\mathbf{u}'_2$ pelo fator 3, uma informação que não é de modo algum aparente em $[T]$.

Um dos principais temas em textos mais avançados de Álgebra Linear é o de determinar a forma "mais simples possível" que pode ser obtida para a matriz de um operador linear pela escolha apropriada da base. Às vezes, é possível obter uma matriz diagonal (como acima, por exemplo); outras vezes, devemos nos contentar com uma matriz triangular ou de alguma outra forma. Neste texto, tocamos apenas levemente nesse importante tópico.

O problema de encontrar uma base que produza a matriz mais simples possível de um operador linear $T: V \to V$ pode ser atacado encontrando primeiro uma matriz de T em relação a uma base *qualquer*, digamos, uma canônica, quando aplicável, e em seguida modificando a base de uma maneira que simplifique a matriz. Antes de continuar com essa ideia, convém rever alguns conceitos sobre mudança de bases.

Um novo ponto de vista sobre matrizes de transição

Lembre das Fórmulas (7) e (8) da Seção 4.6, em que vimos que se $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ e $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ forem bases de um espaço vetorial V, então as matrizes de transição de B para B' e de B' para B são

$$P_{B\to B'} = \big[[\mathbf{u}_1]_{B'} \mid [\mathbf{u}_2]_{B'} \mid \cdots \mid [\mathbf{u}_n]_{B'}\big] \tag{3}$$

$$P_{B'\to B} = \big[[\mathbf{u}'_1]_{B} \mid [\mathbf{u}'_2]_{B} \mid \cdots \mid [\mathbf{u}'_n]_{B}\big] \tag{4}$$

em que as matrizes $P_{B\to B'}$ e $P_{B'\to B}$ são inversas uma da outra. Também mostramos nas Fórmulas (9) e (10) daquela seção que se $\mathbf{v}$ for qualquer vetor em V, então

$$P_{B\to B'}[\mathbf{v}]_B = [\mathbf{v}]_{B'} \tag{5}$$

$$P_{B'\to B}[\mathbf{v}]_{B'} = [\mathbf{v}]_B \tag{6}$$

O próximo teorema mostra que as matrizes de transição nas Fórmula (3) e (4) podem ser vistas como matrizes de operadores identidade.

TEOREMA 8.5.1 *Se B e B' forem bases de um espaço vetorial V de dimensão finita e se $I: V \to V$ for o operador identidade de V, então*

$$P_{B\to B'} = [I]_{B',B} \quad \text{e} \quad P_{B'\to B} = [I]_{B,B'}$$

Prova Suponha que $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ e $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$ sejam bases de V. Usando o fato de que $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, qualquer que seja $\mathbf{v}$ em V, segue da Fórmula (4) da Seção 8.4 que

$$\begin{aligned}
[I]_{B',B} &= \big[[I(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [I(\mathbf{u}_2)]_{B'} \mid \cdots \mid [I(\mathbf{u}_n)]_{B'}\big] \\
&= \big[[\mathbf{u}_1]_{B'} \mid [\mathbf{u}_2]_{B'} \mid \cdots \mid [\mathbf{u}_n]_{B'}\big] \\
&= P_{B\to B'} \qquad \textbf{[Fórmula (3) acima]}
\end{aligned}$$

A prova de $[I]_{B,B'} = P_{B'\to B}$ é análoga. ◄

O efeito da mudança de bases nas matrizes de operadores lineares

Agora estamos prontos para considerar o principal problema desta seção.

Problema Se B e B' forem duas bases de um espaço vetorial V de dimensão finita e $T: V \to V$ for um operador linear, qual é a relação, se houver alguma, entre as matrizes $[T]_B$ e $[T]_{B'}$?

A resposta a essa questão pode ser obtida considerando a composição dos três operadores lineares de V representados na Figura 8.5.1.

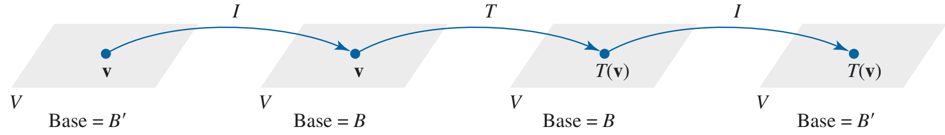


Figura 8.5.1

Nessa figura, **v** é transformado primeiro nele mesmo pelo operador identidade; em seguida, **v** é transformado em $T(\mathbf{v})$ por T e, finalmente, $T(\mathbf{v})$ é transformado nele mesmo pelo operador identidade. Os quatro espaços vetoriais envolvidos na composição são o mesmo (a saber, V), mas as bases desses espaços variam. Como o vetor de partida é **v** e o de chegada é $T(\mathbf{v})$, essa composição produz o mesmo resultado que aplicar diretamente T, ou seja,

$$T = I \circ T \circ I \tag{7}$$

Se tomarmos, conforme aparece na Figura 8.5.1, a base B' nos espaços inicial e final e a base B nos dois espaços intermediários, segue de (7) e da Fórmula (12) da Seção 8.4 (com uma adaptação apropriada nos nomes das bases) que

$$[T]_{B',B'} = [I \circ T \circ I]_{B',B'} = [I]_{B',B}\,[T]_{B,B}[I]_{B,B'} \tag{8}$$

ou, em notação mais simples,

$$[T]_{B'} = [I]_{B',B}\,[T]_B[I]_{B,B'} \tag{9}$$

Podemos simplificar essa fórmula ainda mais usando o Teorema 8.5.1 para reescrevê-la como

$$[T]_{B'} = P_{B\to B'}\,[T]_B P_{B'\to B} \tag{10}$$

Resumindo, temos o teorema seguinte.

TEOREMA 8.5.2 *Sejam $T: V \to V$ um operador linear do espaço vetorial V de dimensão finita e B e B' bases de V. Então*

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P \tag{11}$$

sendo $P = P_{B'\to B}$ e $P^{-1} = P_{B\to B'}$.

$[T]_{B'} = P_{B\to B'}\,[T]_B\,P_{B'\to B}$

Índices externos

Figura 8.5.2

Advertência Não é fácil lembrar se $P = P_{B'\to B}$ (correto) ou $P = P_{B\to B'}$ (errado). Pode ser útil usar o diagrama da Figura 8.5.2 e observar que os índices *externos* das matrizes de transição coincidem com o índice da matriz que fica ao meio.

Na terminologia da Definição 1 da Seção 5.2, o Teorema 8.5.2 nos diz que devem ser semelhantes as matrizes que representarem o mesmo operador linear em bases diferentes. O teorema seguinte é o mesmo Teorema 8.5.2 na linguagem de semelhança.

TEOREMA 8.5.3 *Duas matrizes A e B de tamanho $n \times n$ são semelhantes se, e só se, existem duas bases de R^n (uma para A e uma para B) relativas às quais as matrizes A e B representam o mesmo operador linear. Além disso, se $B = P^{-1}AP$, então P é a matriz de transição da base que dá a matriz B para a base que dá a matriz A.*

▶ **EXEMPLO 1 Matrizes semelhantes representam o mesmo operador linear**

Mostramos no início desta seção que as matrizes

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

representam o mesmo operador linear $T: R^2 \to R^2$. Verifique que essas matrizes são semelhantes, encontrando uma matriz P tal que $D = P^{-1}CP$.

Solução Precisamos encontrar a matriz de transição

$$P = P_{B' \to B} = \left[[\mathbf{u}'_1]_B \mid [\mathbf{u}'_2]_B \right]$$

em que $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ é a base de R^2 dada por (2) e $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$é a base canônica de R^2. Vemos diretamente que

$$\mathbf{u}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{u}'_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$$

do que segue

$$[\mathbf{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$P = P_{B' \to B} = \left[[\mathbf{u}'_1]_B \mid [\mathbf{u}'_2]_B \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Deixamos para o leitor verificar que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e que, portanto,

$$\underset{D}{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}} = \underset{P^{-1}}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}} \underset{P}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} \quad ◀$$

Invariantes de semelhança

Na Seção 5.2, definimos um *invariante de semelhança* como qualquer propriedade que é compartilhada por matrizes semelhantes. Na Tabela 1 daquela seção (reproduzida a seguir), listamos os invariantes de semelhança mais importantes. Como sabemos pelo Teorema 8.5.3 que duas matrizes são semelhantes se, e só se, representam o mesmo operador

Tabela 1 Invariantes de semelhança

Propriedade	Descrição
Determinante	A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo determinante.
Invertibilidade	A é invertível se, e só se, $P^{-1}AP$ é invertível.
Posto	A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo posto.
Nulidade	A e $P^{-1}AP$ têm a mesma nulidade.
Traço	A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo traço.
Polinômio característico	A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo polinômio característico.
Autovalores	A e $P^{-1}AP$ têm os mesmos autovalores.
Dimensão de autoespaço	Se λ for um autovalor de A e, portanto, de $P^{-1}AP$, então o autoespaço de A associado a λ e o autoespaço de $P^{-1}AP$ associado a λ têm a mesma dimensão.

linear $T: V \to V$, segue que se B e B' forem bases de V, então cada propriedade invariante por semelhança de $[T]_B$ também é um invariante de semelhança de $[T]_{B'}$, qualquer que seja a base B' de V. Por exemplo, dadas duas bases quaisquer, necessariamente

$$\det([T]_B) = \det([T]_{B'})$$

Segue dessa equação que o valor do determinante depende de T, mas não da particular base que é utilizada para obter a matriz de T. Assim, o determinante pode ser considerado como uma propriedade do operador linear T; de fato, se V for um espaço vetorial de dimensão finita, então podemos *definir* o ***determinante do operador linear T*** por

$$\det(T) = \det([T]_B) \tag{12}$$

em que B é uma base *qualquer* de V.

▶ EXEMPLO 2 Determinante de um operador linear

No início desta seção, mostramos que as matrizes

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

representam o mesmo operador linear em relação a bases diferentes, sendo a primeira em relação à base canônica $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de R^2 e a segunda em relação à base $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_1\}$ em que

$$\mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Isso significa que $[T]$ e $[T]_{B'}$ devem ser matrizes semelhantes que, portanto, têm as mesmas propriedades invariantes por semelhança. Em particular, devem ter o mesmo determinante. Deixamos para o leitor verificar que

$$\det[T] = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \quad \text{e} \quad \det[T]_{B'} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

▶ EXEMPLO 3 Autovalores e bases de autoespaços

Encontre os autovalores e bases dos autoespaços do operador linear $T: P_2 \to P_2$ definido por

$$T(a + bx + cx^2) = -2c + (a + 2b + c)x + (a + 3c)x^2$$

Solução Deixamos para o leitor mostrar que a matriz de T em relação à base canônica $B = \{1, x, x^2\}$ é

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de T são $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ (Exemplo 7 da Seção 5.1). Também do mesmo exemplo sabemos que o autoespaço de $[T]_B$ associado a $\lambda = 2$ tem a base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, em que

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e o autoespaço de $[T]_B$ associado a $\lambda = 1$ tem a base $\{\mathbf{u}_3\}$, em que

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Os vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ são os vetores de coordenadas relativos a B de

$$\mathbf{p}_1 = -1 + x^2, \quad \mathbf{p}_2 = x, \quad \mathbf{p}_3 = -2 + x + x^2$$

Assim, o autoespaço de T associado a $\lambda = 2$ tem a base

$$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\} = \{-1 + x^2, x\}$$

e o associado a $\lambda = 1$ tem a base

$$\{\mathbf{p}_3\} = \{-2 + x + x^2\}$$

Para conferir, o leitor poderia usar a fórmula de T dada e verificar que

$$T(\mathbf{p}_1) = 2\mathbf{p}_1, \quad T(\mathbf{p}_2) = 2\mathbf{p}_2 \quad \text{e} \quad T(\mathbf{p}_3) = \mathbf{p}_3$$ ◀

Revisão de conceitos

- Semelhança de matrizes representando um operador linear
- Invariante de semelhança
- Determinante de um operador linear

Aptidões desenvolvidas

- Mostrar que duas matrizes A e B representam um mesmo operador linear e encontrar uma matriz de transição P tal que $B = P^{-1}AP$.
- Encontrar os autovalores e bases dos autoespaços de um operador linear de um espaço vetorial de dimensão finita.

Conjunto de exercícios 8.5

▶ Nos Exercícios 1–7, encontre a matriz de T em relação à base B e use o Teorema 8.5.2 para calcular a matriz de T em relação à base B'. ◀

1. $T: R^2 \to R^2$ é definido por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

e $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, sendo

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2. $T: R^2 \to R^2$ é definido por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 7x_2 \\ 3x_1 - 4x_2 \end{bmatrix}$$

e $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, sendo

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. $T: R^2 \to R^2$ é a rotação em torno da origem pelo ângulo de 45°; B e B' são as bases no Exercício 1.

4. $T: R^3 \to R^3$ é definido por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 \\ x_1 + 7x_3 \end{bmatrix}$$

e B é a base canônica de R^3 e $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, sendo

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. $T: R^3 \to R^3$ é a projeção ortogonal no plano xy e B e B' são as bases no Exercício 4.

6. $T: R^2 \to R^2$ é definido por $T(\mathbf{x}) = 5\mathbf{x}$ e B e B' são as bases no Exercício 2.

7. $T: P_1 \to P_1$ é definido por $T(a_0 + a_1x) = a_0 + a_1(x + 1)$ e $B = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$ e $B = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$, sendo $\mathbf{p}_1 = 6 + 3x$, $\mathbf{p}_2 = 10 + 2x$, $\mathbf{q}_1 = 2$, $\mathbf{q}_2 = 3 + 2x$.

8. Em cada caso, encontre $\det(T)$.

(a) $T: R^2 \to R^2$, sendo
$T(x_1, x_2) = (3x_1 - 4x_2, -x_1 + 7x_2)$

(b) $T: R^3 \to R^3$, sendo
$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$

(c) $T: P_2 \to P_2$, sendo
$T(p(x)) = p(x - 1)$

9. Prove que as propriedades seguintes são invariantes de semelhança.

(a) posto

(b) nulidade

(c) invertibilidade

10. Seja $T: P_4 \to P_4$ o operador linear dado pela fórmula $T(p(x)) = p(2x + 1)$.

(a) Encontre uma matriz de T em relação a alguma base conveniente e, depois, use-a para encontrar o posto e a nulidade de T.

(b) Use o resultado da parte (a) para determinar se T é injetor.

11. Em cada parte, encontre uma base de R^2 em relação à qual a matriz de T é diagonal.

(a) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$

(b) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x_1 - x_2 \\ -3x_1 + x_2 \end{bmatrix}$

12. Em cada parte, encontre uma base de R^3 relativa à qual a matriz de T é diagonal.

(a) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}$

(b) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$

(c) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x_1 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 4x_3 \end{bmatrix}$

13. Seja $T: P_2 \to P_2$ definido por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (5a_0 + 6a_1 + 2a_2) - (a_1 + 8a_2)x + (a_0 - 2a_2)x^2$$

(a) Encontre os autovalores de T.

(b) Encontre bases dos autoespaços de T.

14. Seja $T: M_{22} \to M_{22}$ definido por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2c & a + c \\ b - 2c & d \end{bmatrix}$$

(a) Encontre os autovalores de T.

(b) Encontre bases dos autoespaços de T.

15. Seja λ um autovalor de um operador linear $T: V \to V$. Prove que os autovetores de T associados a λ são os vetores não nulos no núcleo de $\lambda I - T$.

16. (a) Prove que se A e B forem matrizes semelhantes, então A^2 e B^2 também são semelhantes. Mais geralmente, prove que A^k e B^k são semelhantes, qualquer que seja o inteiro positivo k.

(b) Se A^2 e B^2 forem semelhantes, decorre que A e B são semelhantes? Explique.

17. Sejam C e D matrizes $m \times n$ e $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base de um espaço vetorial V. Mostre que se $C[\mathbf{x}]_B = D[\mathbf{x}]_B$, qualquer que seja $\mathbf{x}$ em V, então $C = D$.

18. Encontre duas matrizes 2×2 que não sejam semelhantes e explique por que não são semelhantes.

19. Complete a prova dada justificando cada passo.

Hipótese: A e B são matrizes semelhantes.

Conclusão: A e B têm o mesmo polinômio característico.

Prova: (1) $\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - P^{-1}AP)$

(2) $= \det(\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP)$

(3) $= \det(P^{-1}(\lambda I - A)P)$

(4) $= \det(P^{-1})\det(\lambda I - A)\det(P)$

(5) $= \det(P^{-1})\det(P)\det(\lambda I - A)$

(6) $= \det(\lambda I - A)$

20. Se A e B forem matrizes semelhantes, digamos, $B = P^{-1}AP$, então segue do Exercício 19 que A e B têm os mesmos autovalores. Suponha que λ seja um desses autovalores comuns e $\mathbf{x}$ seja um autovetor de A associado. Veja se você consegue encontrar um autovetor de B associado a λ (expresso em termos de λ, $\mathbf{x}$ e P).

21. Já que a base canônica de R^n é tão simples, por que quereríamos representar um operador linear de R^n em alguma outra base?

22. Prove que o traço é um invariante de semelhança.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(h), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Uma matriz não pode ser semelhante a si mesma.

(b) Se A é semelhante a B e B é semelhante a C, então A é semelhante a C.

(c) Se A e B são semelhantes e B é singular, então A é singular.

(d) Se A e B são invertíveis e semelhantes, então A^{-1} e B^{-1} são semelhantes.

(e) Se $T_1: R^n \to R^n$ e $T_2: R^n \to R^n$ forem operadores lineares e se $[T_1]_{B',B} = [T_2]_{B',B}$ em relação a duas bases B e B' de R^n, então $T_1(\mathbf{x}) = T_2(\mathbf{x})$, qualquer que seja o vetor $\mathbf{x}$ em R^n.

(f) Se $T_1: R^n \to R^n$ for um operador linear e se $[T_1]_B = [T_2]_{B'}$ em relação a duas bases B e B' de R^n, então $B = B'$.

(g) Se $T: R^n \to R^n$ for um operador linear e se $[T]_B = I_n$ em relação a alguma base B de R^n, então T é o operador identidade de R^n.

(h) Se $T: R^n \to R^n$ for um operador linear e se $[T]_{B',B} = I_n$ em relação a duas bases B e B' de R^n, então T é o operador identidade de R^n.

Capítulo 8 Exercícios suplementares

1. Sejam A uma matriz $n \times n$, B uma matriz $n \times 1$ não nula e $\mathbf{x}$ um vetor em R^n expresso em notação matricial. $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + B$ será um operador linear de R^n? Justifique sua resposta.

2. Seja

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\theta & -\operatorname{sen} 3\theta \\ \operatorname{sen} 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}$$

(b) Usando sua resposta na parte (a), adivinhe o formato da matriz A^n, com n um inteiro positivo qualquer.

(c) Considerando o efeito geométrico da multiplicação por A, obtenha geometricamente o resultado da parte (b).

3. Seja $T: V \to V$ definido por $T(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|\mathbf{v}$. Mostre que T não é um operador linear de V.

4. Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ vetores fixados em R^n e $T: R^n \to R^m$ a função definida por $T(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1, \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_m)$, em que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_i$ é o produto interno euclidiano de R^n.

(a) Mostre que T é uma transformação linear.

(b) Mostre que a matriz canônica de T tem vetores coluna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$.

5. Sejam $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ a base canônica de R^4 e $T: R^4 \to R^3$ a transformação linear dada por

$$T(\mathbf{e}_1) = (1, 2, 1), \quad T(\mathbf{e}_2) = (0, 1, 0),$$
$$T(\mathbf{e}_3) = (1, 3, 0), \quad T(\mathbf{e}_4) = (1, 1, 1)$$

(a) Encontre bases para a imagem e o núcleo de T.

(b) Encontre o posto e a nulidade de T.

6. Suponha que os vetores em R^3 sejam denotados por matrizes 1×3 e defina $T: R^3 \to R^3$ por

$$T([x_1 \quad x_2 \quad x_3]) = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre uma base para o núcleo de T.

(b) Encontre uma base para a imagem de T.

7. Sejam $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ uma base de um espaço vetorial V e $T: V \to V$ o operador linear dado por

$$T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 3\mathbf{v}_4$$
$$T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4$$
$$T(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3 + 3\mathbf{v}_4$$
$$T(\mathbf{v}_4) = -2\mathbf{v}_1 + 6\mathbf{v}_2 - 6\mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_4$$

(a) Encontre o posto e a nulidade de T.

(b) Determine se T é injetor.

8. Sejam V e W espaços vetoriais, T, T_1 e T_2 transformações lineares de V em W e k um escalar. Defina novas transformações $T_1 + T_2$ e kT pelas fórmulas

$$(T_1 + T_2)(\mathbf{x}) = T_1(\mathbf{x}) + T_2(\mathbf{x})$$
$$(kT)(\mathbf{x}) = k(T(\mathbf{x}))$$

(a) Mostre que $(T_1 + T_2): V \to W$ e $kT: V \to W$ são transformações lineares.

(b) Mostre que o conjunto de todas as transformações lineares de V em W forma um espaço vetorial com as operações dadas na parte (a).

9. Sejam A e B matrizes semelhantes. Prove:

(a) A^T e B^T são semelhantes.

(b) Se A e B forem invertíveis, então A^{-1} e B^{-1} são semelhantes.

10. (***O Teorema da Alternativa de Fredholm***) Seja $T: V \to V$ um operador linear num espaço vetorial de dimensão n. Prove que vale *exatamente uma* das duas afirmações seguintes.

(a) A equação $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ tem alguma solução, qualquer que seja o vetor $\mathbf{b}$ em V.

(b) A nulidade de T é positiva: $\text{nul}(T) > 0$.

11. Seja $T: M_{22} \to M_{22}$ o operador linear definido por

$$T(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontre o posto e a nulidade de T.

12. Prove: se A e B forem matrizes semelhantes e se B e C forem matrizes semelhantes, então A e C serão matrizes semelhantes.

13. Seja $L: M_{22} \to M_{22}$ o operador linear definido por $L(M) = M^T$. Encontre a matriz de L em relação à base canônica de M_{22}.

14. Sejam $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ e $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ bases de um espaço vetorial V e

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a matriz de transição de B' para B.

(a) Expresse $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ como uma combinação linear de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.

(b) Expresse $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ como uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

15. Sejam $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ uma base de um espaço vetorial V e $T: V \to V$ um operador linear tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Encontre $[T]_{B'}$, sendo $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ a base de V definida por

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

16. Mostre que as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

são semelhantes, mas que

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

não são.

17. Suponha que $T: V \to V$ seja um operador linear e B uma base de V tal que

$$[T(\mathbf{x})]_B = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix} \quad \text{se} \quad [\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Encontre $[T]_B$.

18. Seja $T: V \to V$ um operador linear. Prove que T é injetor se, e só se, $\det(T) \neq 0$.

19. (***Requer cálculo***)

(a) Mostre que se $\mathbf{f} = f(x)$ for duas vezes derivável, então a função $D: C^2(-\infty, \infty) \to F(-\infty, \infty)$ definida por $D(\mathbf{f}) = f''(x)$ é uma transformação linear.

(b) Encontre uma base do núcleo de D.

(c) Mostre que o conjunto das funções que satisfazem a equação $D(\mathbf{f}) = f(x)$ é um subespaço bidimensional de $C^2(-\infty, \infty)$ e encontre uma base desse subespaço.

20. Seja $T: P_2 \to R^3$ a função definida pela fórmula

$$T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$$

(a) Encontre $T(x^2 + 5x + 6)$.

(b) Mostre que T é uma transformação linear.

(c) Mostre que T é injetora.

(d) Encontre $T^{-1}(0, 3, 0)$.

(e) Esboce o gráfico do polinômio na parte (d).

21. Sejam x_1, x_2 e x_3 números reais distintos tais que

$$x_1 < x_2 < x_3$$

e $T: P_2 \to R^3$ a função definida pela fórmula

$$T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(x_1) \\ p(x_1) \\ p(x_3) \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que T é uma transformação linear.

(b) Mostre que T é injetora.

(c) Mostre que se a_1, a_2 e a_3 forem números reais quaisquer, então

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + a_3 P_3(x)$$

sendo

$$P_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$P_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

(d) Qual é a relação entre o gráfico da função

$$a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + a_3 P_3(x)$$

e os pontos (x_1, a_1), (x_2, a_2) e (x_3, a_3)?

22. (***Requer Cálculo***) Sejam $p(x)$ e $q(x)$ funções contínuas e considere o subespaço V de $C(-\infty, +\infty)$ que consiste em todas as funções que são duas vezes deriváveis. Defina $L: V \to V$ por

$$L(y(x)) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x)$$

(a) Mostre que L é uma transformação linear.

(b) Considere o caso especial em que $p(x) = 0$ e $q(x) = 1$. Mostre que a função

$$\phi(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$$

está no núcleo de L, quaisquer que sejam os valores reais c_1 e c_2.

23. (***Requer Cálculo***) Seja $D: P_n \to P_n$ o operador de derivação $D(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$. Mostre que a matriz de D em relação à base $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

24. (***Requer Cálculo***) Pode ser mostrado que os vetores

$$1, \quad x - c, \quad \frac{(x-c)^2}{2!}, \ldots, \quad \frac{(x-c)^n}{n!}$$

formam uma base de P_n, qualquer que seja o número real c dado. Encontre a matriz do operador de derivação do Exercício 23 em relação a essa base.

25. (***Requer Cálculo***) Seja $J: P_n \to P_{n+1}$ a transformação de integração definida por

$$J(\mathbf{p}) = \int_0^x (a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n)\, dt$$

$$= a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

em que $\mathbf{p} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Encontre a matriz de J em relação às bases canônicas de P_n e P_{n+1}.

CAPÍTULO 9

Métodos Numéricos

CONTEÚDO DO CAPÍTULO

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, tratamos de "métodos numéricos" da Álgebra Linear, uma área de estudo que engloba técnicas para resolver sistemas lineares de grande escala e para encontrar aproximações numéricas de vários tipos. Nosso objetivo não é discutir algoritmos e questões técnicas detalhadamente, já que existem muitos livros excelentes dedicados a esse assunto. Em vez disso, nos ocupamos com a introdução de algumas ideias básicas e a exploração de aplicações contemporâneas importantes que dependem de maneira crucial de ideias numéricas, a saber, a decomposição em valores singulares e a compressão de dados. Para todas as seções, exceto a primeira, recomendamos a utilização de algum recurso computacional como MATLAB, *Mathematica* ou Maple.

9.1 Decomposição *LU*

Até aqui, estivemos focados em dois métodos de resolução de sistemas lineares, a saber, a eliminação gaussiana (redução à forma escalonada por linhas) e a eliminação de Gauss-Jordan (redução à forma escalonada reduzida por linhas). Esses métodos funcionam muito bem com os problemas de pequeno porte deste texto, mas não são adequados para problemas de grande escala, nos quais devem ser considerados erros de arredondamento, uso de memória e velocidade do computador. Nesta seção, discutimos um método de resolver sistemas lineares de n equações em n incógnitas que tem por base a fatoração da matriz de coeficientes num produto de uma matriz triangular inferior e uma superior. Esse método, conhecido como "decomposição *LU*" é a base de muitos algoritmos de computação de uso comum.

Resolvendo sistemas lineares por fatoração

Nosso primeiro objetivo nesta seção é mostrar como resolver um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de n equações em n incógnitas fatorando a matriz A num produto

$$A = LU \tag{1}$$

em que L é uma matriz triangular inferior e U uma superior. Uma vez entendido como isso é feito, discutimos como a própria fatoração pode ser obtida.

Supondo que de alguma forma tenhamos obtido a fatoração em (1), podemos resolver o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por meio do procedimento seguinte, denominado ***decomposição LU***.

O método da decomposição *LU*

Passo 1. Reescreva o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ como

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2}$$

Passo 2. Defina uma nova matriz $\mathbf{y}$ de tamanho $n \times 1$ por

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{3}$$

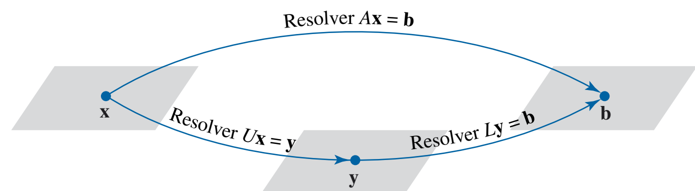
Passo 3. Use (3) para reescrever (2) como $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ e resolva esse sistema em $\mathbf{y}$.

Passo 4. Substitua $\mathbf{y}$ em (3) e resolva em $\mathbf{x}$.

Esse procedimento, ilustrado na Figura 9.1.1, substitui o sistema único $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pelo par de sistemas lineares

$$\begin{aligned} U\mathbf{x} &= \mathbf{y} \\ L\mathbf{y} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

que devem ser resolvidos sucessivamente. Contudo, como cada um desses sistemas tem uma matriz de coeficientes triangular, em geral ocorre que a resolução dos dois sistemas não envolve mais cálculos do que a resolução do sistema original diretamente.



▶ **Figura 9.1.1**

▶ **EXEMPLO 1 Resolvendo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por decomposição *LU***

Adiante, nesta seção, vamos deduzir a fatoração

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \tag{4}$$

Use esse resultado para resolver o sistema linear

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}} \underset{\mathbf{x}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{b}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

Solução A partir de (4), podemos reescrever esse sistema como

$$\underset{L}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\mathbf{x}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{b}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} \tag{5}$$

Nota histórica Em 1979, foi desenvolvida uma importante biblioteca de programas de Álgebra Linear, denominada LINPAK, no Laboratório Nacional de Argonne (EUA), constituída de programas independentes de plataforma. Muitos dos programas naquela biblioteca utilizam os métodos de decomposição que estudamos nesta seção. Variações das rotinas LINPAK são usadas por muitos sistemas de computação, inclusive por MATLAB, *Mathematica* e Maple.

Como especificamos no Passo 2 acima, definimos y_1, y_2 e y_3 pelas equações

$$\underset{U}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\mathbf{x}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} \underset{=}{=} \underset{\mathbf{y}}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}} \tag{6}$$

o que nos permite reescrever (5) como

$$\underset{L}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}} \underset{\mathbf{y}}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}} \underset{=}{=} \underset{\mathbf{b}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} \tag{7}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} 2y_1 \qquad\qquad\quad &= 2 \\ -3y_1 + \quad y_2 \qquad &= 2 \\ 4y_1 - 3y_2 + 7y_3 &= 3 \end{aligned}$$

Esse sistema pode ser resolvido por um procedimento parecido com a retrossubstituição, exceto que as equações são resolvidas de cima para baixo em vez de resolvidas de baixo para cima. Esse procedimento, denominado ***substituição direta***, fornece

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 5, \quad y_3 = 2$$

(verifique). Conforme indicado no Passo 4 acima, substituímos esses valores em (6), obtendo o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + \quad x_3 &= 1 \\ x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema por substituição inversa, obtemos a solução

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2$$

(verifique). ◀



Alan Mathison Turing (1912–1954)

Nota histórica Embora as ideias tenham sido conhecidas antes, muitas vezes o crédito pela popularização do formalismo matricial da decomposição *LU* é atribuído ao matemático britânico Alan Turing, pelo seu trabalho de 1948 nesse assunto. Turing foi um dos grandes gênios do século XX e o fundador da área da inteligência artificial. Entre suas muitas realizações nessa área, ele desenvolveu o conceito de computador internamente programado antes da tecnologia ter alcançado o estágio em que a construção de tal máquina fosse possível. Durante a Segunda Guerra Mundial, Turing foi recrutado secretamente pela Escola de Cifras e Código do governo britânico, em Bletchley Park, para ajudar a quebrar os códigos nazistas denominados Enigma; foi a abordagem estatística de Turing que forneceu a chave. Além de ser um matemático brilhante, Turing foi um atleta de nível internacional, tendo competido com sucesso em corridas de nível olímpico. Infelizmente, por ser homossexual, Turing foi julgado e condenado por "indecência grosseira", em 1952, violando os estatutos britânicos da época. Em depressão, ele cometeu suicídio aos 41 anos, ingerindo uma maçã envenenada com cianureto.

[Imagem: Time & Life Pictures/Getty Images, Inc.]

Encontrando decomposições *LU*

O Exemplo 1 deixa claro que, uma vez fatorada a matriz A em matrizes triangulares inferior e superior, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser resolvido com uma substituição direta e uma inversa. Mostremos, agora, como obter tal fatoração. Começamos com alguma terminologia.

DEFINIÇÃO 1 Uma ***decomposição LU***, ou uma ***fatoração LU***, de uma matriz quadrada A é uma fatoração $A = LU$ em que L é triangular inferior e U é triangular superior.

Não é verdade que qualquer matriz quadrada A tenha uma decomposição LU. Contudo, veremos que, se for possível reduzir uma matriz quadrada A à forma escalonada por linhas com eliminação gaussiana *sem permuta de linhas*, então A necessariamente possui alguma decomposição LU, não necessariamente única. Para ver isso, vamos supor que A tenha sido reduzida por operações elementares com as linhas, e sem permuta de linhas, à forma escalonada por linhas U. Segue do Teorema 1.5.1 que essas operações podem ser efetuadas pela multiplicação de A à esquerda por uma sequência apropriada de matrizes elementares, ou seja, que existem matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tais que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = U \tag{8}$$

Como as matrizes elementares são invertíveis, podemos resolver (8) para A como

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} U$$

ou, mais concisamente, como

$$A = LU \tag{9}$$

onde

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \tag{10}$$

Agora temos todos os ingredientes para provar o resultado seguinte.

TEOREMA 9.1.1 *Se uma matriz quadrada A pode ser reduzida à forma escalonada por linhas U com eliminação gaussiana sem permuta de linhas, então A pode ser fatorada como A = LU, em que L é uma matriz triangular inferior.*

Prova Sejam L e U as matrizes das Fórmulas (10) e (8), respectivamente. A matriz U é triangular superior porque é uma forma escalonada por linhas de uma matriz quadrada (portanto, todas as entradas abaixo da diagonal principal são nulas). Para provar que L é triangular inferior, basta provar que cada fator do lado direito de (10) é triangular inferior, pois então o Teorema 1.7.1*b* implica que L é triangular inferior. Como as permutações de linhas estão excluídas, cada E_j resulta da soma de um múltiplo escalar de uma linha de uma matriz identidade a uma linha inferior, ou da multiplicação de uma linha de uma matriz identidade por um escalar não nulo. Em ambos os casos, a matriz E_j resultante é triangular inferior e, portanto, pelo Teorema 1.7.1*d*, E_j^{-1} também é triangular inferior. Isso completa a prova. ◀

▶ EXEMPLO 2 Uma decomposição *LU*

Encontre uma decomposição LU de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução Para obter uma decomposição LU, $A = LU$, vamos reduzir A à forma escalonada por linhas U usando eliminação gaussiana e depois calcular L a partir de (10). Os passos são os seguintes.

	Redução à forma escalonada por linhas	Operação com as linhas	Matriz elementar correspondente à operação com as linhas	Inversa da matriz elementar
	$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$			
Passo 1		$\frac{1}{2} \times$ linha 1	$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$			
Passo 2		(3 × linha 1) + linha 2	$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$			
Passo 3		(−4 × linha 1) + linha 3	$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$			
Passo 4		(3 × linha 2) + linha 3	$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$	$E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$			
Passo 5		$\frac{1}{7} \times$ linha 3	$E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$	$E_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$			

e, por (10),

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma decomposição LU de A. ◄

Contabilidade

Como mostra esse exemplo, a maior parte do trabalho de construir uma decomposição LU é dedicada a calcular L. No entanto, *todo* esse trabalho pode ser eliminado com uma contabilidade cuidadosa das operações usadas para reduzir A a U.

Como estamos supondo que não foram realizadas trocas de linhas para reduzir A a U, só há dois tipos de operações envolvidas: a multiplicação de uma linha por uma constante não nula (um *multiplicador*) e a soma de um múltiplo escalar de uma linha a uma outra linha. A primeira operação é usada para introduzir os pivôs e a segunda, para introduzir os zeros abaixo dos pivôs.

No Exemplo 2, usamos um multiplicador $\frac{1}{2}$ no Passo 1 para introduzir um pivô na primeira linha e um multiplicador $\frac{1}{7}$ no Passo 5 para introduzir um pivô na terceira linha. Não foi necessário um multiplicador para introduzir um pivô na segunda linha, porque já havia um 1 no final do Passo 2, mas, por conveniência, digamos que o multiplicador foi 1. Comparando esses multiplicadores com as entradas diagonais sucessivas de L, vemos que essas entradas diagonais são exatamente os recíprocos dos multiplicadores utilizados para construir U, isto é,

$$L = \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 0 & 0 \\ -3 & \textcircled{1} & 0 \\ 4 & -3 & \textcircled{7} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Também observe no Exemplo 2 que, para introduzir zeros abaixo do pivô da primeira linha, usamos as operações

somar 3 vezes a primeira linha à segunda

somar -4 vezes a primeira linha à terceira

e, para introduzir o zero abaixo do pivô da segunda linha, usamos a operação

somar 3 vezes a segunda linha à terceira

Agora note que, em (12), a entrada em cada posição abaixo da diagonal principal de L é o *negativo* do multiplicador da operação que introduziu o zero naquela posição em U, ou seja,

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Isso sugere o procedimento seguinte para construir uma decomposição *LU* de uma matriz quadrada *A*, supondo que *A* possa ser reduzida à forma escalonada por linhas sem permutação de linhas.

> **Procedimento para construir uma decomposição *LU***
>
> ***Passo 1.*** Reduza *A* à forma escalonada por linhas *U* por eliminação gaussiana sem troca de linhas, mantendo armazenados os multiplicadores utilizados para introduzir os pivôs e os multiplicadores utilizados para introduzir os zeros debaixo dos pivôs.
>
> ***Passo 2.*** Em cada posição ao longo da diagonal principal de *L*, coloque o recíproco do multiplicador que introduziu o pivô naquela posição em *U*.
>
> ***Passo 3.*** Em cada posição abaixo da diagonal principal de *L*, coloque o negativo do multiplicador utilizado para introduzir o zero naquela posição em *U*.
>
> ***Passo 4.*** Forme a decomposição $A = LU$.

▶ EXEMPLO 3 Construindo uma decomposição *LU*

Encontre uma decomposição *LU* de

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução Reduzimos *A* à forma escalonada por linhas *U* e, a cada passo, introduzimos uma entrada de *L* de acordo com o procedimento de quatro passos dado.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

• denota uma entrada desconhecida de *L*.

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow \text{multiplicador} = \frac{1}{6} \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ \textcircled{0} & 2 & 1 \\ \textcircled{0} & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \longleftarrow \text{multiplicador} = -9 \\ \longleftarrow \text{multiplicador} = -3 \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & \bullet & 0 \\ 3 & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & \frac{1}{2} \\ 0 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \longleftarrow \text{multiplicador} = \frac{1}{2} \\ \\ \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 3 & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \textcircled{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \longleftarrow \text{multiplicador} = -8 \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & \bullet \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \longleftarrow \text{multiplicador} = 1 \end{matrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Aqui, nenhuma operação foi realizada de fato, pois já há um pivô na terceira linha.

Assim, construímos a decomposição LU

$$A = LU = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deixamos para o leitor confirmar esse resultado final multiplicando os fatores. ◀

As decomposições LU não são únicas

Na ausência de restrições, as decomposições LU não são únicas. Por exemplo, se

$$A = LU = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e L tem entradas diagonais não nulas, então podemos empurrar as entradas diagonais do fator esquerdo para o fator direito escrevendo

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21}/l_{11} & 1 & 0 \\ l_{31}/l_{11} & l_{32}/l_{22} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21}/l_{11} & 1 & 0 \\ l_{31}/l_{11} & l_{32}/l_{22} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{22}u_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que dá uma outra decomposição LU de A.

Decomposição LDU

O método que descrevemos para calcular uma decomposição LU pode resultar numa “assimetria”, a saber, uma decomposição em que U tem entradas iguais a 1 na diagonal principal, mas L pode não ter. Contudo, se for preferível ter entradas iguais a 1 na diagonal principal do fator triangular inferior, então podemos “empurrar” as entradas na diagonal de L para uma matriz diagonal D e escrever L como

$$L = L'D$$

onde L' é uma matriz triangular inferior com entradas iguais a 1 na diagonal principal. Por exemplo, uma matriz triangular inferior 3×3 qualquer, com entradas não nulas na diagonal principal, pode ser fatorada como

$$\underset{L}{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}} = \underset{L'}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21}/a_{11} & 1 & 0 \\ a_{31}/a_{11} & a_{32}/a_{22} & 1 \end{bmatrix}} \underset{D}{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}}$$

Observe que as colunas de L' são obtidas dividindo cada entrada da coluna correspondente de L pela entrada diagonal da coluna. Assim, por exemplo, podemos reescrever (4) como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pode ser provado que se A for uma matriz quadrada que pode ser reduzida à forma escalonada por linhas sem permuta de linhas, então A pode ser fatorada *de maneira única* como

$$A = LDU$$

onde L é uma matriz triangular inferior com entradas na diagonal principal iguais a 1, D é uma matriz diagonal e U é uma matriz triangular superior com entradas na diagonal principal iguais a 1. Essa decomposição é denominada ***decomposição LDU*** de A, ou ***fatoração LDU*** de A.

Decomposição PLU

Muitos algoritmos de computador que resolvem sistemas lineares efetuam trocas de linhas para reduzir erros de arredondamento, caso em que não há garantia da existência de uma decomposição LU. Contudo, é possível driblar essa dificuldade "pré-processando" a matriz de coeficientes A de tal forma que todas as operações sobre as linhas são efetuadas *antes* de calcular a própria decomposição LU. Mais precisamente, a ideia é criar uma matriz Q (denominada ***matriz de permutação***) multiplicando, em sequência, todas as matrizes elementares que produzem uma permutação de linhas e depois executá-las calculando o produto QA. Esse produto pode, então, ser reduzido à forma escalonada por linhas *sem* trocas de linhas e, portanto, fica garantido que essa matriz possui uma decomposição LU

$$QA = LU \tag{13}$$

Como a matriz Q é invertível (por ser um produto de matrizes elementares), os sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $QA\mathbf{x} = Q\mathbf{b}$ têm as mesmas soluções. Mas, segue de (13) que esse último sistema pode ser reescrito como $LU\mathbf{x} = Q\mathbf{b}$ e, portanto, resolvido usando a decomposição LU.

É comum ver a Equação (13) escrita como

$$A = PLU \tag{14}$$

em que $P = Q^{-1}$. Essa decomposição é denominada ***decomposição PLU*** de A, ou ***fatoração PLU*** de A.

Revisão de conceitos

- Decomposição LU
- Decomposição LDU
- Decomposição PLU

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se uma matriz quadrada tem uma decomposição LU.
- Encontrar uma decomposição LU de uma matriz quadrada.
- Usar o método da decomposição LU para resolver sistemas lineares.
- Encontrar uma decomposição LDU de uma matriz quadrada.
- Encontrar uma decomposição PLU de uma matriz quadrada.

Conjunto de exercícios 9.1

1. Use o método do Exemplo 1 e a decomposição LU

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para resolver o sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 1 \end{aligned}$$

2. Use o método do Exemplo 1 e a decomposição LU

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para resolver o sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 \qquad\; + 6x_3 &= -22 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

▶ Nos Exercícios 3–10, encontre uma decomposição LU da matriz de coeficientes e, depois, use o método do Exemplo 1 para resolver o sistema. ◀

3. $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 19 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} -3 & 12 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ -8 & -7 & -9 \\ 0 & 4 & 26 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 3 & 10 & -10 \\ -2 & -4 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

11. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre uma decomposição LU de A.

(b) Expresse A na forma $A = L_1DU_1$, em que L_1 é triangular inferior com entradas 1 na diagonal principal, U_1 é triangular superior e D é uma matriz diagonal.

(c) Expresse A na forma $A = L_2DU_2$, em que L_2 é triangular inferior com entradas 1 na diagonal principal e U_2 é triangular superior.

▶ Nos Exercícios 12–13, encontre a decomposição LDU de A. ◀

12. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ **13.** $A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -28 & 13 \end{bmatrix}$

14. (a) Mostre que a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

não possui decomposição LU.

(b) Encontre uma decomposição LDU dessa matriz.

▶ Nos Exercícios 15–16, use a decomposição PLU dada de A para resolver o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ reescrevendo-o como $P^{-1}A\mathbf{x} = P^{-1}\mathbf{b}$ e resolvendo esse sistema por decomposição LU. ◀

15. $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix} = PLU$$

16. $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 8 \end{bmatrix}$;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = PLU$$

▶ Nos Exercícios 17–18, encontre uma decomposição PLU de A e use-a para resolver o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, usando o método dos Exercícios 15 e 16. ◀

17. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$

19. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(a) Prove: se $a \neq 0$, então a matriz A tem uma única decomposição LU com entradas 1 na diagonal principal de L.

(b) Encontre a decomposição LU descrita na parte (a).

20. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ um sistema linear de n equações em n incógnitas e suponha que A seja uma matriz invertível que pode ser reduzida à forma escalonada por linhas sem troca de linhas. Quantas adições e multiplicações adicionais são exigidas para resolver o sistema pelo método do Exemplo 1?

21. Prove: se A for uma matriz $n \times n$ qualquer, então A pode ser fatorada como $A = PLU$, em que L é triangular inferior, U é triangular superior e P pode ser obtida por troca de linhas apropriadas de I_n. [*Sugestão*: considere a forma escalonada por linhas U de A e efetue todas as trocas de linhas requeridas para reduzir A a U antes.]

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Toda matriz quadrada tem alguma decomposição *LU*.

(b) Se uma matriz quadrada *A* for equivalente por linhas a uma matriz triangular superior *U*, então *A* tem alguma decomposição *LU*.

(c) Se $L_1, L_2, \ldots, L_k$ forem matrizes $n \times n$ triangulares inferiores, então o produto $L_1, L_2, \cdots, L_k$ será triangular inferior.

(d) Se uma matriz quadrada *A* tiver uma decomposição *LU*, então *A* tem uma única decomposição *LDU*.

(e) Toda matriz quadrada tem alguma decomposição *PLU*.

9.2 O método das potências

Os autovalores de uma matriz quadrada podem ser encontrados, por definição, pela resolução da equação característica. Contudo, esse procedimento apresenta tantas dificuldades computacionais que quase nunca é utilizado nas aplicações. Nesta seção, discutimos um algoritmo que pode ser usado para aproximar o autovalor de maior valor absoluto e um autovetor associado. Esse autovalor especial e seu autovetor associado são importantes porque surgem naturalmente em muitos processos iterativos. Os métodos que estudamos nesta seção têm sido recentemente usados para criar programas de busca na Internet, como o Google. Essa aplicação será discutida na próxima seção.

O método das potências

Existem muitas aplicações em que algum vetor $\mathbf{x}_0$ de R^n é multiplicado repetidamente por uma matriz *A* de tamanho $n \times n$ para produzir uma sequência

$$\mathbf{x}_0, \quad A\mathbf{x}_0, \quad A^2\mathbf{x}_0, \ldots, A^k\mathbf{x}_0, \ldots$$

Dizemos que uma sequência dessas é uma ***sequência de potências gerada por A***. Nesta seção, nos ocupamos com a convergência de sequências de potências e a maneira pela qual essas sequências podem ser usadas para aproximar autovalores e autovetores. Para esse fim, convém introduzir a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1 Se os autovalores *distintos* de uma matriz *A* forem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ e $|\lambda_1|$ for maior do que $|\lambda_2|, \ldots, |\lambda_k|$, então λ_1 é denominado um ***autovalor dominante*** de *A*. Qualquer autovetor associado a um autovalor dominante é denominado um ***autovetor dominante*** de *A*.

▶ EXEMPLO 1 Autovalores dominantes

Algumas matrizes têm autovalores dominantes e algumas não têm. Por exemplo, se os autovalores distintos de uma matriz forem

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = 3$$

então $\lambda_1 = -4$ é dominante, pois $|\lambda_1| = 4$ é maior do que os valores absolutos de todos os outros autovalores, mas se os autovalores distintos de uma matriz forem

$$\lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = -7, \quad \lambda_3 = -2, \quad \lambda_4 = 5$$

então $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 7$, de modo que não existe autovalor de valor absoluto maior do que o valor absoluto de todos os demais autovalores. ◀

Os teoremas mais importantes sobre a convergência de sequências de potências são aplicáveis a matrizes $n \times n$ que têm *n* autovetores linearmente independentes (por exemplo, matrizes simétricas); portanto, nesta seção, limitamos nossa discussão a esse caso.

TEOREMA 9.2.1 *Seja A uma matriz simétrica $n \times n$ com um autovalor dominante λ positivo*[‡] λ. *Se* $\mathbf{x}_0$ *for um vetor unitário de* R^n *que não é ortogonal ao autoespaço associado a* λ, *então a sequência de potências normalizada*

$$\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_1 = \frac{A\mathbf{x}_0}{\|A\mathbf{x}_0\|}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{A\mathbf{x}_1}{\|A\mathbf{x}_1\|}, \ldots, \quad \mathbf{x}_k = \frac{A\mathbf{x}_{k-1}}{\|A\mathbf{x}_{k-1}\|}, \ldots \tag{1}$$

converge a um autovetor dominante unitário e a sequência

$$A\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1, \quad A\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2, \quad A\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_3, \ldots, A\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{x}_k, \ldots \tag{2}$$

converge ao autovalor dominante λ.

Observação Nos exercícios, pedimos para o leitor mostrar que (1) pode ser expresso como

$$\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_1 = \frac{A\mathbf{x}_0}{\|A\mathbf{x}_0\|}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{A^2\mathbf{x}_0}{\|A^2\mathbf{x}_0\|}, \ldots, \quad \mathbf{x}_k = \frac{A^k\mathbf{x}_0}{\|A^k\mathbf{x}_0\|}, \ldots \tag{3}$$

Essa forma da sequência de potências expressa cada iterada em termos do vetor inicial $\mathbf{x}_0$, em vez de utilizar termos de seu predecessor.

Não vamos provar o Teorema 9.2.1, mas podemos torná-lo geometricamente plausível no caso 2×2 em que A é uma matriz simétrica com autovalores positivos distintos λ_1 e λ_2, um dos quais é dominante. Para sermos mais específicos, suponha que $\lambda_1$seja dominante e que

$$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$$

Como estamos supondo que A seja simétrica e tenha autovalores distintos, segue do Teorema 7.2.2 que os autoespaços associados a λ_1 e λ_2 são retas perpendiculares pela origem. Assim, a hipótese de que $\mathbf{x}_0$ seja um vetor unitário que não é perpendicular ao autoespaço associado a λ_1 implica que $\mathbf{x}_0$ não está no autoespaço associado a λ_2. Para ver o efeito geométrico de multiplicar $\mathbf{x}_0$ por A, convém decompor $\mathbf{x}_0$ na soma

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_0 \tag{4}$$

em que $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{w}_0$ são as projeções ortogonais de $\mathbf{x}_0$ nos autoespaços de λ_1 e λ_2, respectivamente (Figura 9.2.1*a*).

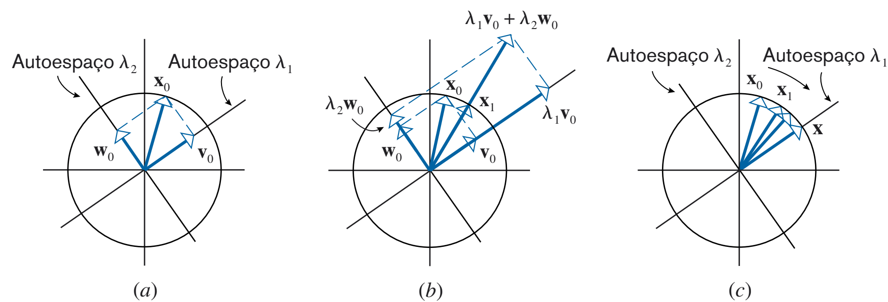


Figura 9.2.1

Isso nos permite escrever $A\mathbf{x}_0$ como

$$A\mathbf{x}_0 = A\mathbf{v}_0 + A\mathbf{w}_0 = \lambda_1\mathbf{v}_0 + \lambda_2\mathbf{w}_0 \tag{5}$$

‡ Se o autovalor dominante não for positivo, então a sequência (2) ainda converge ao autovalor dominante, mas a sequência (1) pode não convergir a um autovetor dominante *específico* por causa de oscilação de sinal (ver Exercício 11). Mesmo assim, para valores suficientemente grandes de k, cada termo de (1) está arbitrariamente próximo de *algum* autovetor dominante.

que nos diz que a multiplicação de $\mathbf{x}_0$ por A tem o efeito de uma mudança de escala de fator λ_1 e λ_2 sobre $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{w}_0$ em (4), respectivamente. Contudo, λ_1 é maior do que λ_2 e, portanto, a mudança é maior na direção de $\mathbf{v}_0$ do que na de $\mathbf{w}_0$. Assim, a multiplicação de $\mathbf{x}_0$ por A "puxa" $\mathbf{x}_0$ em direção ao autoespaço de λ_1, e a normalização produz um vetor $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0/\|A\mathbf{x}_0\|$ que está no círculo unitário e está mais próximo do autoespaço de λ_1 do que $\mathbf{x}_0$ (Figura 9.2.1*b*). Analogamente, multiplicando $\mathbf{x}_1$ por A e normalizando, obtemos um vetor unitário $\mathbf{x}_2$ que está mais próximo do autoespaço de λ_1 do que $\mathbf{x}_1$. Assim, parece razoável que, multiplicando repetidamente por A e normalizando, obtemos uma sequência de vetores $\mathbf{x}_k$ que estão no círculo unitário e que convergem a um vetor unitário $\mathbf{x}$ que está no autoespaço de λ_1 (Figura 9.2.1*c*). Além disso, se $\mathbf{x}_k$ convergir a $\mathbf{x}$, então também parece razoável que $A\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{x}_k$ convirja a

$$A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2 = \lambda_1$$

que é o autovalor dominante de A.

O método das potências com mudança de escala euclidiana

O Teorema 9.2.1 fornece um algoritmo para aproximar o autovalor dominante e um autovetor unitário associado de uma matriz simétrica A, desde que o autovalor dominante seja positivo. Esse algoritmo, que denominamos ***método das potências com mudança de escala euclidiana***, pode ser descrito como segue.

O método das potências com mudança de escala euclidiana

Passo 1. Escolha um vetor não nulo qualquer e normalize, se necessário, para obter um vetor unitário $\mathbf{x}_0$.

Passo 2. Calcule $A\mathbf{x}_0$ e normalize para obter a primeira aproximação $\mathbf{x}_1$ de um autovetor dominante unitário. Calcule $A\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1$ para obter a primeira aproximação do autovalor dominante.

Passo 3. Calcule $A\mathbf{x}_1$ e normalize para obter a segunda aproximação $\mathbf{x}_2$ de um autovetor dominante unitário. Calcule $A\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2$ para obter a segunda aproximação do autovalor dominante.

Passo 4. Calcule $A\mathbf{x}_2$ e normalize para obter a terceira aproximação $\mathbf{x}_3$ de um autovetor dominante unitário. Calcule $A\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_3$ para obter a terceira aproximação do autovalor dominante.

Continuando assim, em geral, obtemos uma sequência de aproximações cada vez melhores do autovalor dominante e de um autovetor unitário associado.‡

▶ EXEMPLO 2 O método das potências com mudança de escala euclidiana

Aplique o método das potências com mudança de escala euclidiana a

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pare em $\mathbf{x}_5$ e compare a aproximação resultante com os valores exatos do autovalor e autovetor dominantes.

‡ Se o vetor $\mathbf{x}_0$ for ortogonal ao autoespaço do autovalor dominante, então as hipóteses do Teorema 9.2.1 estarão violadas, e o método pode falhar. Contudo, na prática, ocorre que, em geral, os erros de arredondamento dos computadores perturbam $\mathbf{x}_0$ suficientemente a ponto de destruir qualquer ortogonalidade que possa ter existido e fazem o método funcionar. Essa é uma instância em que os erros ajudam a obter resultados corretos!

Solução Deixamos para o leitor mostrar que os autovalores de A são $\lambda = 1$ e $\lambda = 5$ e que o autoespaço associado ao autovalor dominante $\lambda = 5$ é a reta representada pelas equações paramétricas $x_1 = t$, $x_2 = t$, que podem ser escritas em formato vetorial como

$$\mathbf{x} = t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \tag{6}$$

Tomando $t = 1/\sqrt{2}$, obtemos o autovetor dominantes normalizado

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0{,}707106781187\ldots\\0{,}707106781187\ldots\end{bmatrix} \tag{7}$$

Agora vejamos o que acontece usando o método das potências começando com o vetor unitário $\mathbf{x}_0$.

$$A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_1 = \frac{A\mathbf{x}_0}{\|A\mathbf{x}_0\|} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} \approx \frac{1}{3{,}60555}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0{,}83205\\0{,}55470\end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}_1 \approx \begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}83205\\0{,}55470\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}3{,}60555\\3{,}32820\end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_2 = \frac{A\mathbf{x}_1}{\|A\mathbf{x}_1\|} \approx \frac{1}{4{,}90682}\begin{bmatrix}3{,}60555\\3{,}32820\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0{,}73480\\0{,}67828\end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}_2 \approx \begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}73480\\0{,}67828\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}3{,}56097\\3{,}50445\end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_3 = \frac{A\mathbf{x}_2}{\|A\mathbf{x}_2\|} \approx \frac{1}{4{,}99616}\begin{bmatrix}3{,}56097\\3{,}50445\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0{,}71274\\0{,}70143\end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}_3 \approx \begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}71274\\0{,}70143\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}3{,}54108\\3{,}52976\end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_4 = \frac{A\mathbf{x}_3}{\|A\mathbf{x}_3\|} \approx \frac{1}{4{,}99985}\begin{bmatrix}3{,}54108\\3{,}52976\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0{,}70824\\0{,}70597\end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}_4 \approx \begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}70824\\0{,}70597\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}3{,}53666\\3{,}53440\end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_5 = \frac{A\mathbf{x}_4}{\|A\mathbf{x}_4\|} \approx \frac{1}{4{,}99999}\begin{bmatrix}3{,}53666\\3{,}53440\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0{,}70733\\0{,}70688\end{bmatrix}$$

$$\lambda^{(1)} = (A\mathbf{x}_1)\cdot\mathbf{x}_1 = (A\mathbf{x}_1)^T\mathbf{x}_1 \approx \begin{bmatrix}3{,}60555 & 3{,}32820\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}83205\\0{,}55470\end{bmatrix} \approx 4{,}84615$$

$$\lambda^{(2)} = (A\mathbf{x}_2)\cdot\mathbf{x}_2 = (A\mathbf{x}_2)^T\mathbf{x}_2 \approx \begin{bmatrix}3{,}56097 & 3{,}50445\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}73480\\0{,}67828\end{bmatrix} \approx 4{,}99361$$

$$\lambda^{(3)} = (A\mathbf{x}_3)\cdot\mathbf{x}_3 = (A\mathbf{x}_3)^T\mathbf{x}_3 \approx \begin{bmatrix}3{,}54108 & 3{,}52976\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}71274\\0{,}70143\end{bmatrix} \approx 4{,}99974$$

$$\lambda^{(4)} = (A\mathbf{x}_4)\cdot\mathbf{x}_4 = (A\mathbf{x}_4)^T\mathbf{x}_4 \approx \begin{bmatrix}3{,}53666 & 3{,}53440\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}70824\\0{,}70597\end{bmatrix} \approx 4{,}99999$$

$$\lambda^{(5)} = (A\mathbf{x}_5)\cdot\mathbf{x}_5 = (A\mathbf{x}_5)^T\mathbf{x}_5 \approx \begin{bmatrix}3{,}53576 & 3{,}53531\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}70733\\0{,}70688\end{bmatrix} \approx 5{,}00000$$

É acidental que $\lambda^{(5)}$ (a quinta aproximação) tenha produzido cinco casas decimais de precisão. Em geral, n iteradas não precisam produzir n casas decimais de precisão.

Assim, $\lambda^{(5)}$ aproxima o autovalor dominante com cinco casas decimais de precisão, e $\mathbf{x}_5$ aproxima o autovetor dominante em (7) corretamente até a terceira casa decimal. ◀

O método das potências com mudança de escala de entrada máxima

Existe uma variação do método das potências em que cada iterada, em vez de ser normalizada em cada etapa, é alterada para ter a entrada máxima igual a 1. Para descrever esse método, é conveniente denotar o máximo dos *valores absolutos* das entradas de um vetor $\mathbf{x}$ por $\max(\mathbf{x})$. Assim, por exemplo, se

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}5\\3\\-7\\2\end{bmatrix}$$

então $\max(\mathbf{x}) = 7$. Vamos precisar da seguinte variação do Teorema 9.2.1.

TEOREMA 9.2.2 *Seja A uma matriz simétrica $n \times n$ com um autovalor dominante λ positivo*‡. *Se $\mathbf{x}_0$ for um vetor não nulo de R^n que não é ortogonal ao autoespaço associado a λ, então a sequência*

$$\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_1 = \frac{A\mathbf{x}_0}{\max(A\mathbf{x}_0)}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{A\mathbf{x}_1}{\max(A\mathbf{x}_1)}, \ldots, \quad \mathbf{x}_k = \frac{A\mathbf{x}_{k-1}}{\max(A\mathbf{x}_{k-1})}, \ldots \tag{8}$$

converge a um autovetor associado a λ e a sequência

$$\frac{A\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1}, \quad \frac{A\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2}, \quad \frac{A\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_3}{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_3}, \ldots, \quad \frac{A\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{x}_k}, \ldots \tag{9}$$

converge a λ.

Observação Nos exercícios, pedimos para o leitor mostrar que (8) pode ser expresso de forma alternativa como

$$\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_1 = \frac{A\mathbf{x}_0}{\max(A\mathbf{x}_0)}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{A^2\mathbf{x}_0}{\max(A^2\mathbf{x}_0)}, \ldots, \quad \mathbf{x}_k = \frac{A^k\mathbf{x}_0}{\max(A^k\mathbf{x}_0)}, \ldots \tag{10}$$

que expressa cada iterada em termos do vetor inicial $\mathbf{x}_0$.

Omitimos a prova desse teorema, mas se aceitarmos que (8) converge a um autovetor de A, então não é difícil ver por que (9) converge ao autovalor dominante. Para isso, observe que cada termo em (9) é da forma

$$\frac{A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \tag{11}$$

que é denominado um ***quociente de Rayleigh*** de A. No caso em que λ é um autovalor de A e $\mathbf{x}$ é um autovetor associado, o quociente de Rayleigh é

$$\frac{A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \frac{\lambda\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \frac{\lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \lambda$$

Assim, se $\mathbf{x}_k$ convergir a um autovetor dominante $\mathbf{x}$, então parece razoável que

$$\frac{A\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{x}_k} \quad \text{convirja a} \quad \frac{A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \lambda$$

que é o autovalor dominante.

O Teorema 9.2.2 fornece o seguinte algoritmo, que denominamos ***método das potências com mudança de escala de entrada máxima***.

‡ Como no Teorema 9.2.1, se o autovalor dominante não for positivo, então a sequência (9) ainda converge ao autovalor dominante, mas a sequência (8) pode não convergir a um autovetor dominante *específico*. Mesmo assim, para valores suficientemente grandes de k, cada termo de (8) está arbitrariamente próximo de *algum* autovetor dominante.



John William Strutt Rayleigh (1842–1919)

Nota histórica O físico matemático britânico John Rayleigh recebeu o Prêmio Nobel de Física, em 1904, por sua descoberta do gás inerte argônio. Rayleigh também fez descobertas fundamentais em Acústica e Ótica, e seu trabalho sobre fenômenos ondulatórios permitiu-lhe dar a primeira explicação correta de por que o céu é azul.

[Imagem: The Granger Collection, New York]

O método das potências com mudança de escala de entrada máxima

Passo 1. Escolha um vetor não nulo $\mathbf{x}_0$ qualquer.

Passo 2. Calcule $A\mathbf{x}_0$ e multiplique isso pelo fator $1/\max(A\mathbf{x}_0)$ para obter a primeira aproximação $\mathbf{x}_1$ de um autovetor dominante. Calcule o quociente de Rayleigh de $\mathbf{x}_1$ para obter a primeira aproximação do autovalor dominante.

Passo 3. Calcule $A\mathbf{x}_1$ e multiplique isso pelo fator $1/\max(A\mathbf{x}_1)$ para obter a segunda aproximação $\mathbf{x}_2$ de um autovetor dominante. Calcule o quociente de Rayleigh de $\mathbf{x}_2$ para obter a segunda aproximação do autovalor dominante.

Passo 4. Calcule $A\mathbf{x}_2$ e multiplique isso pelo fator $1/\max(A\mathbf{x}_2)$ para obter a terceira aproximação $\mathbf{x}_3$ de um autovetor dominante. Calcule o quociente de Rayleigh de $\mathbf{x}_3$ para obter a terceira aproximação do autovalor dominante.

Continuando assim, obtemos uma sequência de aproximações cada vez melhores do autovalor dominante e de um autovetor associado.

▶ EXEMPLO 3 De novo o Exemplo 2 usando mudança de escala de entrada máxima

Aplique o método das potências com mudança de escala de entrada máxima a

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pare em $\mathbf{x}_5$ e compare a aproximação resultante com os valores exatos e com as aproximações obtidas no Exemplo 2.

Solução Deixamos para o leitor confirmar que

$$A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_1 = \frac{A\mathbf{x}_0}{\max(A\mathbf{x}_0)} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1{,}00000 \\ 0{,}66667 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}_1 \approx \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}00000 \\ 0{,}66667 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4{,}33333 \\ 4{,}00000 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_2 = \frac{A\mathbf{x}_1}{\max(A\mathbf{x}_1)} \approx \frac{1}{4{,}33333}\begin{bmatrix} 4{,}33333 \\ 4{,}00000 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1{,}00000 \\ 0{,}92308 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}_2 \approx \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}00000 \\ 0{,}92308 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4{,}84615 \\ 4{,}76923 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_3 = \frac{A\mathbf{x}_2}{\max(A\mathbf{x}_2)} \approx \frac{1}{4{,}84615}\begin{bmatrix} 4{,}84615 \\ 4{,}76923 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1{,}00000 \\ 0{,}98413 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}_3 \approx \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}00000 \\ 0{,}98413 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4{,}96825 \\ 4{,}95238 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_4 = \frac{A\mathbf{x}_3}{\max(A\mathbf{x}_3)} \approx \frac{1}{4{,}96825}\begin{bmatrix} 4{,}96825 \\ 4{,}95238 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1{,}00000 \\ 0{,}99681 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}_4 \approx \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}00000 \\ 0{,}99681 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4{,}99361 \\ 4{,}99042 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_5 = \frac{A\mathbf{x}_4}{\max(A\mathbf{x}_4)} \approx \frac{1}{4{,}99361}\begin{bmatrix} 4{,}99361 \\ 4{,}99042 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1{,}00000 \\ 0{,}99936 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^{(1)} = \frac{A\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1} = \frac{(A\mathbf{x}_1)^T \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1} \approx \frac{7{,}00000}{1{,}44444} \approx 4{,}84615$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{A\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2} = \frac{(A\mathbf{x}_2)^T \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2^T} \approx \frac{9{,}24852}{1{,}85207} \approx 4{,}99361$$

$$\lambda^{(3)} = \frac{A\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_3}{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_3} = \frac{(A\mathbf{x}_3)^T \mathbf{x}_3}{\mathbf{x}_3^T \mathbf{x}_3} \approx \frac{9{,}84203}{1{,}96851} \approx 4{,}99974$$

$$\lambda^{(4)} = \frac{A\mathbf{x}_4 \cdot \mathbf{x}_3}{\mathbf{x}_4 \cdot \mathbf{x}_4} = \frac{(A\mathbf{x}_4)^T \mathbf{x}_4}{\mathbf{x}_4^T \mathbf{x}_4} \approx \frac{9{,}96808}{1{,}99362} \approx 4{,}99999$$

$$\lambda^{(5)} = \frac{A\mathbf{x}_5 \cdot \mathbf{x}_5}{\mathbf{x}_5 \cdot \mathbf{x}_5} = \frac{(A\mathbf{x}_5)^T \mathbf{x}_5}{\mathbf{x}_5^T \mathbf{x}_5} \approx \frac{9{,}99360}{1{,}99872} \approx 5{,}00000$$

Enquanto o método das potências com mudança de escala euclidiana produz uma sequência de aproximações de um autovetor dominante *unitário*, a mudança de escala de entrada máxima produz uma sequência de aproximações de um autovetor dominante cujo maior componente é 1.

Assim, $\lambda^{(5)}$ aproxima o autovalor dominante corretamente até a quinta casa decimal e $\mathbf{x}_5$ aproxima bem o autovetor dominante

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que resulta tomando $t = 1$ em (6). ◀

Taxa de convergência

Se A for uma matriz simétrica cujos autovalores distintos podem ser ordenados de tal modo que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_k|$$

então a "taxa de convergência" dos quocientes de Rayleigh ao autovalor dominante λ_1 depende da razão $|\lambda_1| / |\lambda_2|$, ou seja, a convergência será lenta se essa razão estiver perto de 1 e será rápida se a razão for grande: quanto maior a razão, mais rápida a convergência. Por exemplo, se A for uma matriz 2×2 simétrica, então quanto maior for a razão $|\lambda_1| / |\lambda_2|$, maior será a disparidade entre os efeitos da mudança de escala de razão λ_1 e da de razão λ_2 na Figura 9.2.1 e, portanto, maior será o efeito que a multiplicação por A tem em puxar as iteradas em direção ao autoespaço de λ_1. De fato, a convergência rápida no Exemplo 3 é resultante da razão $|\lambda_1| / |\lambda_2| = 5/1 = 5$, que é uma razão bem grande. Nos casos em que a razão estiver perto de 1, a convergência do método das potências poderá ser tão lenta que devem ser usados outros métodos.

Critérios de parada

Se λ for o valor exato do autovalor dominante e se um método das potências produzir a aproximação $\lambda^{(k)}$ na k-ésima iteração, então dizemos que

$$\left| \frac{\lambda - \lambda^{(k)}}{\lambda} \right| \tag{12}$$

é o ***erro relativo*** de $\lambda^{(k)}$. Escrevendo isso como uma porcentagem, dizemos que é o ***erro percentual*** de $\lambda^{(k)}$. Por exemplo, se $\lambda = 5$ e a aproximação depois da terceira iteração for $\lambda^{(3)} = 5{,}1$, então

$$\text{erro relativo de } \lambda^{(3)} = \left| \frac{\lambda - \lambda^{(3)}}{\lambda} \right| = \left| \frac{5 - 5{,}1}{5} \right| = |-0{,}02| = 0{,}02$$

$$\text{erro percentual de } \lambda^{(3)} = 0{,}02 \times 100\% = 2\%$$

Nas aplicações, geralmente sabemos qual é o erro relativo E que pode ser tolerado no autovalor dominante, portanto, o objetivo é parar os cálculos das iteradas assim que o erro relativo na aproximação daquele autovalor for menor do que E. Contudo, existe um problema em calcular o erro relativo em (12), pois o autovalor λ é desconhecido. Para evitar esse problema, é costume estimar λ como sendo $\lambda^{(k)}$ e parar os cálculos quando

$$\left| \frac{\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}}{\lambda^{(k)}} \right| < E \tag{13}$$

A quantidade do lado esquerdo de (13) é denominada ***erro relativo estimado*** de $\lambda^{(k)}$ e sua forma percentual é o ***erro percentual estimado*** de $\lambda^{(k)}$.

▶ EXEMPLO 4 Erro relativo estimado

Para as contas feitas no Exemplo 3, encontre o menor valor de k para o qual o erro percentual estimado em $\lambda^{(k)}$ seja menor do que 0,1%.

Solução Os erros percentuais das aproximações no Exemplo 3 são os seguintes:

	APROXIMAÇÃO	ERRO RELATIVO	ERRO PERCENTUAL
$\lambda^{(2)}$:	$\left\|\dfrac{\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)}}{\lambda^{(2)}}\right\| \approx \left\|\dfrac{4{,}99361-4{,}84615}{4{,}99361}\right\|$	$\approx 0{,}02953$	$= 2{,}953\%$
$\lambda^{(3)}$:	$\left\|\dfrac{\lambda^{(3)}-\lambda^{(2)}}{\lambda^{(3)}}\right\| \approx \left\|\dfrac{4{,}99974-4{,}99361}{4{,}99974}\right\|$	$\approx 0{,}00123$	$= 0{,}123\%$
$\lambda^{(4)}$:	$\left\|\dfrac{\lambda^{(4)}-\lambda^{(3)}}{\lambda^{(4)}}\right\| \approx \left\|\dfrac{4{,}99999-4{,}99974}{4{,}99999}\right\|$	$\approx 0{,}00005$	$= 0{,}005\%$
$\lambda^{(5)}$:	$\left\|\dfrac{\lambda^{(5)}-\lambda^{(4)}}{\lambda^{(5)}}\right\| \approx \left\|\dfrac{5{,}00000-4{,}99999}{5{,}00000}\right\|$	$\approx 0{,}00000$	$= 0\%$

Assim, $\lambda^{(4)} = 4{,}99999$ é a primeira aproximação com erro percentual estimado menor do que 0,1%. ◀

Observação Um ***critério de parada*** é uma regra para decidir quando parar um processo iterativo. Nos exercícios, discutiremos critérios de parada para o método das potências que são baseados no autovetor dominante em vez do autovalor dominante.

Revisão de conceitos

- Sequência de potências
- Autovalor dominante
- Autovetor dominante
- Método das potências com mudança de escala euclidiana
- Quociente de Rayleigh
- Método das potências com mudança de escala de entrada máxima
- Erro relativo
- Erro percentual
- Erro relativo estimado
- Erro percentual estimado
- Critério de parada

Aptidões desenvolvidas

- Identificar o autovalor dominante de uma matriz.
- Usar os métodos das potências descritos nesta seção para aproximar um autovetor dominante.
- Encontrar os erros relativo e percentual estimados associados com os métodos das potências.

Conjunto de exercícios 9.2

▶ Nos Exercícios **1–2**, são dados os autovalores distintos de uma matriz A. Em cada caso, determine se A tem um autovalor dominante e, se tiver, encontre-o. ◀

1. (a) $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -8, \lambda_4 = 1$

(b) $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 5$

2. (a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = 2$

(b) $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = 3$

▶ Nos Exercícios **3–4**, aplique o método das potências com mudança de escala euclidiana à matriz A, começando com $\mathbf{x}_0$ e parando em $\mathbf{x}_4$. Compare a aproximação resultante com o valor exato do autovalor dominante e o autovetor unitário correspondente. ◀

3. $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **5–6**, aplique o método das potências com mudança de escala de entrada máxima à matriz A, começando com $\mathbf{x}_0$ e parando em $\mathbf{x}_4$. Compare a aproximação resultante com o valor exato do autovalor dominante e o autovetor unitário correspondente. ◀

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Use o método das potências com mudança de escala de entrada máxima para aproximar um autovetor dominante de A. Comece com $\mathbf{x}_0$, arredonde todos os cálculos em três casas decimais e pare depois de três iterações.

(b) Use o resultado da parte (a) e o quociente de Rayleigh para aproximar o autovalor dominante de A.

(c) Encontre o valor exato do autovalor e autovetor aproximados nas partes (a) e (b).

(d) Encontre o erro percentual na aproximação do autovalor dominante.

8. Repita as instruções do Exercício 7 com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

▶ Nos Exercícios **9–10**, são dados uma matriz A com um autovalor dominante e uma sequência $\mathbf{x}_0, A\mathbf{x}_0, \ldots, A^5\mathbf{x}_0$. Use as Fórmulas (9) e (10) para aproximar o autovalor dominante e um autovetor associado. ◀

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A^2\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$A^3\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 13 \\ 14 \end{bmatrix}$, $A^4\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 41 \\ 40 \end{bmatrix}$, $A^5\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 121 \\ 122 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A^2\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$,

$A^3\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \end{bmatrix}$, $A^4\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 40 \\ 41 \end{bmatrix}$, $A^5\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 122 \\ 121 \end{bmatrix}$

11. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{x}_0$ é um vetor unitário e $a \neq 0$. Mostre que, embora a matriz A seja simétrica e tenha um autovalor dominante, a sequência de potências (1) no Teorema 9.2.1 não converge. Isso mostra que é essencial a exigência, naquele teorema, de que o autovalor dominante seja positivo.

12. Em cada caso, use o método das potências com mudança de escala euclidiana para aproximar o autovalor dominante e um autovetor associado da matriz dada. Escolha seu vetor inicial e pare quando o erro percentual estimado na aproximação do autovalor for menor do que 0,1%.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 10 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

13. Repita o Exercício 12, mas dessa vez pare quando todas as entradas correspondentes em duas aproximações sucessivas de autovalores diferirem por menos de 0,01 em valor absoluto.

14. Repita o Exercício 12 usando mudança de escala de entrada máxima.

15. Prove que se A for uma matriz $n \times n$ não nula, então A^TA e AA^T têm autovalores dominantes positivos.

16. (***Requer Indução Matemática***) Sejam A uma matriz $n \times n$ e $\mathbf{x}_0$ um vetor unitário em R^n e defina a sequência $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \ldots$ por

$$\mathbf{x}_1 = \frac{A\mathbf{x}_0}{\|A\mathbf{x}_0\|}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{A\mathbf{x}_1}{\|A\mathbf{x}_1\|}, \ldots, \quad \mathbf{x}_k = \frac{A\mathbf{x}_{k-1}}{\|A\mathbf{x}_{k-1}\|}, \ldots$$

Prove, por indução, que $\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0 / \|A^k\mathbf{x}_0\|$.

17. (***Requer Indução Matemática***) Sejam A uma matriz $n \times n$ e $\mathbf{x}_0$ um vetor não nulo em R^n e defina a sequência $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \ldots$ por

$$\mathbf{x}_1 = \frac{A\mathbf{x}_0}{\max(A\mathbf{x}_0)}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{A\mathbf{x}_1}{\max(A\mathbf{x}_1)}, \ldots, \quad \mathbf{x}_k = \frac{A\mathbf{x}_{k-1}}{\max(A\mathbf{x}_{k-1})}, \ldots$$

Prove, por indução, que

$$\mathbf{x}_k = \frac{A^k\mathbf{x}_0}{\max(A^k\mathbf{x}_0)}$$

9.3 Serviços de busca na Internet

Os primeiros serviços de busca na Internet funcionavam verificando palavras-chave e frases no título e no conteúdo das páginas de documentos postados. Hoje, os serviços de busca mais populares usam algoritmos que têm por base o método das potências para analisar as referências (os *hyperlinks*) entre documentos. Nesta seção, discutimos uma das maneiras como isso é feito.

O ***Google***, o mais utilizado serviço de busca da Internet, foi desenvolvido em 1996 por Larry Page e Sergey Brin, enquanto ambos eram pós-graduandos da Universidade de Stanford, nos Estados Unidos. O Google usa um procedimento conhecido como ***algoritmo PageRank*** para analisar como documentos em *sites* relevantes fazem referência uns aos outros. Depois associa a cada *site* um escore ***PageRank***, armazena esses escores como uma matriz e usa os componentes do autovetor dominante dessa matriz para estabelecer a importância relativa dos *sites* para a busca.

Google começa usando um serviço de busca de texto padrão para encontrar um conjunto inicial S_0 de *sites* que contêm as páginas relevantes. Como as palavras podem ter sentidos múltiplos, tipicamente o conjunto S_0 contém alguns *sites* irrelevantes e omite *sites* relevantes. Para compensar isso, o conjunto S_0 é expandido para um conjunto S maior, que inclui todos os *sites* aos quais as páginas de *sites* em S_0 fazem referência. A premissa subjacente é que o conjunto S conterá os *sites* mais importantes que estão relacionados à busca. Esse processo é, então, repetido um certo número de vezes para refinar ainda mais a informação buscada.

Para sermos mais específicos, vamos supor que o conjunto de busca S contenha n *sites* e vamos definir a ***matriz de adjacência*** de S como a matriz $A = [a_{ij}]$ de tamanho $n \times n$ na qual

$$a_{ij} = 1 \text{ se o } \textit{site } i \text{ faz uma referência ao } \textit{site } j$$
$$a_{ij} = 0 \text{ se o } \textit{site } i \text{ não faz uma referência ao } \textit{site } j$$

Vamos supor que nenhum *site* se refira a si mesmo, de modo que todos os elementos na diagonal de A são zero.

► EXEMPLO 1 Matriz de adjacência

Aqui temos uma matriz de adjacência típica para um conjunto de busca S de quatro *sites*.

$$\begin{array}{c} \textit{Site}\text{ referido} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \quad \textit{Site}\text{ que faz referência} \tag{1}$$

Assim, o *site* 1 faz referência aos *sites* 3 e 4, o *site* 2 faz referência ao *site* 1, e assim por diante. ◄

Um *site* pode desempenhar um destes papéis básicos no processo de busca: o *site* pode ser um ***centro***, o que significa que ele *faz referência* a muitos outros *sites*; ou uma ***autoridade***, o que significa que ele *é referido* por muitos outros *sites*. Um dado *site* tipicamente pode ter propriedades tanto de centro quanto de autoridade, por fazer referências e por ser referido.

Nota histórica O termo *google* é uma variação da palavra inglesa *googol*, que representa o número 10^{100} (ou seja, 1 seguido de 100 zeros). Esse termo foi inventado em 1938 pelo matemático norte-americano Edward Kasner (1875-1955), e diz a lenda que o termo nasceu quando Kasner teria pedido a seu sobrinho de oito anos que desse um nome para um número realmente grande e ele teria respondido "googol". Kasner continuou então e também definiu um *googolplex* como sendo 10^{googol} (1 seguido de googol zeros).

Em geral, se A for uma matriz de adjacência de n *sites*, então as somas das entradas de colunas medirão o aspecto autoridade dos *sites*, e as somas das entradas de linhas medirão o aspecto centro dos *sites*. Por exemplo, as somas das entradas de colunas da matriz em (1) são 3, 1, 2 e 2, o que significa que o *site* 1 é referido por três outros *sites*, o *site* 2 é referido por um outro *site*, e assim por diante. Analogamente, as somas das entradas de linhas da matriz de (1) são 2, 1, 2 e 3, de modo que o *site* 1 faz referência a dois outros *sites*, o *site* 2 faz referência a um outro *site*, e assim por diante.

Em vista disto, se A for uma matriz de adjacência, dizemos que o vetor $\mathbf{h}_0$ das somas das entradas de linhas de A é o ***vetor centro inicial*** de A, e o vetor $\mathbf{a}_0$ das somas das entradas de colunas de A é o ***vetor autoridade inicial*** de A. Alternativamente, podemos pensar em $\mathbf{a}_0$ como o vetor das somas das entradas de *linhas* de A^T, o que acaba sendo mais conveniente para os cálculos. As entradas do vetor centro são denominadas os ***pesos de centro*** e as do vetor autoridade os ***pesos de autoridade***.

▶ EXEMPLO 2 Vetores centro e autoridade iniciais de uma matriz de adjacência

Encontre os vetores centro e autoridade iniciais da matriz de adjacência A do Exemplo 1.

Solução As somas das entradas de linhas de A fornecem o vetor centro inicial

$$\mathbf{h}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textit{Site } 1 \\ \textit{Site } 2 \\ \textit{Site } 3 \\ \textit{Site } 4 \end{matrix} \tag{2}$$

e as somas das entradas de linhas de A^T (que são as somas das entradas de colunas de A) fornecem o vetor centro inicial

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textit{Site } 1 \\ \textit{Site } 2 \\ \textit{Site } 3 \\ \textit{Site } 4 \end{matrix} \tag{3}$$ ◀

A contagem de referências no Exemplo 2 sugere que o *site* 4 é o principal centro e que o *site* 1 é a maior autoridade. Contudo, o número de referências não conta toda a história; por exemplo, parece razoável que se o *site* 1 for considerado a maior autoridade, então os centros que fazem referência a esse *site* deveriam ter maior peso e, se o *site* 4 for considerado o principal centro, então os *sites* aos quais esse centro faz referência deveriam ter maior peso. Assim, no processo de busca, precisa ser levada em conta a interação que existe entre centros e autoridades. Em vista disso, uma vez que o serviço de busca calculou o vetor autoridade inicial $\mathbf{a}_0$, ele usa a informação nesse vetor para criar um novo vetor centro $\mathbf{h}_1$ e um novo vetor autoridade $\mathbf{a}_1$ usando as fórmulas

$$\mathbf{h}_1 = \frac{A\mathbf{a}_0}{\|A\mathbf{a}_0\|} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_1 = \frac{A^T\mathbf{h}_1}{\|A^T\mathbf{h}_1\|} \tag{4}$$

Os numeradores nessas fórmulas fazem as ponderações e as normalizações servem para controlar o tamanho das entradas. Para entender como os numeradores efetuam as ponderações, encare o produto $A\mathbf{a}_0$ como uma combinação linear dos vetores coluna de A com coeficientes de $\mathbf{a}_0$. Por exemplo, com a matriz de adjacência do Exemplo 1 e o vetor autoridade calculado no Exemplo 2, temos

$$A\mathbf{a}_0 = \overset{\substack{\textit{Site}\ \text{referido} \\ 1\quad 2\quad 3\quad 4}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textit{Site } 1 \\ \textit{Site } 2 \\ \textit{Site } 3 \\ \textit{Site } 4 \end{matrix}$$

Assim, vemos que as referências a cada *site* referido são ponderadas pelos valores de autoridade em $\mathbf{a}_0$. Para controlar o tamanho das entradas, o serviço de busca normaliza $A\mathbf{a}_0$ para produzir o vetor centro atualizado

$$\mathbf{h}_1 = \frac{A\mathbf{a}_0}{\|A\mathbf{a}_0\|} = \frac{1}{\sqrt{86}}\begin{bmatrix}4\\3\\5\\6\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0{,}43133\\0{,}32350\\0{,}53916\\0{,}64700\end{bmatrix} \begin{matrix}\textit{Site } 1\\\textit{Site } 2\\\textit{Site } 3\\\textit{Site } 4\end{matrix} \quad \text{Novos pesos de centro}$$

O novo vetor centro $\mathbf{h}_1$ pode agora ser usado para atualizar o vetor autoridade usando a Fórmula (4). O produto $A^T\mathbf{h}_1$ efetua a ponderação, e a normalização controla o tamanho:

***Site* que faz referência**

$$A^T\mathbf{h}_1 \approx \overset{\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\end{matrix}}{\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}0{,}43133\\0{,}32350\\0{,}53916\\0{,}64700\end{bmatrix} \approx 0{,}43133\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} + 0{,}32350\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + 0{,}53916\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} + 0{,}64700\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}1{,}50966\\0{,}64700\\1{,}07833\\0{,}97049\end{bmatrix} \begin{matrix}\textit{Site } 1\\\textit{Site } 2\\\textit{Site } 3\\\textit{Site } 4\end{matrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = \frac{A^T\mathbf{h}_1}{\|A^T\mathbf{h}_1\|} \approx \frac{1}{2{,}19142}\begin{bmatrix}1{,}50966\\0{,}64700\\1{,}07833\\0{,}97049\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0{,}68889\\0{,}29524\\0{,}49207\\0{,}44286\end{bmatrix} \begin{matrix}\textit{Site } 1\\\textit{Site } 2\\\textit{Site } 3\\\textit{Site } 4\end{matrix} \quad \text{Novos pesos de autoridade}$$

Uma vez obtidos um vetor centro $\mathbf{h}_1$ e um vetor autoridade $\mathbf{a}_1$ atualizados, o serviço de busca repete o processo e calcula uma sucessão de vetores centro e autoridade gerando, assim, as sequências inter-relacionadas

$$\mathbf{h}_1 = \frac{A\mathbf{a}_0}{\|A\mathbf{a}_0\|}, \quad \mathbf{h}_2 = \frac{A\mathbf{a}_1}{\|A\mathbf{a}_1\|}, \quad \mathbf{h}_3 = \frac{A\mathbf{a}_2}{\|A\mathbf{a}_2\|}, \ldots, \quad \mathbf{h}_k = \frac{A\mathbf{a}_{k-1}}{\|A\mathbf{a}_{k-1}\|}, \ldots \tag{5}$$

$$\nearrow \quad \downarrow \quad \nearrow \quad \downarrow \quad \nearrow \quad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\mathbf{a}_0, \quad \mathbf{a}_1 = \frac{A^T\mathbf{h}_1}{\|A^T\mathbf{h}_1\|}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{A^T\mathbf{h}_2}{\|A^T\mathbf{h}_2\|}, \quad \mathbf{a}_3 = \frac{A^T\mathbf{h}_3}{\|A^T\mathbf{h}_3\|}, \ldots, \quad \mathbf{a}_k = \frac{A^T\mathbf{h}_k}{\|A^T\mathbf{h}_k\|}, \ldots \tag{6}$$

Contudo, cada uma dessas sequências é uma sequência de potências disfarçada. Por exemplo, substituindo a expressão de $\mathbf{h}_k$ na expressão de $\mathbf{a}_k$, obtemos

$$\mathbf{a}_k = \frac{A^T\mathbf{h}_k}{\|A^T\mathbf{h}_k\|} = \frac{A^T\left(\dfrac{A\mathbf{a}_{k-1}}{\|A\mathbf{a}_{k-1}\|}\right)}{\left\|A^T\left(\dfrac{A\mathbf{a}_{k-1}}{\|A\mathbf{a}_{k-1}\|}\right)\right\|} = \frac{(A^TA)\mathbf{a}_{k-1}}{\|(A^TA)\mathbf{a}_{k-1}\|}$$

o que significa que podemos reescrever (6) como

$$\mathbf{a}_0, \quad \mathbf{a}_1 = \frac{(A^TA)\mathbf{a}_0}{\|(A^TA)\mathbf{a}_0\|}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{(A^TA)\mathbf{a}_1}{\|(A^TA)\mathbf{a}_1\|}, \ldots, \quad \mathbf{a}_k = \frac{(A^TA)\mathbf{a}_{k-1}}{\|(A^TA)\mathbf{a}_{k-1}\|}, \ldots \tag{7}$$

Analogamente, podemos reescrever (5) como

$$\mathbf{h}_1 = \frac{A\mathbf{a}_0}{\|A\mathbf{a}_0\|}, \quad \mathbf{h}_2 = \frac{(AA^T)\mathbf{h}_1}{\|(AA^T)\mathbf{h}_1\|}, \ldots, \quad \mathbf{h}_k = \frac{(AA^T)\mathbf{h}_{k-1}}{\|(AA^T)\mathbf{h}_{k-1}\|}, \ldots \tag{8}$$

Observação Nos exercícios, pedimos para o leitor mostrar que A^TA e AA^T têm autovalores dominantes positivos. Assim, o Teorema 9.2.1 garante que (7) e (8) convergem para os autovetores

dominantes de A^TA e AA^T, respectivamente. As entradas desses autovetores são os pesos de autoridade e de centro que o Google utiliza para ordenar os *sites* de busca em ordem de importância como autoridades e centros.

▶ EXEMPLO 3 Um procedimento de ordenamento

Suponha que um serviço de busca produza 10 *sites* da Internet em seu conjunto de busca e que a matriz de adjacência para esses *sites* seja

Site referido (colunas 1 a 10); *Site* que faz referência (linhas 1 a 10)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Use a Fórmula (7) para ordenar esses *sites* em ordem decrescente de autoridade.

Solução Tomemos $\mathbf{a}_0$ como o vetor normalizado das somas das entradas de colunas de A e então calculemos as iteradas em (7) até que os vetores autoridade pareçam estabilizados. Deixamos para o leitor mostrar que

$$\mathbf{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{54}}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}27217 \\ 0{,}13608 \\ 0{,}13608 \\ 0{,}68041 \\ 0{,}40825 \\ 0{,}13608 \\ 0{,}40825 \\ 0 \\ 0{,}27217 \end{bmatrix}$$

e que

$$(A^TA)\mathbf{a}_0 \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}27217 \\ 0{,}13608 \\ 0{,}13608 \\ 0{,}68041 \\ 0{,}40825 \\ 0{,}13608 \\ 0{,}40825 \\ 0 \\ 0{,}27217 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 3{,}26599 \\ 1{,}90516 \\ 1{,}90516 \\ 5{,}30723 \\ 1{,}36083 \\ 0{,}54433 \\ 3{,}67423 \\ 0 \\ 2{,}17732 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\mathbf{a}_1 = \frac{(A^TA)\mathbf{a}_0}{\|(A^TA)\mathbf{a}_0\|} \approx \frac{1}{8,15362}\begin{bmatrix} 0 \\ 3,26599 \\ 1,90516 \\ 1,90516 \\ 5,30723 \\ 1,36083 \\ 0,54433 \\ 3,67423 \\ 0 \\ 2,17732 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0,40056 \\ 0,23366 \\ 0,23366 \\ 0,65090 \\ 0,16690 \\ 0,06676 \\ 0,45063 \\ 0 \\ 0,26704 \end{bmatrix}$$

Continuando dessa maneira, obtemos as seguintes iterações de autoridade:

$\mathbf{a}_0$	$\mathbf{a}_1 = \frac{(A^TA)\mathbf{a}_0}{\|(A^TA)\mathbf{a}_0\|}$	$\mathbf{a}_2 = \frac{(A^TA)\mathbf{a}_1}{\|(A^TA)\mathbf{a}_1\|}$	$\mathbf{a}_3 = \frac{(A^TA)\mathbf{a}_2}{\|(A^TA)\mathbf{a}_2\|}$	$\mathbf{a}_4 = \frac{(A^TA)\mathbf{a}_3}{\|(A^TA)\mathbf{a}_3\|}$	$\cdots$	$\mathbf{a}_9 = \frac{(A^TA)\mathbf{a}_8}{\|(A^TA)\mathbf{a}_8\|}$	$\mathbf{a}_{10} = \frac{(A^TA)\mathbf{a}_9}{\|(A^TA)\mathbf{a}_9\|}$	
0	0	0	0	0		0	0	***Site* 1**
0,27217	0,40056	0,41652	0,41918	0,41973		0,41990	0,41990	***Site* 2**
0,13608	0,23366	0,24917	0,25233	0,25309		0,25337	0,25337	***Site* 3**
0,13608	0,23366	0,24917	0,25233	0,25309		0,25337	0,25337	***Site* 4**
0,68041	0,65090	0,63407	0,62836	0,62665		0,62597	0,62597	***Site* 5**
0,40825	0,16690	0,06322	0,02372	0,00889	$\cdots$	0,00007	0,00002	***Site* 6**
0,13608	0,06676	0,02603	0,00981	0,00368		0,00003	0,00001	***Site* 7**
0,40825	0,45063	0,46672	0,47050	0,47137		0,47165	0,47165	***Site* 8**
0	0	0	0	0		0	0	***Site* 9**
0,27217	0,26704	0,27892	0,28300	0,28416		0,28460	0,28460	***Site* 10**

As pequenas variações entre $\mathbf{a}_9$ e $\mathbf{a}_{10}$ sugerem que as iteradas estabilizaram perto de um autovetor dominante de A^TA. A partir das entradas de $\mathbf{a}_{10}$, concluímos que os *sites* 1, 6, 7 e 9 provavelmente são irrelevantes para a busca e que os demais *sites* deveriam ser acessados em ordem de importância decrescente como

site 5, *site* 8, *site* 2, *site* 10 e *sites* 3 e 4 (empate). ◀

Revisão de conceitos

- Matriz de adjacência
- Vetor centro
- Vetor autoridade
- Pesos de centro
- Pesos de autoridade

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar os vetores centro e autoridade iniciais de uma matriz de adjacência.
- Usar o método de Exemplo 3 para ordenar *sites*.

Conjunto de exercícios 9.3

▶ Nos Exercícios **1–2**, encontre os vetores centro e autoridade iniciais da matriz de adjacência A. ◀

1. ***Site* referido**

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{matrix}$$

***Site* que faz referência**

2. ***Site* referido**

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{matrix}$$

***Site* que faz referência**

▶ Nos Exercícios **3–4**, encontre os vetores centro e autoridade atualizados $\mathbf{h}_1$ e $\mathbf{a}_1$ da matriz de adjacência A. ◀

3. A matriz do Exercício 1.

4. A matriz do Exercício 2.

▶ Nos Exercícios **5–8**, é dada a matriz de adjacência A de um serviço de busca na Internet. Use o método do Exemplo 3 para ordenar os *sites* em ordem decrescente de autoridade. ◀

5. ***Site* referido**

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array}$$

***Site* que faz referência**

6. ***Site* referido**

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array}$$

***Site* que faz referência**

7. ***Site* referido**

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{array}$$

***Site* que faz referência**

8. ***Site* referido**

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{10} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{8} \\ \mathbf{9} \\ \mathbf{10} \end{array}$$

***Site* que faz referência**

9.4 Comparação de procedimentos para resolver sistemas lineares

Existe um velho ditado que diz que "tempo é dinheiro". Isso é especialmente válido na indústria, onde o custo de resolver um sistema linear é, muitas vezes, determinado pelo tempo que um computador leva para executar seus cálculos. Em geral, o tempo de computação depende de dois fatores: a velocidade do processador e o número de operações exigidas pelo algoritmo. Assim, a escolha do algoritmo correto tem implicações financeiras importantes num contexto industrial ou de pesquisa. Nesta seção, discutimos alguns dos fatores que afetam a escolha do algoritmo na resolução de sistemas lineares de grande escala.

Flops e o custo de resolução de um sistema linear

No jargão computacional, uma operação aritmética ($+$, $-$, $*$, $\div$) entre dois números reais é denominada um ***flop***, que é um acrônimo (em inglês) para "operação ponto-flutuante".‡ O número total de flops necessários para resolver um problema, que é denominado o ***custo*** da solução, fornece uma maneira conveniente de escolher entre vários algoritmos para resolver o problema. Se a velocidade do processador do computador e os aspectos financeiros de suas operações forem conhecidos, podemos converter, quando necessário, o custo em flops para unidades de tempo ou dinheiro. Por exemplo, muitos dos computadores pessoais de hoje são capazes de executar cerca de 10 gigaflops por segundo (1 gigaflop $= 10^9$ flops). Assim, um algoritmo que custa 1.000.000 flops seria executado em 0,0001 segundos.

‡ Os computadores armazenam os números reais como aproximações numéricas denominadas ***números ponto-flutuantes***. Na base 10, um número ponto-flutuante tem a forma $\pm\, 0, d_1 d_2 \cdots d_n \times 10^m$, em que m é um inteiro denominado ***mantissa***, e n é o número de dígitos à direita da vírgula decimal. O valor de n varia com o computador. Em alguns livros, o termo *flop* é utilizado como uma medida de velocidade do processador e significa "operações ponto-flutuantes *por segundo*". Neste livro, interpretamos flop como uma unidade de contagem.

Para ilustrar o cálculo do custo (em flops), vamos calcular o número de flops necessários para resolver um sistema linear de n equações em n incógnitas por eliminação de Gauss-Jordan. Para isso, utilizamos as seguintes fórmulas para a soma dos n primeiros inteiros positivos e a soma dos quadrados dos n primeiros números inteiros positivos, como segue.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2}$$

Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ um sistema linear de n equações em n incógnitas a ser resolvido por eliminação de Gauss-Jordan (ou, equivalentemente, eliminação gaussiana com retrossubstituição). Para simplificar, vamos supor que A seja invertível e que trocas de linhas não sejam necessárias para reduzir a matriz aumentada $[A \mid \mathbf{b}]$ à forma escalonada por linhas. Os diagramas que acompanham a análise a seguir fornecem uma maneira conveniente de contar as operações necessárias para introduzir um pivô na primeira linha e zeros abaixo do pivô. Na nossa contagem de operações, vamos agrupar produtos com divisões como "multiplicações" e somas com subtrações como "adições."

Passo 1. São necessários n flops (multiplicações) para introduzir um pivô na primeira linha.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \times & \times & \cdots & \times & \times & \times \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right]$$

$\times$ denota uma quantidade que está sendo calculada.
$\bullet$ denota uma quantidade que não está sendo calculada.
O tamanho da matriz aumentada é $n \times (n + 1)$

Passo 2. São necessárias n multiplicações e n adições para introduzir um zero abaixo do pivô e existem $n - 1$ linhas abaixo do pivô, de modo que são necessários $2n(n - 1)$ flops para introduzir os zeros abaixo do pivô.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \times & \times & \cdots & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \cdots & \times & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \times & \times & \cdots & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \cdots & \times & \times & \times \end{array}\right]$$

Coluna 1. Combinando os passos 1 e 2, o número de flops necessários para a coluna 1 é

$$n + 2n(n - 1) = 2n^2 - n$$

Coluna 2. O procedimento para a coluna 2 é o mesmo que para a coluna 1, exceto que agora estamos tratando com uma linha a menos e uma coluna a menos. Assim, o número de flops necessários para introduzir o pivô na linha 2 e os zeros abaixo do

pivô pode ser obtido substituindo n por $n - 1$ na contagem de flops da primeira coluna. Assim, o número de flops necessários para a coluna 2 é

$$2(n-1)^2 - (n-1)$$

Coluna 3. Pelo argumento usado para a coluna 2, o número de flops necessários para a coluna 3 é

$$2(n-2)^2 - (n-2)$$

Total para todas as colunas. O padrão deveria estar claro agora. O número total de flops necessários para criar os n pivôs e os zeros associados é

$$(2n^2 - n) + [2(n-1)^2 - (n-1)] + [2(n-2)^2 - (n-2)] + \cdots + (2-1)$$

que pode ser reescrito como

$$2[n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 1] - [n + (n-1) + \cdots + 1]$$

ou, aplicando as Fórmulas (1) e (2), como

$$2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n$$

Agora passamos a contar o número de operações necessárias para completar a fase inversa.

Coluna n. São necessárias $n - 1$ multiplicações e $n - 1$ adições para introduzir os zeros acima do pivô da enésima coluna, de modo o número total de flops para essa coluna é $2(n - 1)$.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & 0 & \times \\ 0 & 1 & \bullet & \cdots & \bullet & 0 & \times \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \bullet & 0 & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bullet \end{array}\right]$$

Coluna $(n - 1)$. O procedimento é o mesmo que para o Passo 1, exceto que agora estamos tratando com uma linha a menos. Assim, o número de flops necessários para a coluna $(n - 1)$ é $2(n - 2)$.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \bullet & \bullet & \cdots & 0 & 0 & \times \\ 0 & 1 & \bullet & \cdots & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bullet \end{array}\right]$$

Coluna $(n - 2)$. Pelo argumento para a coluna $(n - 1)$, o número de flops necessários para a coluna $(n - 2)$ é $2(n - 3)$.

Total. O padrão deveria estar claro agora. O número total de flops necessários para completar a fase inversa é

$$2(n-1) + 2(n-2) + 2(n-3) + \cdots + 2(n-n) = 2[n^2 - (1 + 2 + \cdots + n)]$$

que pode ser reescrito, usando a Fórmula (1), como

$$2\left(n^2 - \frac{n(n+1)}{2}\right) = n^2 - n$$

Resumindo, mostramos que o número de flops necessários para a eliminação de Gauss-Jordan em suas duas fases é

$$\text{flops na fase direta} = \tfrac{2}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{6}n \qquad (3)$$

$$\text{flops na fase inversa} = n^2 - n \qquad (4)$$

Assim, o custo total para resolver um sistema linear pela eliminação de Gauss-Jordan é

$$\text{flops nas duas fases} = \tfrac{2}{3}n^3 + \tfrac{3}{2}n^2 - \tfrac{7}{6}n \qquad (5)$$

Estimativas do custo de resolução de sistemas lineares grandes

Uma propriedade dos polinômios é que a maior contribuição para o valor do polinômio é dada pelo termo de maior grau, quando calculado em valores grandes da variável independente. Assim, para sistemas lineares *grandes*, podemos usar (3) e (4) para aproximar o número de flops nas duas fases como

$$\text{flops na fase direta} \approx \tfrac{2}{3}n^3 \qquad (6)$$

$$\text{flops na fase inversa} \approx n^2 \qquad (7)$$

Isso mostra que, para sistemas lineares grandes, a fase direta custa mais do que a inversa. De fato, pode ser enorme a diferença do custo entre as duas fases, como mostra o próximo exemplo.

▶ EXEMPLO 1 Custo de resolver um sistema linear grande

Aproxime o tempo necessário para executar cada fase da eliminação de Gauss-Jordan num sistema de 10.000 (= 10^4) equações em 10.000 incógnitas, usando um computador que consiga executar 10 gigaflops por segundo.

Solução Temos $n = 10^4$ no sistema dado, de modo que, usando (6) e (7), os números de gigaflops necessários para as duas fases são dados por

$$\text{gigaflops na fase direta} \approx \tfrac{2}{3}n^3 \times 10^{-9} = \tfrac{2}{3}(10^4)^3 \times 10^{-9} = \tfrac{2}{3} \times 10^3$$

$$\text{gigaflops na fase inversa} \approx n^2 \times 10^{-9} = (10^4)^2 \times 10^{-9} = 10^{-1}$$

Assim, com 10 gigaflops por segundo, os tempos de execução de cada fase são

$$\text{tempo da fase direta} \approx \left(\tfrac{2}{3} \times 10^3\right) \times 10^{-1}\ \text{s} \approx 66{,}67\ \text{s}$$

$$\text{tempo da fase inversa} \approx (10^{-1}) \times 10^{-1}\ \text{s} \approx 0{,}01\ \text{s} \quad ◀$$

Deixamos como um exercício confirmar os resultados na Tabela 1.

Considerações sobre a escolha do algoritmo para resolução de sistemas lineares

Os métodos da decomposição *LU* e da eliminação de Gauss-Jordan diferem na contabilidade, mas, exceto por isso, envolvem o mesmo número de flops na resolução de um *único* sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de n equações em n incógnitas. Assim, nenhum dos dois métodos

tem uma vantagem sobre o outro quanto ao custo. Contudo, a decomposição LU tem outras vantagens, que o tornam o método preferido, como segue.

- A eliminação de Gauss-Jordan e a eliminação gaussiana usam a matriz aumentada $[A \mid \mathbf{b}]$, portanto precisamos conhecer $\mathbf{b}$. Por outro lado, a decomposição LU usa somente a matriz A, de modo que, uma vez conhecida essa decomposição, podemos utilizá-la com qualquer número de lados direitos, um de cada vez.
- A decomposição LU que é calculada para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser utilizada para calcular A^{-1}, se for necessário, com pouco trabalho adicional.
- Para sistemas lineares grandes, nos quais a memória do computador é muito solicitada, podemos dispensar o armazenamento dos pivôs e zeros que aparecem na diagonal principal de U e abaixo dela, já que essas entradas são conhecidas a partir do formato de U. O espaço que isso abre pode, então, ser utilizado para armazenar as entradas de L e, com isso, reduzir a quantidade de memória requerida para resolver o sistema.
- Se A for uma matriz grande consistindo em quase que só zeros e se as entradas não nulas de A estiverem concentradas numa faixa ao longo da diagonal principal, então existem técnicas que podem ser usadas para reduzir o custo da decomposição LU, dando à decomposição LU uma vantagem sobre a eliminação de Gauss-Jordan.

Tabela 1

Custo aproximado para uma matriz A de tamanho $n \times n$ com n grande

Algoritmo	Custo em flops
Eliminação de Gauss-Jordan (fase direta)	$\approx \frac{2}{3}n^3$
Eliminação de Gauss-Jordan (fase inversa)	$\approx n^2$
Decomposição LU de A	$\approx \frac{2}{3}n^3$
Substituição direta para resolver $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$	$\approx n^2$
Substituição inversa para resolver $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$	$\approx n^2$
A^{-1} reduzindo $[A \mid I]$ a $[I \mid A^{-1}]$	$\approx 2n^3$
Cálculo de $A^{-1}\mathbf{b}$	$\approx 2n^3$

O custo em flops da eliminação gaussiana é igual ao da fase direta da eliminação de Gauss-Jordan.

Revisão de conceitos

- Flop
- Fórmula para a soma dos n primeiros inteiros positivos
- Fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos
- Custo em flops da resolução de sistemas lineares grandes por vários métodos
- Custo em flops para inverter uma matriz por redução por linhas
- Questões para considerar na escolha de um algoritmo para resolver sistemas lineares grandes

Aptidões desenvolvidas

- Calcular o custo da resolução de um sistema linear pela eliminação de Gauss-Jordan.
- Aproximar o tempo necessário para executar as duas fases da eliminação de Gauss-Jordan.
- Aproximar o tempo necessário para encontrar uma decomposição LU de uma matriz.
- Aproximar o tempo necessário para encontrar a inversa de uma matriz invertível.

Conjunto de exercícios 9.4

1. Um certo computador consegue executar 10 gigaflops por segundo. Em cada caso, use a Fórmula (5) para encontrar o tempo necessário para resolver o sistema usando eliminação de Gauss-Jordan.

(a) Um sistema de 1.000 equações em 1.000 incógnitas.

(b) Um sistema de 10.000 equações em 10.000 incógnitas.

(c) Um sistema de 100.000 equações em 100.000 incógnitas.

2. Um certo computador consegue executar 100 gigaflops por segundo. Em cada caso, use a Fórmula (5) para encontrar o tempo necessário para resolver o sistema usando eliminação de Gauss-Jordan.

(a) Um sistema de 10.000 equações em 10.000 incógnitas.

(b) Um sistema de 100.000 equações em 100.000 incógnitas.

(c) Um sistema de 1.000.000 equações em 1.000.000 incógnitas.

3. Os computadores pessoais de hoje conseguem executar 70 gigaflops por segundo. Em cada caso, use a Tabela 1 para obter uma estimativa do tempo necessário para executar a operação dada com uma matriz invertível A de tamanho 10.000×10.000.

(a) Executar a fase direta da eliminação de Gauss-Jordan.

(b) Executar a fase inversa da eliminação de Gauss-Jordan.

(c) Obter uma decomposição LU de A.

(d) Encontrar A^{-1} reduzindo $[A \mid I]$ a $[I \mid A^{-1}]$.

4. O computador Roadrunner, da IBM, consegue operar a velocidades superiores a um petaflops por segundo (1 petaflop $= 10^{15}$ flops). Em cada caso, use a Tabela 1 para obter uma estimativa do tempo necessário para executar a operação dada com uma matriz invertível A de tamanho 100.000×100.000.

(a) Executar a fase direta da eliminação de Gauss-Jordan.

(b) Executar a fase inversa da eliminação de Gauss-Jordan.

(c) Obter uma decomposição LU de A.

(d) Encontrar A^{-1} reduzindo $[A \mid I]$ a $[I \mid A^{-1}]$.

5. (a) Obtenha uma aproximação do tempo necessário para executar a fase direta da eliminação de Gauss-Jordan num sistema de 100.000 equações em 100.000 incógnitas usando um computador que consiga executar 1 gigaflop por segundo. Faça o mesmo com a fase indireta. (Ver Tabela 1.)

(b) Um computador deve ser capaz de executar quantos gigaflops por segundo para encontrar a decomposição LU de uma matriz de tamanho 10.000×10.000 em menos de 0,5 segundos? (Ver Tabela 1.)

6. Um computador deve ser capaz de executar quantos teraflops por segundo para encontrar a inversa de uma matriz de tamanho 100.000×100.000 em menos de 0,5 segundos? (1 teraflop $= 10^{12}$ flops.)

▶ Nos Exercícios **7–10**, A e B são matrizes $n \times n$ e c é um número real. ◀

7. Quantos flops são necessários para calcular cA?

8. Quantos flops são necessários para calcular $A + B$?

9. Quantos flops são necessários para calcular AB?

10. Supondo que A seja uma matriz diagonal e k um inteiro positivo, quantos flops são necessários para calcular A^k?

9.5 Decomposição em valores singulares

Nesta seção, discutimos uma extensão da teoria de diagonalização de matrizes $n \times n$ simétricas para matrizes $m \times n$ arbitrárias. Os resultados que desenvolvemos nesta seção têm aplicações à compressão, ao armazenamento e à transmissão de informação digitalizada e formam a base de muitos dos melhores algoritmos computacionais que estão atualmente disponíveis para resolução de sistemas lineares.

Decomposições de matrizes quadradas

Vimos na Fórmula (2) da Seção 7.2 que qualquer matriz simétrica A pode ser expressa como

$$A = PDP^T \tag{1}$$

em que P é uma matriz ortogonal $n \times n$ de autovetores de A e D é a matriz diagonal cujas entradas diagonais são os autovalores associados aos vetores coluna de P. Nesta seção, vamos dizer que (1) é uma ***decomposição em autovalores*** de A (abreviada pelas iniciais em inglês EVD de A).

Se uma matriz A de tamanho $n \times n$ não for simétrica, então não existe uma decomposição em autovalores, mas existe uma ***decomposição de Hessenberg***

$$A = PHP^T$$

na qual P é uma matriz ortogonal e H é uma matriz de Hessenberg superior (Teorema 7.2.4). Além disso, se A tiver autovalores reais, existe ainda uma **decomposição de Schur**

$$A = PSP^{\mathrm{T}}$$

em que P é uma matriz ortogonal e S é triangular superior (Teorema 7.2.3).

As decomposições em autovalores, de Hessenberg e de Schur são importantes em algoritmos numéricos não só porque as matrizes D, H e S têm formatos mais simples do que A, mas também porque as matrizes ortogonais que aparecem nessas fatorações não aumentam os erros de arredondamento. Para ver isso, suponha que $\hat{\mathbf{x}}$ seja um vetor coluna cujas entradas são conhecidas exatamente e que

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{e}$$

seja o vetor que resulta quando ocorrem erros de arredondamento nas entradas de $\hat{\mathbf{x}}$. Se P for uma matriz ortogonal, então a propriedade de preservação de comprimentos de vetores por transformações ortogonais implica

$$\|P\mathbf{x} - P\hat{\mathbf{x}}\| = \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| = \|\mathbf{e}\|$$

o que nos diz que o erro em aproximar $P\hat{\mathbf{x}}$ por $P\mathbf{x}$ tem a mesma magnitude que o erro de aproximar $\hat{\mathbf{x}}$ por $\mathbf{x}$.

Existem dois caminhos principais para percorrer na procura de outros tipos de fatoração de uma matriz quadrada A arbitrária. Poderíamos procurar fatorações da forma

$$A = PJP^{-1}$$

em que P é invertível, mas não necessariamente ortogonal, ou poderíamos procurar fatorações da forma

$$A = U\Sigma V^T$$

em que U e V são ortogonais, mas não necessariamente iguais. O primeiro caminho leva a fatorações em que J é ou diagonal ou um certo tipo de matriz diagonal em blocos, denominada ***forma canônica de Jordan***, em homenagem ao matemático francês Camille Jordan (ver página 510). As formas canônicas de Jordan, que não serão consideradas neste texto, têm importância na teoria e em certas aplicações, mas são menos importantes numericamente por causa de dificuldades de arredondamento que decorrem da falta de ortogonalidade de P. Nesta seção, nos concentramos no segundo caminho.

Valores singulares

Como os produtos de matrizes do tipo A^TA desempenham um papel importante no nosso trabalho, começamos com dois teoremas básicos relativos a essas matrizes.

TEOREMA 9.5.1 *Se A for uma matriz $m \times n$, então*

(*a*) *A e A^TA têm o mesmo espaço nulo.*

(*b*) *A e A^TA têm o mesmo espaço linha.*

(*c*) *A^T e A^TA têm o mesmo espaço coluna.*

(*d*) *A e A^TA têm o mesmo posto.*

Provamos a parte (*a*) e deixamos as demais provas como exercícios.

Prova (a) Devemos mostrar que cada solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é uma solução de $A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e vice-versa. Se $\mathbf{x}_0$ for uma solução qualquer de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{x}_0$ também é solução de $A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0}$, pois

$$A^TA\mathbf{x}_0 = A^T(A\mathbf{x}_0) = A^T\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Reciprocamente, se $\mathbf{x}_0$ for uma solução qualquer de $A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{x}_0$ está no espaço nulo de A^TA e é, portanto, ortogonal a todos os vetores do espaço linha de A^TA, pela parte (*q*) do

Teorema 4.8.10. No entanto, A^TA é simétrica, de modo que $\mathbf{x}_0$ é ortogonal a cada vetor no espaço coluna de A^TA. Em particular, $\mathbf{x}_0$ deve ser ortogonal ao vetor $(A^TA)\mathbf{x}_0$, ou seja,

$$\mathbf{x}_0 \cdot (A^TA)\mathbf{x}_0 = 0$$

Usando a primeira fórmula da Tabela 1 da Seção 3.2 e as propriedades do operador de transposição, podemos reescrever isso como

$$\mathbf{x}_0^T(A^TA)\mathbf{x}_0 = (A\mathbf{x}_0)^T(A\mathbf{x}_0) = (A\mathbf{x}_0)\cdot(A\mathbf{x}_0) = \|A\mathbf{x}_0\|^2 = 0$$

o que implica $A\mathbf{x}_0 = 0$, provando que $\mathbf{x}_0$ é uma solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. ◀

TEOREMA 9.5.2 *Se A for uma matriz $m \times n$, então*

(a) *A^TA é ortogonalmente diagonalizável.*

(b) *Os autovalores de A^TA são não negativos.*

Prova (a) A matriz A^TA, por ser simétrica, é ortogonalmente diagonalizável pelo Teorema 7.2.1.

Prova (b) Como A^TA é ortogonalmente diagonalizável, existe alguma base ortonormal de R^n consistindo em autovetores de A^TA, digamos, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ forem os autovalores correspondentes, então, dado qualquer $1 \le i \le n$, temos

$$\|A\mathbf{v}_i\|^2 = A\mathbf{v}_i \cdot A\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i \cdot A^TA\mathbf{v}_i \qquad \text{[Fórmula (26) da Seção 3.2]}$$
$$= \mathbf{v}_i \cdot \lambda_i\mathbf{v}_i = \lambda_i(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) = \lambda_i\|\mathbf{v}_i\|^2 = \lambda_i$$

Segue dessa relação que $\lambda_i \ge 0$. ◀

Em toda esta seção, vamos supor que os autovalores de A^TA estão nomeados de tal forma que

$$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge 0$$

e, portanto, que

$$\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_n \ge 0$$

DEFINIÇÃO 1 Se A for uma matriz $m \times n$ e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de A^TA, então os números

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \quad \sigma_n = \sqrt{\lambda_n}$$

são denominados ***valores singulares*** de A.

▶ EXEMPLO 1 Valores singulares

Encontre os valores singulares da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução O primeiro passo é encontrar os autovalores da matriz

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de A^TA é

$$\lambda_2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

de modo que os autovalores de A^TA são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$ e os valores singulares de A em ordem decrescente de tamanho são

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{3}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1$$ ◀

Antes de passar ao resultado principal desta seção, convém estender a noção de "diagonal principal" para matrizes que não são quadradas. Definimos a ***diagonal principal*** de uma matriz $m \times n$ como a fileira de entradas mostrada na Figura 9.5.1, que começa no canto superior esquerdo e se estende diagonalmente até onde for possível. Dizemos que as entradas nessa diagonal principal são as ***entradas diagonais*** da matriz.

Agora estamos prontos para considerar o resultado principal desta seção, que diz respeito a uma maneira específica de fatorar uma matriz A arbitrária de tamanho $m \times n$. Essa fatoração, denominada ***decomposição em valores singulares*** de A (que abreviamos com as iniciais em inglês SVD de A), será dada em duas versões: uma curta, que captura a ideia principal, e uma expandida, que fornece todos os detalhes. A prova será dada ao final desta seção.

Decomposição em valores singulares

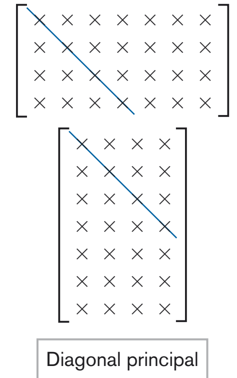


Figura 9.5.1

TEOREMA 9.5.3 Decomposição em valores singulares

Se A for uma matriz $m \times n$, então A pode ser expressa como

$$A = U\Sigma V^T$$

em que U e V são matrizes ortogonais e Σ é uma matriz $m \times n$ cujas entradas diagonais são os valores singulares de A e cujas demais entradas são nulas.

TEOREMA 9.5.4 Decomposição em valores singulares (versão expandida)

Se A for uma matriz $m \times n$ de posto k, então A pode ser fatorada como

$$A = U\Sigma V^T = [\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{u}_k \mid \mathbf{u}_{k+1} \;\; \cdots \;\; \mathbf{u}_m] \left[\begin{array}{cccc|c} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0_{k\times(n-k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_k & \\ \hline & 0_{(m-k)\times k} & & & 0_{(m-k)\times(n-k)} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_k^T \\ \hline \mathbf{v}_{k+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{array}\right]$$

em que U, Σ e V têm tamanhos $m \times m$, $m \times n$ e $n \times n$, respectivamente e satisfazem as condições seguintes.

(a) $V = [\mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{v}_n]$ *diagonaliza ortogonalmente* A^TA.

(b) *As entradas diagonais não nulas de* Σ *são* $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}, \ldots,$ $\sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$, *sendo* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, *os autovalores não nulos de* A^TA *associados aos vetores coluna de* V.

(c) *Os vetores coluna de* V *são ordenados de tal modo que* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0$.

(d) $\mathbf{u}_i = \dfrac{A\mathbf{v}_i}{\|A\mathbf{v}_i\|} = \dfrac{1}{\sigma_i}A\mathbf{v}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$

(e) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ *é uma base ortonormal de* $\mathrm{col}(A)$.

(f) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ *é uma extensão de* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ *a uma base ortonormal de* R^m.



Harry Bateman (1882–1946)

Nota histórica O termo *valor singular* é aparentemente devido ao matemático Harry Bateman, nascido na Inglaterra, que o utilizou num artigo científico publicado em 1908. Em 1910, Bateman emigrou para os Estados Unidos, lecionando na Escola Bryn Mawr, na Universidade Johns Hopkins e, finalmente, no Instituto Tecnológico da Califórnia. É interessante observar que ele recebeu seu doutorado em Johns Hopkins em 1913, quando já era um matemático eminente, com 60 publicações científicas.

[Imagem: Cortesia dos Arquivos do California Institute of Technology]

Os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ são denominados ***vetores singulares à esquerda*** de A; e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, os ***vetores singulares à direita*** de A.

► EXEMPLO 2 Decomposição em valores singulares se A não for quadrada

Encontre uma decomposição em valores singulares da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução Mostramos no Exemplo 1 que os autovalores de A^TA são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$ e que os valores singulares de A são $\sigma_1 = \sqrt{3}$ e $\sigma_2 = 1$. Deixamos para o leitor verificar que

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

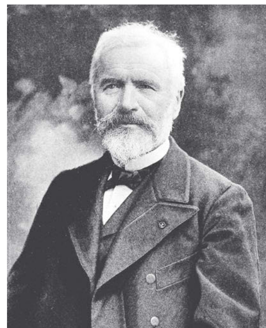
são autovetores associados a λ_1 e λ_2, respectivamente, e que $V = [\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2]$ diagonaliza A^TA ortogonalmente. Pela parte (*d*) do Teorema 9.5.4, os vetores

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2}A\mathbf{v}_2 = (1)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$



Eugenio Beltrami (1835–1900)



Camille Jordan (1838–1922)



Herman Klaus Weyl (1885–1955)



Gene H. Golub (1932–)

Nota histórica A teoria da decomposição em valores singulares pode ser traçada até o trabalho de cinco pessoas: o matemático italiano Eugenio Beltrami, o matemático francês Camille Jordan, o matemático inglês James Sylvester (ver página 34), e os matemáticos alemães Erhard Schmidt (ver página 360) e Herman Weyl. Mais recentemente, os esforços pioneiros do matemático norte-americano Gene Golub produziram um algoritmo estável e eficaz para calculá-la. Beltrami e Jordan foram os pais da decomposição, sendo que, em 1873, Beltrami deu uma prova para o caso de matrizes reais invertíveis com valores singulares distintos. Subsequentemente, Jordan refinou a teoria e eliminou as restrições desnecessárias impostas por Beltrami. Sylvester, aparentemente desconhecendo o trabalho de Beltrami e Jordan, redescobriu o resultado em 1889 e indicou sua importância. Schmidt foi a primeira pessoa a mostrar que a decomposição em valores singulares poderia ser usada para aproximar uma matriz por outra de posto menor e, ao fazer isso, ele transformou-a de uma curiosidade matemática numa importante ferramenta prática. Weyl mostrou como encontrar a aproximação de posto menor na presença de erro.

[Imagens: Wikipedia (Beltrami); The Granger Collection, New York (Jordan); Cortesia de Electronic Publishing Services, Inc., New York (Weyl); Wikipedia (Golub)]

são dois dos três vetores coluna de U. Observe que $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são ortonormais, como esperávamos. Poderíamos estender o conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ a uma base ortonormal de R^3. Contudo, os cálculos simplificam se primeiro removermos as incômodas raízes multiplicando $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ por escalares apropriados. Assim, procuramos um vetor unitário $\mathbf{u}_3$ ortogonal a

$$\sqrt{6}\,\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sqrt{2}\,\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para satisfazer essas duas condições de ortogonalidade, o vetor $\mathbf{u}_3$ deve ser uma solução do sistema linear homogêneo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deixamos para o leitor mostrar que uma solução geral desse sistema é

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalizando o vetor do lado direito, obtemos

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Assim, a decomposição em valores singulares de A é

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \; \underset{=}{=} \; \underset{U}{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}} \underset{\Sigma}{\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{V^T}{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}$$

O leitor pode querer confirmar a validade dessa equação multiplicando as matrizes do lado direito. ◀

Concluímos esta seção com uma prova opcional do Teorema 9.5.4.

OPCIONAL

Prova do Teorema 9.5.4 Para simplificar a notação, vamos provar o teorema no caso em que A é uma matriz $n \times n$. Para estender o argumento para uma matriz $m \times n$, basta ajustar a notação usada para levar em conta as possibilidades $m > n$ ou $n > m$.

A matriz A^TA é simétrica, portanto, possui uma decomposição em autovalores

$$A^TA = VDV^T$$

em que os vetores coluna de

$$V = [\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n]$$

são autovetores unitários de A^TA e D é a matriz diagonal cujas entradas diagonais sucessivas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de A^TA que correspondem em sucessão aos vetores coluna de V. Como A tem posto k por hipótese, segue do Teorema 9.5.1 que A^TA também

tem posto k. Segue disso que também D tem posto k, por ser semelhante a A^TA e o posto ser um invariante de semelhança. Assim, podemos escrever D como

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_k & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

em que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0$. Agora considere o conjunto de imagens

$$\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_n\} \tag{3}$$

Esse conjunto é ortogonal, pois, se $i \neq j$, então a ortogonalidade de $\mathbf{v}_i$ e $\mathbf{v}_j$ implica

$$A\mathbf{v}_i \cdot A\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i \cdot A^TA\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i \cdot \lambda j\, \mathbf{v}_j = \lambda_j (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j) = 0$$

Além disso, os k primeiros vetores em (3) são não nulos, pois mostramos na prova do Teorema 9.5.2b que $\|A\mathbf{v}_i\|^2 = \lambda_i$ com $i = 1, 2, \ldots, n$ e estamos supondo que as k primeiras entradas diagonais em (2) são positivas. Assim

$$S = \{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_k\}$$

é um conjunto ortogonal de vetores *não nulos* no espaço coluna de A. Mas o espaço coluna de A tem dimensão k, pois

$$\text{pos}(A) = \text{pos}(A^TA) = k$$

e, portanto, sendo um conjunto linearmente independente de k vetores, S necessariamente é uma base ortogonal de col(A). Normalizando esses vetores em S, obtemos uma base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ de col(A) em que

$$= \frac{A\mathbf{v}_i}{\|A\mathbf{v}_i\|} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A\mathbf{v}_i \qquad (1 \leq i \leq k)$$

ou, equivalentemente,

$$A\mathbf{v}_1 = \sqrt{\lambda_1}\mathbf{u}_1 = \sigma_1\mathbf{u}_1, \quad A\mathbf{v}_2 = \sqrt{\lambda_2}\mathbf{u}_2 = \sigma_2\mathbf{u}_2, \ldots, \quad A\mathbf{v}_k = \sqrt{\lambda_k}\mathbf{u}_k = \sigma_k\mathbf{u}_k \tag{4}$$

Segue do Teorema 6.3.6 que podemos estender isso a uma base ortonormal

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

de R^n. Sejam, agora, U a matriz ortogonal

$$U = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_k \quad \mathbf{u}_{k+1} \quad \cdots \quad \mathbf{u}_n]$$

e Σ a matriz diagonal

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & & 0 \\ & \sigma_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sigma_k & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Segue de (4) e do fato de que $A\mathbf{v}_i = 0$ com $i > k$, que

$$\begin{aligned} U\Sigma &= [\sigma_1\mathbf{u}_1 \quad \sigma_2\mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \sigma_k\mathbf{u}_k \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \\ &= [A\mathbf{v}_1 \quad A\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{v}_k \quad A\mathbf{v}_{k+1} \quad \cdots \quad A\mathbf{v}_n] \\ &= AV \end{aligned}$$

que, usando a ortogonalidade de V, pode ser reescrito como $A = U\Sigma V^T$. ◀

Revisão de conceitos

- Decomposição em autovalores
- Decomposição de Hessenberg
- Decomposição de Schur
- Magnitude do erro de arredondamento
- Propriedades comuns a A e A^TA
- A^TA é ortogonalmente diagonalizável
- Os autovalores de A^TA são não negativos
- Valores singulares
- Entradas diagonais de uma matriz que não é quadrada
- Decomposição em valores singulares

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar os valores singulares de uma matriz $m \times n$.
- Encontrar uma decomposição em valores singulares de uma matriz $m \times n$.

Conjunto de exercícios 9.5

▶ Nos Exercícios **1–4**, encontre os valores singulares distintos de A. ◀

1. $A = [1 \quad 2 \quad 0]$

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **5–12**, encontre uma decomposição em valores singulares de A. ◀

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

13. Prove: se A for uma matriz $m \times n$, então A^TA e AA^T têm o mesmo posto.

14. Prove a parte (*d*) do Teorema 9.5.1 usando a parte (*a*) desse teorema e o fato de que A e A^TA têm n colunas.

15. (a) Prove a parte (*b*) do Teorema 9.5.1 mostrando primeiro que $\text{lin}(A^TA)$ é um subespaço de $\text{lin}(A)$.

(b) Prove a parte (*c*) do Teorema 9.5.1 usando a parte (*b*).

16. Sejam $T: R^n \to R^m$ uma transformação linear cuja matriz canônica A tem uma decomposição em valores singulares $A = U\Sigma V^T$ e $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ e $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ os vetores coluna de V e U, respectivamente. Mostre que $\Sigma = [T]_{B',B}$.

17. Mostre que os valores singulares de A^TA são os quadrados dos valores singulares de A.

18. Mostre que se $A = U\Sigma V^T$ for uma decomposição em valores singulares de A, então U diagonaliza AA^T ortogonalmente.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(g), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se A for uma matriz $m \times n$, então A^TA é uma matriz $m \times n$.

(b) Se A for uma matriz $m \times n$, então A^TA é uma matriz simétrica.

(c) Se A for uma matriz $m \times n$, então os autovalores de A^TA são números reais positivos.

(d) Se A for uma matriz $n \times n$, então A é ortogonalmente diagonalizável.

(e) Se A for uma matriz $m \times n$, então A^TA é ortogonalmente diagonalizável.

(f) Os autovalores de A^TA são valores singulares de A.

(g) Qualquer matriz $m \times n$ tem uma decomposição em valores singulares.

9.6 Compressão de dados usando decomposição em valores singulares

A transmissão e o armazenamento eficientes de grandes quantidades de dados digitalizados têm se tornado um dos maiores problemas de nosso mundo tecnológico. Nesta seção, discutimos o papel desempenhado pela decomposição em valores singulares na compressão de dados digitalizados de modo que possam ser transmitidos mais rapidamente e que ocupem menos espaço de armazenamento. Nesta seção, vamos supor que o leitor tenha lido a Seção 9.5.

Decomposição em valores singulares reduzida

Algebricamente, as linhas e as colunas nulas da matriz Σ no Teorema 9.5.4 são supérfluas e podem ser eliminadas multiplicando-se por extenso a expressão $U \Sigma V^T$, por meio de multiplicação em blocos, e subdividindo-se as matrizes conforme indicado naquela fórmula. Os produtos que envolvem blocos nulos como fatores desaparecem, restando

$$A = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_k] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_k^T \end{bmatrix} \tag{1}$$

que é denominada uma ***decomposição em valores singulares reduzida*** de A. Neste livro, denotamos as matrizes do lado direito de (1) por U_1, Σ_1 e V_1^T, respectivamente, e escrevemos essa equação como

$$A = U_1 \Sigma_1 V_1^T \tag{2}$$

Observe que os tamanhos de U_1, Σ_1 e V_1^T são $m \times k$, $k \times k$ e $k \times n$, respectivamente, e que a matriz Σ_1 é invertível, já que suas entradas diagonais são positivas.

Multiplicando o lado direito de (1) por colunas e linhas, obtemos

$$A = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \cdots + \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T \tag{3}$$

que é denominada ***expansão em valores singulares reduzida*** de A. Esse resultado é aplicável a *qualquer* matriz, ao passo que a decomposição espectral [Fórmula (7) da Seção 7.2] é aplicável somente a matrizes simétricas.

Observação Pode ser provado que uma matriz M de tamanho $m \times n$ tem posto 1 se, e só se, pode ser fatorada como $M = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$, em que $\mathbf{u}$ é um vetor coluna em R^m e V é um vetor coluna em R^n. Assim, uma decomposição em valores singulares reduzida expressa uma matriz A de posto k como uma combinação linear de k matrizes de posto 1.

▶ EXEMPLO 1 Decomposição em valores singulares reduzida

Encontre uma decomposição em valores singulares reduzida e uma expansão em valores singulares reduzida da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução No Exemplo 2 da Seção 9.5, encontramos a decomposição em valores singulares

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{U}{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}} \underset{\Sigma}{\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{V^T}{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}} \tag{4}$$

Como A tem posto 2 (verifique), segue de (1) com $k = 2$ que a decomposição em valores singulares reduzida de A correspondente a (4) é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Isso fornece a expansão em valores singulares reduzida

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + \sigma_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T = \sqrt{3}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{3}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Observe que as matrizes na expansão têm posto 1, como é de se esperar. ◄

Compressão de dados e processamento de imagens

As decomposições em valores singulares podem ser utilizadas para "comprimir" informação visual com o objetivo de reduzir seu espaço de armazenamento e acelerar sua transmissão eletrônica. O primeiro passo na compressão de uma imagem visual é representá-la como uma matriz numérica, a partir da qual a imagem possa ser recuperada quando for necessário.

Por exemplo, uma fotografia em preto e branco pode ser escaneada como um arranjo retangular de pixels (pontos) e armazenada como uma matriz A, associando a cada pixel um valor numérico de acordo com seu tom de cinza. Se utilizarmos 256 níveis de cinza (sendo $0 =$ branco e $255 =$ preto), então as entradas na matriz serão números inteiros entre 0 e 255. A imagem pode ser recuperada a partir da matriz A imprimindo ou exibindo os pixels com seus níveis de cinza associados.



Original **Reconstrução**

Nota histórica Em 1924, o FBI norte-americano começou a colecionar impressões digitais e de mãos, tendo atualmente mais de 30 milhões de tais impressões arquivadas. Para reduzir o custo de armazenagem, em 1993, o FBI começou a trabalhar com o Laboratório Nacional de Los Alamos, o Instituto Nacional de Padrões dos Estados Unidos e outros grupos para conseguir métodos de compressão para arquivar as impressões em formato digital. A figura dada mostra uma impressão digital original e uma reconstrução a partir de informação digital comprimida na taxa de 26:1.

Se a matriz A tiver tamanho $m \times n$, então poderíamos armazenar cada uma de suas mn entradas individualmente. Um procedimento alternativo é calcular a decomposição em valores singulares reduzida

$$A = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \cdots + \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T \tag{5}$$

na qual $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_k$ e armazenar os números σ, e os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Quando for preciso, a matriz A (e, portanto, a imagem que representa) pode ser reconstruída a partir de (5). Como cada vetor $\mathbf{u}$ tem m entradas e cada vetor $\mathbf{v}$ tem n entradas, esse método requer espaço de armazenamento para

$$km + kn + k = k(m + n + 1)$$

números. Suponha, entretanto, que os valores singulares $\sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_k$ sejam suficientemente pequenos, a ponto de poderem ser ignorados em (5), e produzam, assim, uma aproximação aceitável

$$A_r = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \cdots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T \tag{6}$$

de A e da imagem que A representa. Dizemos que (6) é a ***aproximação de posto r de A***. Essa matriz requer espaço de armazenamento para apenas

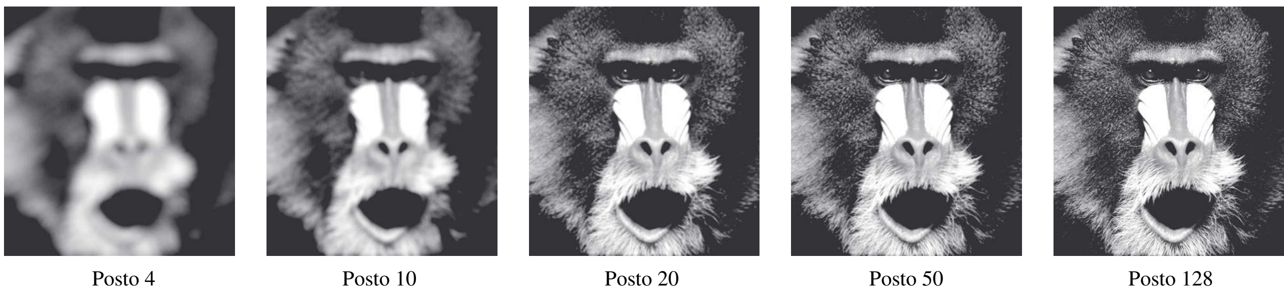
$$rm + rn + r = r(m + n + 1)$$

números, ao contrário dos mn números requeridos para um armazenamento entrada a entrada de A. Por exemplo, uma aproximação de posto 100 de uma matriz A de tamanho 1.000×1.000 requer espaço de armazenamento para apenas

$$100(1.000 + 1.000 + 1) = 200.100$$

números, ao contrário do milhão de números requeridos no armazenamento entrada a entrada, dando uma compressão de quase 80%.

A Figura 9.6.1 mostra algumas aproximações de uma imagem digitalizada de um babuíno gigante obtida usando (6).



Posto 4 Posto 10 Posto 20 Posto 50 Posto 128

▲ **Figura 9.6.1**

Revisão de conceitos

- Decomposição em valores singulares reduzida
- Expansão em valores singulares reduzida
- Posto de uma aproximação

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar a decomposição em valores singulares reduzida de uma matriz $m \times n$.
- Encontrar a expansão em valores singulares reduzida de uma matriz $m \times n$.

Conjunto de exercícios 9.6

▶ Nos Exercícios **1–4**, encontre uma decomposição em valores singulares reduzida de A. [*Observação*: cada matriz aparece no Conjunto de exercícios 9.5, onde foi pedida a decomposição em valores singulares não reduzida.] ◀

1. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios **5–8**, encontre uma expansão em valores singulares reduzida de A. ◀

5. A matriz A do Exercício 1.

6. A matriz A do Exercício 2.

7. A matriz A do Exercício 3.

8. A matriz A do Exercício 4.

9. Suponha que A seja uma matriz 200×500. Quantos números devem ser armazenados na aproximação de posto 100 de A? Compare isso com o número de entradas de A.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(c), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta. Suponha que $U_1\Sigma_1V_1^T$ seja uma decomposição em valores singulares reduzida de uma matriz A de tamanho $m \times n$ e posto k.

(a) U_1 tem tamanho $m \times k$.

(b) Σ_1 tem tamanho $k \times k$.

(c) V_1 tem tamanho $k \times n$.

Capítulo 9 Exercícios suplementares

1. Encontre uma decomposição LU de $A = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Encontre uma decomposição LDU da matriz A do Exercício 1.

3. Encontre uma decomposição LU de $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

4. Encontre uma decomposição LDU da matriz A do Exercício 3.

5. Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Identifique o autovalor dominante de A e encontre o autovetor unitário dominante $\mathbf{v}$ associado de entradas *positivas*.

(b) Aplique o método das potências com mudança de escala euclidiana a A e $\mathbf{x}_0$, parando em $\mathbf{x}_5$. Compare o valor de $\mathbf{x}_3$ obtido com o autovetor $\mathbf{v}$ encontrado na parte (a).

(c) Aplique o método das potências com mudança de escala de entrada máxima a A e $\mathbf{x}_0$, parando em $\mathbf{x}_5$. Compare o resultado obtido com o autovetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

6. Considere a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Discuta o comportamento da sequência de potências

$$\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_1, \ldots, \quad \mathbf{x}_k, \ldots$$

com mudança de escala euclidiana com um vetor $\mathbf{x}_0$ arbitrário *não nulo*. O que tem essa matriz para causar o comportamento observado?

7. Suponha que uma matriz simétrica A tenha autovalores distintos $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 1{,}4$, $\lambda_3 = 2{,}3$ e $\lambda_4 = -8{,}1$. O que você pode dizer sobre a convergência dos quocientes de Rayleigh?

8. Encontre uma decomposição em valores singulares de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Encontre uma decomposição em valores singulares de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Encontre uma decomposição em valores singulares reduzida e uma expansão em valores singulares reduzida da matriz A do Exercício 9.

11. Encontre uma decomposição em valores singulares reduzida da matriz cuja decomposição em valores singulares é dada por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

12. Matrizes ortogonalmente semelhantes têm os mesmos valores singulares? Justifique sua resposta.

13. O que você pode dizer sobre os valores singulares da matriz canônica P de uma projeção ortogonal de R^n sobre um subespaço W?

Aplicações da Álgebra Linear

CONTEÚDO DO CAPÍTULO

INTRODUÇÃO

Este capítulo consiste em 20 aplicações da Álgebra Linear. Com uma única exceção claramente identificada, cada aplicação é uma seção independente, de modo que as seções podem ser ignoradas ou permutadas à vontade. Cada tópico começa com uma lista de pré-requisitos de Álgebra Linear.

Como o nosso objetivo primordial neste capítulo é apresentar aplicações da Álgebra Linear, as provas são muitas vezes omitidas. Sempre que necessitamos de resultados de outras áreas, eles são enunciados precisamente, com motivação sempre que possível, mas geralmente sem prova.

10.1 Construindo curvas e superfícies por pontos especificados

Nesta seção, descrevemos uma técnica que utiliza determinantes para construir retas, círculos e seções cônicas gerais por pontos especificados no plano. O procedimento também é utilizado para construir planos e esferas no espaço tridimensional que passem por pontos fixados.

PRÉ-REQUISITOS: Sistemas lineares
Determinantes
Geometria Analítica

O teorema a seguir segue do Teorema 2.3.8.

TEOREMA 10.1.1 *Um sistema linear homogêneo com o mesmo número de equações e de incógnitas tem uma solução não trivial se, e só se, o determinante da matriz de coeficientes é zero.*

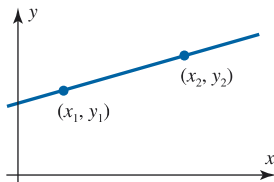
Mostremos como esse resultado pode ser usado para determinar as equações de várias curvas e superfícies por pontos especificados.

Uma reta por dois pontos

Suponha que (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sejam dois pontos distintos no plano. Existe uma única reta

$$c_1x + c_2y + c_3 = 0 \tag{1}$$

que passa por esses dois pontos (Figura 10.1.1). Observe que c_1, c_2 e c_3 não são todos nulos e que esses coeficientes são únicos a menos de uma constante multiplicativa. Como (x_1, y_1) e (x_2, y_2) estão na reta, substituindo-os em (1), obtemos as duas equações



▲ **Figura 10.1.1**

$$c_1x_1 + c_2y_1 + c_3 = 0 \tag{2}$$

$$c_1x_2 + c_2y_2 + c_3 = 0 \tag{3}$$

As três equações, (1), (2) e (3), podem ser agrupadas e reescritas como

$$\begin{aligned} xc_1 + yc_2 + c_3 &= 0 \\ x_1c_1 + y_1c_2 + c_3 &= 0 \\ x_2c_1 + y_2c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

que é um sistema linear homogêneo de três equações em c_1, c_2 e c_3. Como c_1, c_2 e c_3 não são todos nulos, o sistema tem uma solução não trivial, de modo que o determinante do sistema deve ser zero. Ou seja,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

Consequentemente, cada ponto (x, y) da reta satisfaz (4); reciprocamente, pode ser mostrado que cada ponto (x, y) que satisfaz (4) está na reta.

▶ EXEMPLO 1 A equação de uma reta

Encontre a equação da reta que passa pelos dois pontos (2, 1) e (3, 7).

Solução Substituindo as coordenadas dos dois pontos na Equação (4), obtemos

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A expansão em cofatores desse determinante ao longo da primeira linha dá

$$-6x + y + 11 = 0 \quad ◀$$

Um círculo por três pontos

Suponha que (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) sejam três pontos distintos não colineares do plano. Da Geometria Analítica sabemos que existe um único círculo, digamos,

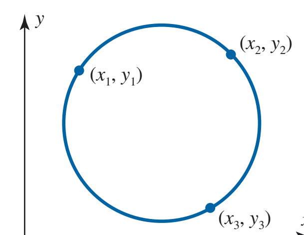
$$c_1(x_2 + y_2) + c_2 x + c_3 y + c_4 = 0 \tag{5}$$

que passa por esses três pontos (Figura 10.1.2). A substituição das coordenadas dos três pontos nessa equação fornece

$$c_1(x_1^2+y_1^2)+c_2x_1+c_3y_1+c_4=0 \tag{6}$$

$$c_1(x_2^2+y_2^2)+c_2x_2+c_3y_2+c_4=0 \tag{7}$$

$$c_1(x_3^2+y_3^2)+c_2x_3+c_3y_3+c_4=0 \tag{8}$$



▲ **Figura 10.1.2**

Como antes, as Equações (5) a (8) formam um sistema linear homogêneo com uma solução não trivial em c_1, c_2, c_3 e c_4. Assim, o determinante da matriz de coeficientes é zero,

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

Essa é a equação do círculo em forma de determinante.

▶ EXEMPLO 2 A equação de um círculo

Encontre a equação do círculo que passa pelos três pontos (1, 7), (6, 2) e (4, 6).

Solução Substituindo as coordenadas dos três pontos na Equação (9), obtemos

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 50 & 1 & 7 & 1 \\ 40 & 6 & 2 & 1 \\ 52 & 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que se reduz a

$$10(x^2 + y_2) - 20x - 40y - 200 = 0$$

A forma padrão dessa equação é

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$$

Assim, o círculo tem centro (1, 2) e raio 5. ◀

Uma cônica arbitrária por cinco pontos

Em seu trabalho monumental *Principia Mathematica*, Isaac Newton propôs e resolveu o problema seguinte (Livro I, Proposição 22, Problema 14): "Descrever uma cônica que deve passar por cinco pontos dados". Newton resolveu esse problema geometricamente, conforme Figura 10.1.3, em que traçou uma elipse pelos pontos A, B, D, P e C. Entretanto, também podem ser aplicados os métodos desta seção.

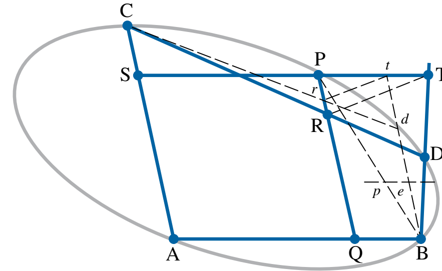


Figura 10.1.3

A equação geral de uma cônica arbitrária no plano (uma parábola, hipérbole ou elipse, ou formas degeneradas dessas) é dada por

$$c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6 = 0$$

Essa equação contém seis coeficientes, mas podemos reduzir o número para cinco se dividirmos tudo por qualquer um que não seja zero. Assim, basta determinar cinco coeficientes e, portanto, cinco pontos distintos do plano são suficientes para determinar a equação da cônica (Figura 10.1.4). Como antes, a equação pode ser posta na forma de determinante (ver Exercício 7):

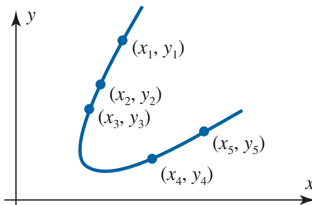


Figura 10.1.4

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

▶ EXEMPLO 3 A equação de uma órbita

Um astrônomo que deseja determinar a órbita de um asteroide em torno do Sol monta um sistema de coordenadas cartesianas no plano da órbita, com o Sol na origem. Ao logo dos eixos, são usadas unidades astronômicas (1 UA = 1 unidade astronômica = distância média da Terra ao Sol = 149,5 milhões de quilômetros). Pela primeira lei de Kepler, a órbita deve ser uma elipse, de modo que o astrônomo faz cinco observações do asteroide em cinco tempos distintos e encontra cinco pontos ao logo da órbita, a saber,

(8,025; 8,310), (10,170; 6,355), (11,202; 3,212), (10,736; 0,375), (9,092; −2,267)

Encontre a equação da órbita.

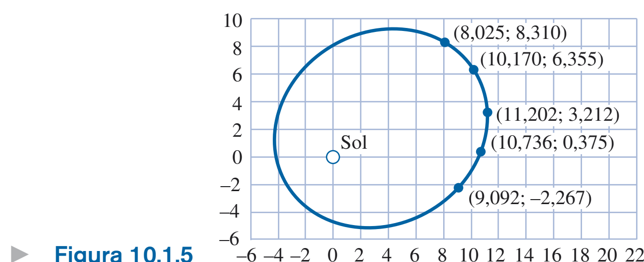
Solução Substituindo as coordenadas dos cinco pontos dados em (10) e arredondando até a terceira casa decimal, obtemos

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 64{,}401 & 66{,}688 & 69{,}056 & 8{,}025 & 8{,}310 & 1 \\ 103{,}429 & 64{,}630 & 40{,}386 & 10{,}170 & 6{,}355 & 1 \\ 125{,}485 & 35{,}981 & 10{,}317 & 11{,}202 & 3{,}212 & 1 \\ 115{,}262 & 4{,}026 & 0{,}141 & 10{,}736 & 0{,}375 & 1 \\ 82{,}664 & -20{,}612 & 5{,}139 & 9{,}092 & -2{,}267 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A expansão desse determinante em cofatores ao longo da primeira linha fornece

$$386{,}802x^2 - 102{,}895xy + 446{,}029y^2 - 2.476{,}443x - 1.427{,}998y - 17.109{,}375 = 0$$

A Figura 10.1.5 é um diagrama exato da órbita, junto com os cinco pontos dados. ◀



▶ **Figura 10.1.5**

Um plano por três pontos

No Exercício 8, pedimos para o leitor mostrar o seguinte: o plano no espaço tridimensional de equação

$$c_1x + c_2y + c_3z + c_4 = 0$$

que passa por três pontos não colineares (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) e (x_3, y_3, z_3) é dado pela equação em forma de determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (11)$$

▶ EXEMPLO 4 A equação de um plano

A equação do plano que passa pelos três pontos não colineares (1, 1, 0), (2, 0, −1) e (2, 9, 2) é

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 9 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que se reduz a

$$2x - y + 3z - 1 = 0 \quad ◀$$

Uma esfera por quatro pontos

No Exercício 9, pedimos para o leitor mostrar o seguinte: a esfera no espaço tridimensional de equação

$$c_1(x_2 + y_2 + z_2) + c_2x + c_3y + c_4z + c_5 = 0$$

que passa por quatro pontos não coplanares (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) é dada pela equação em forma de determinante

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (12)$$

▶ **EXEMPLO 5 A equação de uma esfera**

A equação da esfera que passa pelos quatro pontos não coplanares (0, 3, 2), (1, −1, 1), (2, 1, 0) e (5, 1, 3) é

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 13 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 35 & 5 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Isso se reduz a

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 5 = 0$$

que, em forma padrão, é

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$$ ◀

Conjunto de exercícios 10.1

1. Em cada caso, encontre a equação da reta que passa pelos pontos.

(a) (1, −1), (2, 3)

(b) (0, 1), (1, −1)

2. Em cada caso, encontre a equação do círculo que passa pelos pontos.

(a) (2, 6), (2, 0), (5, 3)

(b) (2, −2), (3, 5), (−4, 6)

3. Encontre a equação da cônica que passa pelos pontos (0, 0), (0, −1), (2, 0), (2, −5) e (4, −1).

4. Em cada caso, encontre a equação do plano do espaço tridimensional que passa pelos pontos.

(a) (1, 1, −3), (1, −1, 1), (0, −1, 2)

(b) (2, 3, 1), (2, −1, −1), (1, 2, 1)

5. (a) Altere a Equação (11) de tal modo que ela determine o plano que passa pela origem e seja paralelo ao plano que passa por três pontos não colineares especificados.

(b) Encontre os dois planos descritos na parte (a) correspondentes aos ternos de pontos dos Exercícios 4(a) e 4(b).

6. Em cada caso, encontre a equação da esfera do espaço tridimensional que passa pelos pontos.

(a) (1, 2, 3), (−1, 2, 1), (1, 0 1), (1, 2, −1)

(b) (0, 1, −2), (1, 3, 1), (2, −1, 0), (3, 1, −1)

7. Mostre que a Equação (10) é a equação da cônica que passa por cinco pontos distintos dados do plano.

8. Mostre que a Equação (11) é a equação do plano no espaço tridimensional que passa por três pontos não colineares dados.

9. Mostre que a Equação (12) é a equação da esfera no espaço tridimensional que passa por quatro pontos não coplanares dados.

10. Encontre uma equação em forma de determinante para a parábola da forma

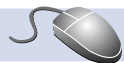
$$c_1y + c_2x^2 + c_3x + c_4 = 0$$

que passa por três pontos não colineares dados no plano.

11. No que se transforma a Equação (9) se os três pontos distintos forem colineares?

12. No que se transforma a Equação (11) se os três pontos distintos forem colineares?

13. No que se transforma a Equação (12) se os quatro pontos forem coplanares?



Seção 10.1 Exercícios com tecnologia

Os exercícios seguintes foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, esse recurso é MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser algum outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidades de Álgebra Linear. Em cada exercício, você deverá ler a documentação pertinente do recurso particular que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você estará capacitado a usar seu recurso computacional para resolver muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. A equação geral de uma superfície quádrica é dada por

$$a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+a_4xy+a_5xz$$
$$+a_6yz+a_7x+a_8y+a_9z+a_{10}=0$$

Dados nove pontos nessa superfície, pode ser possível determinar sua equação.

(a) Mostre que se os nove pontos (x_i, y_i), com $i = 1, 2, 3, \ldots, 9$, estiverem nessa superfície e se eles determinarem de modo único a equação dessa superfície, então sua equação pode ser escrita em forma de determinante como

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & xy & xz & yz & x & y & z & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1y_1 & x_1z_1 & y_1z_1 & x_1 & x_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2y_2 & x_2z_2 & y_2z_2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & x_3y_3 & x_3z_3 & y_3z_3 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & x_4y_4 & x_4z_4 & y_4z_4 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5^2 & z_5^2 & x_5y_5 & x_5z_5 & y_5z_5 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & x_6y_6 & x_6z_6 & y_6z_6 & x_6 & y_6 & z_6 & 1 \\ x_7^2 & y_7^2 & y_7^2 & x_7y_7 & x_7z_7 & y_7z_7 & x_7 & y_7 & z_7 & 1 \\ x_8^2 & y_8^2 & z_8^2 & x_8y_8 & x_8z_8 & y_8z_8 & x_8 & y_8 & z_8 & 1 \\ x_9^2 & x_9^2 & z_9^2 & x_9z_9 & x_9z_9 & y_9z_9 & x_9 & y_9 & z_9 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(b) Use o resultado da parte (a) para determinar a equação da superfície quádrica que passa pelos pontos (1, 2, 3), (2, 1, 7), (0, 4, 6), (3, −1, 4), (3, 0, 11), (−1, 5, 8), (9, −8, 3), (4, 5, 3) e (−2, 6, 10).

T2. (a) Um hiperplano no espaço euclidiano R^n de dimensão n tem uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1} = 0$$

onde a_i, com $i = 1, 2, 3, \ldots, n + 1$, são constantes não todas nulas e x_i, com $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, são variáveis tais que

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in R^n$$

Um ponto

$$(x_{10}, x_{20}, x_{30}, \ldots, x_{n0}) \in R^n$$

está nesse hiperplano se

$$a_1x_{10} + a_2x_{20} + a_3x_{30} + \cdots + a_nx_{n0} + a_{n+1} = 0$$

Sabendo que os n pontos $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \ldots, x_{ni})$, com $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, estão nesse hiperplano e que eles determinam de modo único a equação desse hiperplano, mostre que a equação do hiperplano pode ser escrita em forma de determinante como

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & 1 \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} & \cdots & x_{n1} & 1 \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & \cdots & x_{n2} & 1 \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & \cdots & x_{n3} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} & \cdots & x_{nn} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(b) Determine a equação do hiperplano em R^9 que passa pelos nove pontos

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1)
(3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2) (4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3)
(5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4) (6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5)
(7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6) (8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
(9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)

10.2 Programação linear geométrica

Nesta seção, descrevemos uma técnica geométrica para maximizar ou minimizar uma expressão linear em duas variáveis sujeita a um conjunto de restrições lineares.

PRÉ-REQUISITOS: Sistemas lineares
Desigualdades lineares

Programação linear

O estudo da teoria de programação linear foi muito ampliado desde o trabalho pioneiro de George Dantzig, no final da década de 1940. Hoje, a programação linear é aplicada a uma grande variedade de problemas na indústria e na ciência. Nesta seção, apresentamos uma abordagem geométrica para a solução de problemas simples de programação linear. Começamos com alguns exemplos.

▶ EXEMPLO 1 Maximizando a receita de vendas

Um fabricante de bombons tem bombons de chocolate em estoque, sendo 130 kg com recheio de cerejas e 170 kg com recheio de menta. Ele decide vender o estoque na forma de dois pacotes sortidos diferentes. Um pacote contém uma mistura com metade do peso em bombons de cereja e metade em menta e vende por $20,00 o quilo. O outro pacote contém uma mistura de um terço de bombons de cereja e dois terços de menta e vende por $12,50 o quilo. O vendedor deveria preparar quantos quilogramas de cada mistura a fim de maximizar sua receita?

Formulação matemática Digamos que A seja a mistura com metade cereja e metade menta e que x_1 seja o número de quilogramas dessa mistura que deverá ser preparada. Digamos que B seja a mistura com um terço cereja e dois terços menta e que x_2 seja o número de quilogramas dessa mistura que deverá ser preparada. Como o quilograma da mistura A vende por $20,00 e o da mistura B vende por $12,50, o total z de vendas (em dólares) será

$$z = 20{,}00\,x_1 + 12{,}50\,x_2$$

Como cada quilograma da mistura A contém meio quilograma de bombons de cereja e cada quilograma da mistura B contém um terço de quilograma de bombons de cereja, o número total de quilogramas de bombons de cereja usados em ambas misturas é

$$\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2$$

Analogamente, como cada quilograma da mistura A contém meio quilograma de menta e cada quilograma da mistura B contém dois terços de quilograma de menta, o número total de quilogramas de bombons de menta usados em ambas misturas é

$$\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{2}{3}x_2$$

Como o fabricante pode usar, no máximo, 130 quilogramas de bombons de cereja e 170 quilogramas de bombons de menta, devemos ter

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 &\le 130 \\ \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 &\le 170 \end{aligned}$$

Além disso, como x_1 e x_2 não podem ser números negativos, devemos ter

$$x_1 \ge 0 \quad \text{e} \quad x_2 \ge 0$$

Logo, o problema pode ser formulado matematicamente como segue: encontrar os valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = 20{,}00\,x_1 + 12{,}50\,x_2$$

sujeitos às restrições

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 &\le 130 \\ \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3}x_2 &\le 170 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Adiante, nesta seção, veremos como esse tipo de problema matemático pode ser resolvido geometricamente.

▶ EXEMPLO 2 Maximizando o rendimento anual

Uma mulher tem até $10.000 para investir, e seu corretor sugere investir em dois títulos, A e B. O título A é bastante arriscado, com rendimento anual de 10%, e o título B é relativamente seguro, com rendimento anual de 7%. Depois de algumas considerações, ela resolve investir no máximo $6.000 no título A, no mínimo $2.000 no título B e investir no

mínimo tanto no título A quanto no título B. Como ela deveria investir seus $10.000 a fim de maximizar o rendimento anual?

Formulação matemática Sejam x_1 a quantia investida no título A e x_2 a quantia investida no título B. Como cada dólar investido no título A rende $0,10 por ano e cada dólar investido no título B rende $0,07 por ano, o total do rendimento anual z (em dólares) de ambos títulos é dado por

$$z = 0{,}10\,x_1 + 0{,}07\,x_2$$

As restrições impostas podem ser formuladas matematicamente como segue:

Investir no máximo $10.000:	$x_1 + x_2 \leq 10.000$
Investir no máximo $6.000 no título A:	$x_1 \leq 6.000$
Investir no mínimo $2.000 no título B:	$x_2 \geq 2.000$
Investir no mínimo tanto no título A quanto no título B:	$x_1 \geq x_2$

Além disso, estamos supondo implicitamente que ambos x_1 e x_2 são números não negativos:

$$x_1 \geq 0 \quad \text{e} \quad x_2 \geq 0$$

Assim, a formulação matemática completa do problema é a seguinte: encontrar os valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = 0{,}10\,x_1 + 0{,}07\,x_2$$

sujeitos às restrições

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 10.000 \\ x_1 &\leq 6.000 \\ x_2 &\geq 2.000 \\ x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

► EXEMPLO 3 Minimizando o custo

Um estudante quer projetar um desjejum com flocos de milho e leite que seja o mais econômico possível. Levando em conta o que ele consegue comer nas suas outras refeições, ele decide que seu café da manhã deveria supri-lo com pelo menos 9 gramas de proteínas, pelo menos um terço da necessidade diária recomendada (VDR) de vitamina D e pelo menos um quarto da VDR de cálcio. Ele encontra as seguintes informações nutricionais nas embalagens do leite e dos flocos de milho:

	Leite ($\frac{1}{2}$ xícara)	Flocos de milho (1 xícara)
Custo	7,5 centavos	5,0 centavos
Proteína	4 gramas	2 gramas
Vitamina D	$\frac{1}{8}$ dos VDR	$\frac{1}{10}$ dos VDR
Cálcio	$\frac{1}{6}$ dos VDR	Nada

A fim de não ter uma mistura muito empapada ou muito seca, o estudante decide limitar-se a misturas que contenham não menos do que 1 e não mais do que 3 xícaras de flocos de milho por xícara de leite. Quais quantidades de leite e de flocos de milho ele deve utilizar para minimizar o custo do seu desjejum?

Formulação matemática Sejam x_1 a quantidade de leite utilizada (medida em metade de xícaras) e x_2 a quantidade de flocos de milho utilizada (medida em xícaras). Então, sendo z o custo do desjejum (em centavos), podemos escrever as restrições seguintes.

Custo do desjejum:	$z = 7{,}5x_1 + 5{,}0x_2$
Pelo menos 9 g de proteína:	$4x_1 + 2x_2 \geq 9$
Pelo menos $\frac{1}{3}$ VDR de vitamina D:	$\frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{10}x_2 \geq \frac{1}{3}$
Pelo menos $\frac{1}{4}$ VDR de cálcio:	$\frac{1}{6}x_1 \geq \frac{1}{4}$
Pelo menos 1 xícara de flocos de milho por xícara (duas $\frac{1}{2}$ xícaras) de leite:	$\frac{x_2}{x_1} \geq \frac{1}{2}$ (ou $x_1 - 2x_2 \leq 0$)
No máximo 3 xícaras de flocos de milho por xícara (duas $\frac{1}{2}$ xícaras) de leite:	$\frac{x_2}{x_1} \leq \frac{3}{2}$ (ou $3x_1 - 2x_2 \geq 0$)

Como antes, também estamos supondo implicitamente que $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$. Assim, a formulação matemática completa do problema é a seguinte: encontrar os valores de x_1 e x_2 que minimizam

$$z = 7{,}5x_1 + 5{,}0x_2$$

sujeitos às restrições

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &\geq 9 \\ \tfrac{1}{8}x_1 + \tfrac{1}{10}x_2 &\geq \tfrac{1}{3} \\ \tfrac{1}{6}x_1 &\geq \tfrac{1}{4} \\ x_1 - 2x_2 &\leq 0 \\ 3x_1 - 2x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$ ◀

Uma solução geométrica para problemas de programação linear

Cada um dos três problemas precedentes é um caso especial do problema a seguir.

Problema Encontrar os valores de x_1 e x_2 que ou maximizam ou minimizam

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{1}$$

sujeitos às restrições

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & (\leq)(\geq)(=) & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & (\leq)(\geq)(=) & b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 & (\leq)(\geq)(=) & b_m \end{matrix} \tag{2}$$

e

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \tag{3}$$

Pode ser usado qualquer um dos símbolos $\leq$, $\geq$ ou $=$ em cada uma das m condições de (2).

Esse problema é denominado ***problema geral de programação linear*** em duas variáveis. A função linear z em (1) é denominada ***função objetivo***. As equações (2) e (3) são as ***restrições*** ou ***vínculos***; em particular, as equações em (3) são as ***restrições de não negatividade*** das variáveis x_1 e x_2.

Vejamos agora como resolver graficamente um problema de programação linear em duas variáveis. Dizemos que um par de valores (x_1, x_2) que satisfaz todas as restrições é

uma ***solução viável***. O conjunto de todas as soluções viáveis determina um subconjunto do plano x_1x_2, que é a ***região viável***. Nosso objetivo é encontrar uma solução viável que maximize a função objetivo. Uma tal solução é denominada ***solução ótima***.

Para examinar a região viável de um problema de programação linear, observamos que cada restrição do tipo

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

define uma reta no plano x_1x_2, enquanto cada restrição da forma

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \quad \text{ou} \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

define um semiplano que inclui a reta de fronteira

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

Assim, a região viável é sempre uma interseção de um número finito de retas e semiplanos. Por exemplo, as quatro restrições

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 &\leq 130 \\ \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 &\leq 170 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

no Exemplo 1 definem os semiplanos indicados nas partes (a), (b), (c) e (d) da Figura 10.2.1.

Assim, a região viável desse problema é a interseção desses quatro semiplanos, que é a região indicada na Figura 10.2.1*e*.

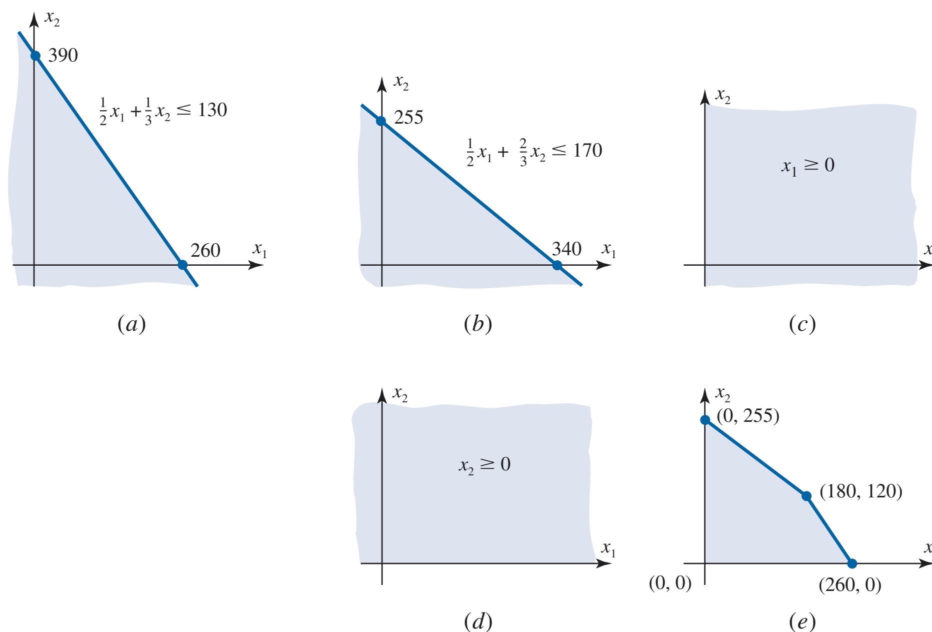


Figura 10.2.1

Pode ser mostrado que a região viável de um problema de programação linear tem uma fronteira que consiste num número finito de segmentos de retas. Uma região viável é dita ***limitada*** (Figura 10.2.1*e*) se puder ser englobada num círculo suficientemente grande; caso contrário, ela é ***ilimitada*** (Figura 10.2.5). Se a região viável for *vazia* (ou seja, não contiver pontos), então as restrições serão inconsistentes e o problema de programação linear não possuirá solução (ver Figura 10.2.6).

Os pontos de fronteira de uma região viável que são interseções de dois segmentos de retas de fronteira são denominados ***pontos extremos***. (Também podem ser chamados de pontos *de esquina* ou *de vértice*.) Por exemplo, na Figura 10.2.1*e*, vemos que a região viável do Exemplo 1 tem quatro pontos extremos,

$$(0, 0), \quad (0, 255), \quad (180, 120), \quad (260, 0) \tag{4}$$

A importância dos pontos extremos de uma região viável é mostrada pelo teorema seguinte.

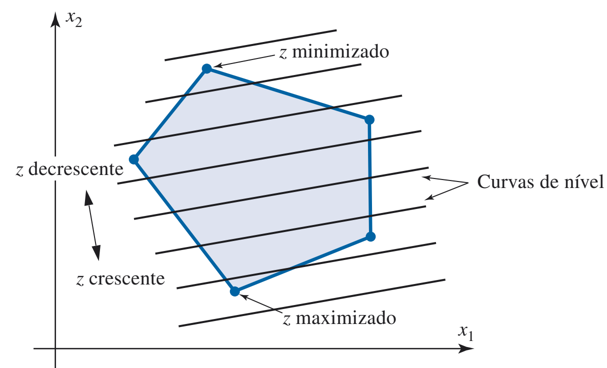
TEOREMA 10.2.1 Valores máximos e mínimos

Se a região viável de um problema de programação linear for não vazia e limitada, então a função objetivo atinge tanto um valor máximo quanto um valor mínimo e esses ocorrem em pontos extremos da região viável. Se a região viável for ilimitada, então a função objetivo pode ou não atingir valores máximo ou mínimo; contudo, se atingir um máximo ou um mínimo, este ocorrerá num ponto extremo.

A Figura 10.2.2 sugere a ideia subjacente à prova do teorema. Como a função objetivo

$$z = c_1x_1 + c_2x_2$$

de um problema de programação linear é uma função linear de x_1 e x_2, suas curvas de nível (as curvas ao longo das quais z tem valor constante) são retas. À medida que nos deslocamos perpendicularmente a essas retas, a função objetivo ou cresce ou decresce monotonamente. Dentro de uma região viável limitada, os valores máximos e mínimos de z devem ocorrer, portanto, nos pontos extremos, como indica a Figura 10.2.2.



▶ **Figura 10.2.2**

Nos exemplos seguintes, usamos o Teorema 10.2.1 para resolver vários problemas de programação linear e ilustrar as variações que podem ocorrer na natureza das soluções.

▶ EXEMPLO 4 De novo o Exemplo 1

A Figura 10.2.1*e* mostra que a região viável do Exemplo 1é limitada. Consequentemente, pelo Teorema 10.2.1, a função objetivo

$$z = 20{,}00\,x_1 + 12{,}50\,x_2$$

atinge tanto um valor mínimo quanto um valor máximo em pontos extremos. Os quatro pontos extremos e os correspondentes valores de z estão dados na tabela seguinte.

Ponto extremo (x_1, x_2)	Valor de $z = 20{,}00x_1 + 12{,}50x_2$
(0, 0)	0,00
(0, 255)	3.187,50
(180, 120)	5.100,00
(260, 0)	5.200,00

Vemos que o maior valor de z é 5.200,00 e a correspondente solução ótima é (260, 0). Assim, o fabricante de balas atinge um máximo de $5.200,00 de vendas quando produzir 260 quilogramas da mistura A e nada da mistura B.

▶ EXEMPLO 5 Usando o Teorema 10.2.1

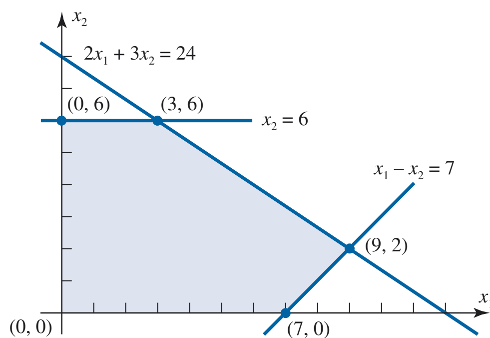
Encontre valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = x_1 + 3x_2$$

sujeitos às restrições

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1 - x_2 &\leq 7 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução Na Figura 10.2.3, esboçamos a região viável desse problema. Por ser limitada, o valor máximo de z é alcançado num dos cinco pontos extremos. Os valores da função objetivo nos cinco pontos extremos estão dados na tabela seguinte.



▲ **Figura 10.2.3**

Ponto extremo (x_1, x_2)	Valor de $z = x_1 + 3x_2$
(0, 6)	18
(3, 6)	21
(9, 2)	15
(7, 0)	7
(0, 0)	0

A partir dessa tabela, o valor máximo de z é 21, que é alcançado em $x_1 = 3$ e $x_2 = 6$.

▶ EXEMPLO 6 Usando o Teorema 10.2.1

Encontre valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = 4x_1 + 6x_2$$

sujeitos às restrições

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1 - x_2 &\leq 7 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução As restrições nesse problema são idênticas às restrições do Exemplo 5, portanto, a região viável deste problema também é dada pela Figura 10.2.3. Os valores da função objetivo nos pontos extremos estão dados na tabela seguinte.

Ponto extremo (x_1, x_2)	Valor de $z = 4x_1 + 6x_2$
(0, 6)	36
(3, 6)	48
(9, 2)	48
(7, 0)	28
(0, 0)	0

Vemos que a função objetivo atinge um valor máximo de 48 em dois pontos extremos adjacentes (3, 6) e (9, 2). Isso mostra que uma solução ótima num problema de programação linear não precisa ser única. Como pedimos ao leitor mostrar no Exercício 10, se a função objetivo atinge o mesmo valor em dois pontos extremos adjacentes, ela tem o mesmo valor em todos os pontos do segmento de reta da fronteira que liga esses dois pontos extremos. Assim, nesse exemplo, o valor máximo de z é alcançado em todos os pontos do segmento de reta que liga os pontos extremos (3, 6) e (9, 2).

▶ EXEMPLO 7 A região viável é um segmento de reta

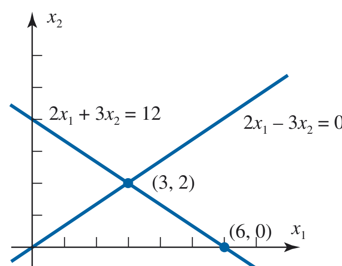
Encontre os valores de x_1 e x_2 que minimizam

$$z = 2x_1 - x_2$$

sujeitos a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 12 \\ 2x_1 - 3x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução A região viável desse problema aparece na Figura 10.2.4. Como uma das restrições é uma restrição de igualdade, a região viável é um segmento de reta com dois pontos extremos. Os valores de z nos dois pontos extremos estão dados na tabela seguinte.



▲ **Figura 10.2.4**

Ponto extremo (x_1, x_2)	Valor de $z = 2x_1 - x_2$
(3, 2)	4
(6, 0)	12

Assim, o valor máximo de z é 4, que é atingido em $x_1 = 3$ e $x_2 = 2$.

▶ **EXEMPLO 8 Usando o Teorema 10.2.1**

Encontre os valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = 2x_1 + 5x_2$$

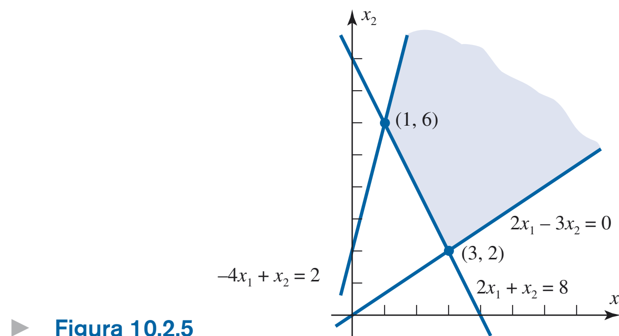
sujeitos a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 8 \\ -4x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução A região viável desse problema de programação linear é indicada na Figura 10.2.5. Por ser ilimitada, o Teorema 10.2.1 não nos garante que a função objetivo atinge algum valor máximo. De fato, é fácil verificar que, como a região viável contém pontos nos quais ambos x_1 e x_2 são arbitrariamente grandes e positivos, a função objetivo

$$z = 2x_1 + 5x_2$$

alcança valores arbitrariamente grandes e positivos. Esse problema não tem solução ótima. Em vez disso, dizemos que o problema tem uma ***solução ilimitada***.



▶ **Figura 10.2.5**

▶ **EXEMPLO 9 Usando o Teorema 10.2.1**

Encontre os valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = -5x_1 + x_2$$

sujeitos a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 8 \\ -4x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução As restrições dadas são as mesmas que as do Exemplo 8, portanto, a região viável desse problema também é dada pela Figura 10.2.5. No Exercício 11, pedimos para o leitor mostrar que a função objetivo desse problema atinge um valor máximo na região

viável. Pelo Teorema 10.2.1, esse máximo deve ser atingido num ponto extremo. Os valores de z nos dois pontos extremos da região viável estão dados na tabela seguinte.

Ponto extremo (x_1, x_2)	Valor de $z = -5x_1 + x_2$
(1, 6)	1
(3, 2)	−13

Assim, o valor máximo de z é 1, que é atingido no ponto extremo $x_1 = 1$, $x_2 = 6$.

▶ EXEMPLO 10 Restrições inconsistentes

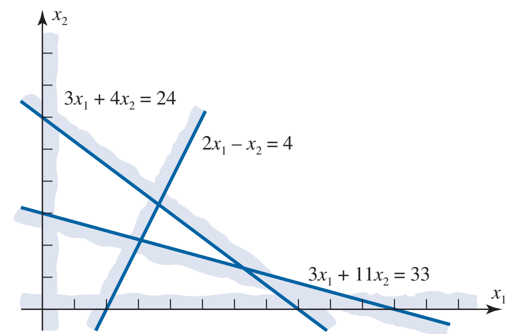
Encontre os valores de x_1 e x_2 que minimizam

$$z = 3x_1 - 8x_2$$

sujeitos a

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leq 4 \\ 3x_1 + 11x_2 &\leq 33 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 24 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução Como pode ser visto na Figura 10.2.6, a interseção dos cinco semiplanos definidos pelas cinco restrições é vazio. Esse problema de programação linear não possui soluções viáveis, pois as restrições são inconsistentes. ◀



▶ **Figura 10.2.6** Não há pontos comuns a todos os cinco semiplanos destacados.

Conjunto de exercícios 10.2

1. Encontre os valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

sujeitos a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\leq 2 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Encontre os valores de x_1 e x_2 que minimizam

$$z = 3x_1 - 5x_2$$

sujeitos a

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leq -2 \\ 4x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

3. Encontre os valores de x_1 e x_2 que minimizam

$$z = -3x_1 + 2x_2$$

sujeitos a

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &\geq -5 \\ -x_1 + x_2 &\geq 1 \\ 2x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

4. Resolva o problema de programação linear proposto no Exemplo 2.

5. Resolva o problema de programação linear proposto no Exemplo 3.

6. Dizemos que a restrição $x_1 - x_2 \leq 7$ do Exemplo 5 *não compromete*, porque pode ser removida do problema sem afetar sua solução. Da mesma forma, a restrição $x_2 \leq 6$ *compromete*, porque sua remoção altera a solução.

(a) Quais das demais restrições não comprometem e quais comprometem?

(b) Com quais valores do lado direito da restrição $x_1 - x_2 \leq 7$ essa restrição passa a comprometer? Para quais valores o conjunto viável resultante será vazio?

(c) Com quais valores do lado direito da restrição $x_2 \leq 6$ essa restrição passa a não comprometer? Para quais valores o conjunto viável resultante será vazio?

7. Uma empresa de transporte de carga transporta os contêineres de duas companhias, *A* e *B*. Cada contêiner da companhia *A* pesa 40 quilogramas e tem um volume de 54 decímetros cúbicos. Cada contêiner da companhia *B* pesa 50 quilogramas e tem um volume de 81 decímetros cúbicos. A cada contêiner transportado, a empresa de transporte de carga cobra $2,20 de frete da companhia *A* e $3,00 de frete da companhia *B*. Sabendo que um caminhão da empresa não pode carregar mais do que 37.000 quilogramas e não comporta mais do que 54.000 decímetros cúbicos, quantos contêineres das companhias *A* e *B* o caminhão deveria transportar para maximizar o valor do frete?

8. Repita o Exercício 7 se a empresa de transporte de carga aumentar o preço do frete de um contêiner da companhia *A* para $2,50.

9. Um fabricante produz sacos de ração para galinhas a partir de dois ingredientes, *A* e *B*. Cada saco deve conter pelo menos 625 g do nutriente N_1, pelo menos 500 g do nutriente N_2 e pelo menos 750 g do nutriente N_3. Cada quilograma do ingrediente *A* contém 125 g do nutriente N_1, 125 g do nutriente N_2 e 375 g do nutriente N_3. Cada quilograma do ingrediente *B* contém 312,5 g do nutriente N_1, 187,5 g do nutriente N_2 e 250 g do nutriente N_3. Se o ingrediente *A* custar 8 centavos o quilograma e o ingrediente *B* custar 9 centavos o quilograma, quanto de cada ingrediente o fabricante deveria usar em cada saco de ração para minimizar seus custos?

10. Se a função objetivo de um problema de programação linear tem o mesmo valor em dois pontos extremos adjacentes, mostre que também tem o mesmo valor em todos os pontos do segmento de reta que liga os dois pontos extremos. [*Sugestão*: se (x_1', x_2') e (x_1'', x_2'') são dois pontos quaisquer do plano, um ponto (x_1, x_2) está no segmento de reta que os liga se

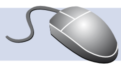
$$x_1 = tx_1' + (1 - t)x_1''$$

e

$$x_2 = tx_2' + (1 - t)x_2''$$

onde t é um número no intervalo [0, 1].]

11. Mostre que a função objetivo do Exemplo 9 atinge um valor máximo na região viável. [*Sugestão*: examine as curvas de nível da função objetivo.]



Seção 10.2 Exercícios com tecnologia

Os exercícios seguintes foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, esse recurso é MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser algum outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidades de Álgebra Linear. Em cada exercício, você deverá ler a documentação pertinente do recurso particular que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você estará capacitado a usar seu recurso computacional para resolver muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Considere a região viável que consiste em $0 \leq x$, $0 \leq y$ junto com o conjunto de desigualdades

$$x \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right) + y \operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right) \leq \cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)$$

com $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Maximize a função objetivo

$$z = 3x + 4y$$

supondo que (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$, (d) $n = 4$, (e) $n = 5$, (f) $n = 6$, (g) $n = 7$, (h) $n = 8$, (i) $n = 9$, (j) $n = 10$ e (k) $n = 11$.

(l) Em seguida, maximize essa função objetivo usando a região viável não linear dada por $0 \leq x$, $0 \leq y$ e

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

(m) Considere os resultados das partes (a) até (k) como o começo de uma sequência de valores de z_{max}. Esses valores tendem ao valor determinado na parte (l)? Explique.

T2. Repita o Exercício T1 usando a função objetivo $z = x + y$.

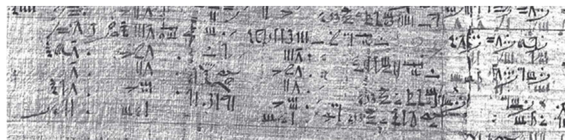
10.3 As mais antigas aplicações da Álgebra Linear

Os sistemas lineares podem ser encontrados nos escritos mais antigos de muitas civilizações da Antiguidade. Nesta seção, damos alguns exemplos dos tipos de problemas que esses povos costumavam resolver.

PRÉ-REQUISITO: Sistemas lineares

Os problemas práticos das civilizações antigas incluíam a medição de terras, a distribuição de bens, o acompanhamento de recursos como o trigo e o gado, o cálculo de impostos e a divisão de heranças. Em muitos casos, esses problemas levavam a sistemas de equações lineares, já que a linearidade é a relação mais simples que pode existir entre variáveis. Nesta seção, apresentamos exemplos de cinco culturas antigas distintas que ilustram como os sistemas lineares eram usados e resolvidos. Restringimo-nos a exemplos anteriores ao ano 500 de nossa era. Consequentemente, nossos exemplos precedem o desenvolvimento da Álgebra pelos matemáticos islâmicos, o que acabou levando, no século XIX, ao ramo da Matemática que agora chamamos de Álgebra Linear.

▶ EXEMPLO 1 Egito (cerca de 1650 a.C.)



Problema 40 do Papiro de Ahmes

O Papiro de Ahmes (ou Rhind) é a fonte da maioria de nossas informações sobre os matemáticos egípcios da Antiguidade. Esse papiro, que se calcula ser de aproximadamente 1650 a.C., tem cinco metros de comprimento e contém 84 problemas matemáticos curtos, assim como suas soluções. O Problema 40 desse papiro é o seguinte.

Divida 100 sacos de cevada entre cinco homens em progressão aritmética de tal modo que a soma dos dois menores é um sétimo da soma dos três maiores.

Sejam a a menor quantidade obtida por algum dos homens e d a diferença comum entre os termos da progressão aritmética. Então os outros quatro homens recebem $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$ e $a + 4d$ sacos. As duas condições do problema exigem que

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d) = 100$$
$$\tfrac{1}{7}[(a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d)] = a + (a + d)$$

Essas equações se reduzem ao sistema linear de duas equações em duas incógnitas seguinte.

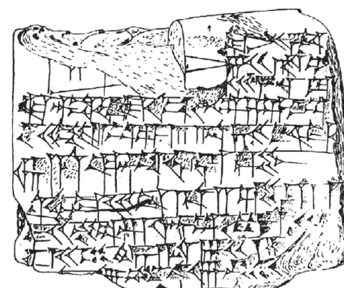
$$\begin{aligned} 5a + 10d &= 100 \\ 11a - 2d &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

A técnica de resolução descrita no papiro é conhecida como o método da posição falsa ou hipótese falsa. Começa tomando algum valor conveniente de a (no nosso caso, $a = 1$) e substitui esse valor na segunda equação, obtendo $d = 11/2$. Substituindo $a = 1$ e $d = 11/2$

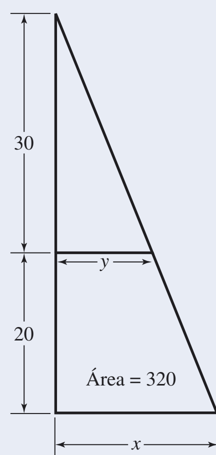
no lado esquerdo da primeira equação, obtemos 60, ao passo que o lado direito dá 100. Ajustando o valor inicial de a pela multiplicação por 100/60, chegamos ao valor correto de $a = 5/3$. Substituindo isso na segunda equação, obtemos $d = 55/6$, portanto, as quantidades de cevada recebidas pelos cinco homens são 10/6, 65/6, 120/6, 175/6 e 230/6 sacos. Essa técnica de adivinhar o valor de uma incógnita e depois ajustá-la tem sido usada em muitas culturas ao longo dos tempos.

▶ EXEMPLO 2 Babilônia (1900-1600 a.C.)

O antigo império da Babilônia floresceu na Mesopotâmia entre 1900 e 1600 a.C. Daquele período, sobreviveram muitos tabletes de barro contendo tabelas e problemas matemáticos, um dos quais (denominado Ca MLA 1950) contém o seguinte problema. O enunciado do problema está um pouco confuso em virtude das condições do tablete, mas o diagrama e a solução no tablete indicam que o problema é como segue.



Tablete de barro babilônico Ca MLA 1950



Um trapézio com uma área de 320 unidades quadradas é cortado de um triângulo retângulo por uma reta paralela a um de seus lados. O outro lado mede 50 unidades de comprimento e a altura do trapézio é de 20 unidades. Quais são as larguras superior e inferior do trapézio?

Sejam x a largura inferior e y a largura superior do trapézio. A área do trapézio é sua altura vezes sua largura média, ou seja, $20\left(\frac{x+y}{2}\right) = 320$. Usando semelhança de triângulos, também obtemos $\frac{x}{50} = \frac{y}{30}$. A solução no tablete usa essas relações para gerar o sistema linear

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(x + y) &= 16 \\ \tfrac{1}{2}(x - y) &= \ \ 4 \end{aligned} \qquad (2)$$

Somando e subtraindo essas duas equações, obtemos a solução $x = 20$ e $y = 12$.

▶ EXEMPLO 3 China (263 d.C.)

O tratado mais importante da história da matemática chinesa é o Chiu Chang Suan Shu, ou "Os Nove Capítulos da Arte Matemática". Esse tratado, uma coleção de 246 problemas e suas soluções, foi organizado e colocado em sua forma final por Liu Hui em 263 d.C. Seu conteúdo, entretanto, remonta a pelo menos o início da dinastia Han, no segundo século a.C. O oitavo de seus nove capítulos, intitulado "A Maneira de Calcular Usando Flechas", contém 178 problemas de palavras que levam a sistemas lineares de três a seis incógnitas. O procedimento para a solução geral é quase idêntico à técnica da eliminação

九章算術

Chiu Chang Suan Shu em caracteres chineses

gaussiana, desenvolvida na Europa, no século XIX, por Carl Friedrich Gauss (ver página 15). O primeiro problema do oitavo capítulo é o seguinte.

Há três classes de milho, sendo que três sacos da primeira classe, dois da segunda classe e um da terceira totalizam 39 medidas. Dois da primeira, três da segunda e um da terceira totalizam 34 medidas. E um da primeira, dois da segunda e três da terceira totalizam 26 medidas. Quantas medidas do grão tem cada saco de cada classe?

Sejam x, y e z as medidas das primeira, segunda e terceira classes de milho. Então as condições do problema levam ao sistema linear de três equações em três incógnitas seguinte.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned} \tag{3}$$

A solução descrita no tratado representava os coeficientes de cada equação por um número apropriado de varas colocadas dentro de quadrados numa tabela de contas. Os coeficientes positivos eram representados por varas pretas, os coeficientes negativos eram representados por varas vermelhas e os quadrados correspondentes a coeficientes nulos eram deixados vazios. A tabela de contas ficava disposta de tal modo que os coeficientes de cada equação apareciam em colunas, com a primeira equação na coluna mais à direita.

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Em seguida, o número de varas dentro dos quadrados eram ajustados com o objetivo de executar os dois passos seguintes: (1) duas vezes os números da terceira coluna eram subtraídos de três vezes os números da segunda coluna, e (2) os números da terceira coluna eram subtraídos de três vezes os números da primeira coluna. O resultado era a tabela seguinte:

		3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

Nesta tabela, quatro vezes os números da segunda coluna eram subtraídos de cinco vezes os números da primeira coluna, fornecendo

		3
	5	2
36	1	1
99	24	39

Essa última tabela é equivalente ao sistema linear

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + z &= 39 \\
5y + z &= 24 \\
36z &= 99
\end{aligned}
$$

Esse sistema triangular era resolvido por um método equivalente à retrossubstituição para obter $x = 37/4$, $y = 17/4$ e $z = 11/4$.

▶ EXEMPLO 4 Grécia (terceiro século a.C.)

Talvez o mais famoso sistema de equações lineares da Antiguidade seja o associado à primeira parte do celebrado Problema da Manada, devido a Arquimedes. Alega-se que esse problema foi proposto por Arquimedes como um desafio ao seu colega Erastóstenes. Nenhuma solução conseguiu atravessar o tempo até a nossa época, de modo que não se sabe como, nem mesmo se, algum desses dois geômetras o resolveu.



Arquimedes, aproximadamente 287-212 a.C.

Se fores diligente e sábio, ó estranho, calcula o número de bovinos do deus Sol que há muito tempo pastavam nos campos da ilha triangular da Sicília, divididos em quatro manadas de cores diferentes: uma branca como o leite, outra preta brilhante, uma terceira amarela e a quarta malhada. Em cada manada, havia touros em grande número, de acordo com estas proporções. Entenda, ó estranho, que o número de touros brancos era igual à metade e um terço do número de pretos, somados a todos os amarelos, enquanto o número de pretos era igual a um quarto e um quinto dos malhados, juntamente com todos os amarelos. Saiba ainda que o número dos demais touros, os malhados, era igual a um sexto e um sétimo dos brancos, somados a todos os amarelos. As proporções das vacas eram as seguintes: o número de vacas brancas era precisamente igual a um terço e um quarto de todas as pretas, enquanto o número de pretas era igual a um quarto e um quinto das malhadas quando todos, inclusive os touros, iam pastar juntos. Agora, o número de malhadas, dividido em quatro partes, era igual a um quinto e um sexto do número de vacas amarelas. Finalmente, o número de amarelas era igual a um sexto e um sétimo do número de brancas. Se não conseguires dizer com precisão, ó estranho, o número de bovinos do deus Sol, dando separadamente o número dos bem alimentados touros e o de vacas de acordo com cada cor, não serás chamado de inapto ou de ignorante com números, mas também não serás ainda contado entre os sábios.

A notação convencional (em inglês) para as oito variáveis desse problema é

W = número de touros brancos
B = número de touros pretos
Y = número de touros amarelos
D = número de touros malhados
w = número de vacas brancas
b = número de vacas pretas
y = número de vacas amarelas
d = número de vacas malhadas

O problema pode, agora, ser enunciado como as sete equações homogêneas em oito incógnitas seguintes.

1. $W = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) B + Y$ (Os touros brancos se igualavam a uma metade e um terço dos [touros] pretos, junto com a totalidade dos [touros] amarelos.)

2. $B = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) D + Y$ (Os [touros] pretos se igualavam a uma quarta parte dos [touros] malhados e um quinto, novamente junto com a totalidade dos [touros] amarelos.)

3. $D = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) W + Y$ (Os demais touros, os malhados, se igualavam a uma sexta parte dos [touros] brancos e um sétimo, junto com a totalidade dos [touros] amarelos.)

4. $w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (B + b)$ (As vacas brancas eram precisamente iguais a uma terça parte e um quarto da totalidade das pretas.)

5. $b = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) (D + d)$ (As [vacas] pretas se igualavam a uma quarta parte novamente das malhadas e com elas, uma quinta parte quando todos, inclusive os touros, iam pastar.)

6. $d = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) (Y + y)$ (As [vacas] malhadas em quatro partes [ou seja, em sua totalidade] se igualavam em número a uma quinta parte e um sexto da manada amarela.)

7. $y = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) (W + w)$ (As [vacas] amarelas se igualavam em número a uma sexta parte e um sétimo da manada branca.)

Como pedimos para o leitor verificar nos exercícios, esse sistema tem uma infinidade de soluções da forma

$$\begin{aligned} W &= 10.366.482k \\ B &= 7.460.514k \\ Y &= 4.149.387k \\ D &= 7.358.060k \\ w &= 7.206.360k \\ b &= 4.893.246k \\ y &= 5.439.213k \\ d &= 3.515.820k \end{aligned} \tag{4}$$

em que k é um número real qualquer. Os valores $k = 1, 2, \ldots$ dão uma infinidade de soluções inteiras positivas do problema, sendo que $k = 1$ dá a menor solução.

▶ EXEMPLO 5 Índia (quarto século d.C.)



Fragmento III-5-3v do manuscrito Bakhshali

O Manuscrito Bakhshali é um trabalho antigo do século IV da Matemática hindu, embora parte desse material indubitavelmente já fosse conhecido muitos séculos antes. Consiste em cerca de 70 folhas de casca de árvore contendo problemas matemáticos e suas soluções. Muitos dos problemas são do tipo de equiparação que levam a sistemas de equações lineares. Um desses problemas, mostrado no fragmento ao lado, é o seguinte.

Um mercador possui sete cavalos da raça asava, um segundo possui nove cavalos da raça hoya e um terceiro tem dez camelos. Eles se equiparam nos valores de seus animais se cada um ceder dois animais, um para cada um dos outros. Encontre o preço de cada animal e o valor total dos animais de cada mercador.

Sejam x o preço de um cavalo asava, y o preço de um cavalo haya, z o preço de um camelo e K o valor total equiparado dos animais de cada mercador. Então as condições do problema levam ao sistema de equações seguinte.

$$\begin{aligned} 5x + y + z &= K \\ x + 7y + z &= K \\ x + y + 8z &= K \end{aligned} \tag{5}$$

O método de resolução descrito no manuscrito começa subtraindo a quantidade $(x + y + z)$ de ambos lados das três equações para obter $4x = 6y = 7z = K - (x + y + z)$. Isso mostra que, se os preços x, y e z forem inteiros, então a quantidade $K - (x + y + z)$ deve ser um inteiro que seja divisível por 4, 6 e 7. O manuscrito toma o produto desses números, ou seja, 168, para o valor de $K - (x + y + z)$, que fornece $x = 42$, $y = 28$ e $z = 24$ para os preços e $K = 262$ para o valor equiparado. (Ver Exercício 6 para mais soluções desse problema.) ◄

Conjunto de exercícios 10.3

1. Um precursor do Problema da Manada de Arquimedes é relatado nas linhas seguintes do Livro 12 da *Odisseia*, de Homero.

> Deverás ascender à ilha triangular,
> Onde muitos bois do Sol pastam,
> E ovelhas engordadas. De bois cinquenta cabeças
> Em cada manada pastam, e manadas há sete;
> E de suas ovelhas gordas o número é o mesmo.

A última linha significa que há o mesmo número de ovelhas em todos os rebanhos que o de bois em todas as manadas. Qual é o número total de bois e ovelhas que pertencem ao deus Sol? (Isso era um problema difícil nos tempos de Homero.)

2. Resolva os problemas seguintes do Manuscrito Bakhshali.

(a) B possui o dobro de A; C tem o triplo de A e B juntos; D tem quatro vezes mais do que A, B e C juntos. O total das posses deles é 300. Quais são as posses de A?

(b) B dá duas vezes mais do que A; C dá três vezes mais do que B; D dá quatro vezes mais do que C. O total de seus presentes é 132. Quanto é o presente de A?

3. Um problema num tablete babilônico requer que se encontre o comprimento e a largura de um retângulo sabendo que a soma do comprimento com a largura é de 10, enquanto o comprimento e um quarto da largura somam 7. A solução apresentada no tablete consiste nas quatro afirmações seguintes.

> Multiplique 7 por 4 para obter 28.
> Tire 10 de 28 para obter 18.
> Tome um terço de 18 para obter 6, o comprimento.
> Tire 6 de 10 para obter 4, a largura.

Explique como esses passos levam à resposta.

4. Os dois problemas seguintes são de "Os Nove Capítulos da Arte Matemática". Resolva-os usando a técnica das tabelas descrita no Exemplo 3.

(a) Cinco bois e duas ovelhas valem 10 unidades, e dois bois e cinco ovelhas valem 8 unidades. Qual é o valor de cada boi e cada ovelha?

(b) Há três classes de milho. Os grãos contidos em dois, três ou quatro sacos, respectivamente, dessas três classes de milho não são suficientes para totalizar uma medida inteira. No entanto, acrescentando a esses sacos um saco da segunda, terceira e primeira classe, respectivamente, então os grãos totalizariam uma medida inteira em cada caso. Quantas medidas do grão tem cada saco de cada classe?

5. O problema da parte (a) é conhecido como a "Flor de Thymaridas", que foi um pitagórico do quarto século a.C.

(a) Dados os n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, resolva em $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o sistema linear

$$\begin{aligned} x_1+x_2+\cdots+x_n &= a_1 \\ x_1+x_2 &= a_2 \\ x_1+x_3 &= a_3 \\ &\vdots \\ x_1+x_n &= a_n \end{aligned}$$

(b) Identifique um problema deste conjunto de exercícios que encaixa no padrão da parte (a) e resolva-o usando a solução geral.

6. Do Exemplo 5 do Manuscrito Bakhshali.

(a) Expresse as Equações (5) como um sistema linear homogêneo de três equações em quatro incógnitas (x, y, z e K) e mostre que o conjunto solução tem um parâmetro arbitrário.

(b) Encontre a menor solução tal que todas as quatro variáveis sejam inteiros positivos.

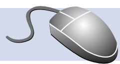
(c) Mostre que a solução dada no Exemplo 5 está entre as soluções encontradas.

7. Resolva os problemas propostos nos três epigramas seguintes, que aparecem numa coleção intitulada "A Antologia Grega", compilada em parte por um erudito chamado Metodorus em torno do ano 500 de nossa era. Acredita-se que alguns de seus 46 problemas matemáticos remontam ao sexto século a.C. [*Observação*: antes de resolver as partes (a) e (c), deve ser formulada uma pergunta a ser respondida.]

(a) Desejo que meus dois filhos recebam as mil moedas que eu possuo, mas quero que a quinta parte da cota de meu filho legítimo exceda em dez moedas a quarta parte do que cabe ao ilegítimo.

(b) Faça-me uma coroa que pese sessenta unidades (de peso) misturando ouro e bronze e juntando latão e ferro bem fundido. O ouro e o bronze juntos devem constituir dois terços; e o ouro e o latão juntos, três quartos; e o ouro e o ferro, três quintos. Diga-me quanto ouro deves colocar, quanto bronze, quanto latão e quanto ferro para fazer a coroa toda pesar sessenta unidades.

(c) Primeira pessoa: eu tenho o que a segunda tem e um terço do que a terceira tem. Segunda pessoa: eu tenho o que a terceira pessoa tem e um terço do que a primeira tem. Terceira pessoa: e eu tenho dez unidades e um terço do que a segunda tem.



Seção 10.3 Exercícios com tecnologia

Os exercícios seguintes foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, esse recurso é MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser algum outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidades de Álgebra Linear. Em cada exercício, você deverá ler a documentação pertinente do recurso particular que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você estará capacitado a usar seu recurso computacional para resolver muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. (a) Resolva o Problema da Manada de Arquimedes usando um programa de Álgebra simbólica.

(b) O Problema da Manada tem uma segunda parte em que são impostas duas condições adicionais. A primeira delas afirma que "Quando os touros brancos se misturam com os pretos, eles ficam parelhos, iguais em profundidade e largura". Isso exige que $W + B$ seja um número quadrado, isto é, 1, 4, 9, 16, 25 e assim por diante. Mostre que isso exige que os valores de k na Equação (4) sejam restringidos como segue.

$$k = 4.456.749r^2, \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

Também encontre o menor número total de touros que satisfaz essa segunda condição.

Observação A segunda condição imposta na segunda parte do Problema da Manada afirma que "Quando os touros amarelos e os malhados foram juntados numa só manada, eles ficaram de tal forma que seu número, começando em um, lentamente crescia até completar uma figura triangular." Isso exige que a quantidade $Y + D$ seja um número triangular, isto é, um número da forma 1, $1 + 2$, $1 + 2 + 3$, $1 + 2 + 3 + 4$, ... Essa parte final do problema não foi completamente resolvida até 1965, quando foram encontrados, com um computador, todos os 206.545 dígitos do menor número de touros que satisfaz essa condição.

T2. O problema seguinte é de "Os Nove Capítulos da Arte Matemática" e determina um sistema linear homogêneo de cinco equações em seis incógnitas. Mostre que esse sistema tem uma infinidade de soluções e encontre aquela que dá os menores inteiros positivos para a profundidade do poço e os comprimentos das cinco cordas.

Suponha que um poço seja compartilhado por cinco famílias. Suponha, também que

2 das cordas de A deixam de alcançar o fundo do poço por uma das cordas de B;

3 das cordas de B deixam de alcançar o fundo do poço por uma das cordas de C;

4 das cordas de C deixam de alcançar o fundo do poço por uma das cordas de D;

5 das cordas de D deixam de alcançar o fundo do poço por uma das cordas de E;

6 das cordas de E deixam de alcançar o fundo do poço por uma das cordas de A.

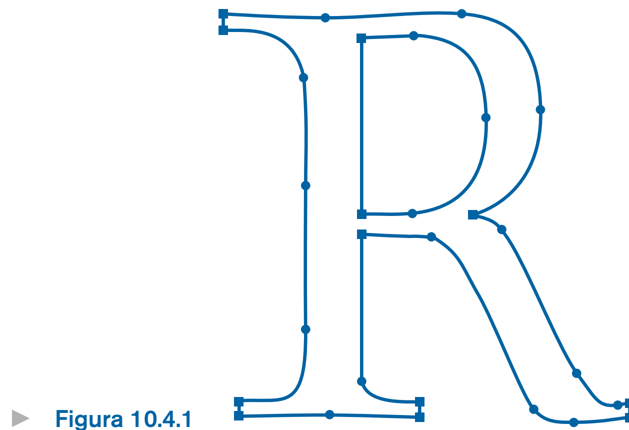
10.4 Interpolação spline cúbica

Nesta seção, utilizamos um utensílio de desenho artístico como um modelo físico para o problema matemático de encontrar uma curva que passa por pontos especificados do plano. Os parâmetros da curva são determinados pela resolução de um sistema linear de equações.

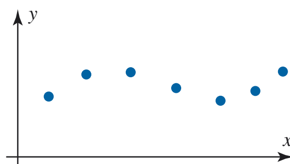
PRÉ-REQUISITOS: Sistemas lineares
Álgebra matricial
Cálculo diferencial

Ajuste de curvas

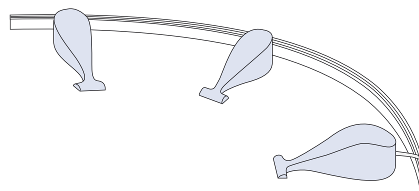
Um problema comum encontrado na análise de dados experimentais, na determinação das relações entre variáveis e na elaboração de projetos é o de ajustar uma curva por pontos especificados do plano. Uma aplicação muito generalizada é no projeto e na descrição de fontes de computador e de impressora, tais como as fontes PostScript™ e TrueType™ (Figura 10.4.1). Na Figura 10.4.2, estão exibidos sete pontos no plano *xy* e, na Figura 10.4.4, foi desenhada uma curva lisa que passa pelos pontos. Dizemos que uma curva que passa por um conjunto de pontos no plano ***interpola*** esses pontos; a curva é dita ***curva interpoladora*** desses pontos. A curva interpoladora da Figura 10.4.4 foi desenhada com a ajuda de um *spline de esboço* (Figura 10.4.3). Esse utensílio de desenho consiste numa tira fina e flexível, de madeira ou de outro material, que é torcida para passar pelos pontos a serem interpolados. Pesos deslizantes presos ao longo da tira a mantêm em posição enquanto o artista traça a curva interpoladora. O spline de esboço é o modelo físico para uma teoria matemática de interpolação que discutimos nesta seção.



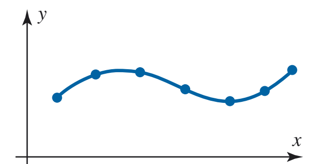
▶ Figura 10.4.1



▲ Figura 10.4.2



▲ Figura 10.4.3



▲ Figura 10.4.4

Enunciado do problema Suponha que sejam dados n pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

no plano xy, que desejamos interpolar com uma curva "bem comportada" (Figura 10.4.5). Por conveniência, tomamos os pontos igualmente espaçados na direção x, embora nossos resultados possam ser facilmente estendidos ao caso de pontos não igualmente espaçados. Denotando por h a distância comum entre as coordenadas x dos pontos, temos

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$$

Denotemos por $y = S(x)$, $x_1 \leq x \leq x_n$ a curva interpoladora procurada. Vamos supor que essa curva descreva o deslocamento de um spline de esboço que interpola os n pontos quando os pesos que mantêm o spline em posição forem colocados exatamente nos n pontos. É sabido da teoria linear de vigas que, para pequenos deslocamentos, a quarta derivada do deslocamento de uma viga é nula ao longo de qualquer intervalo no eixo x que não contenha forças externas atuando na viga. Se tratarmos nosso spline como uma viga fina e observarmos que as únicas forças externas atuantes provêm dos pesos nos n pontos especificados, então segue que

$$S^{(\text{iv})}(x) \equiv 0 \tag{1}$$

para todos os valores de x nos $n - 1$ intervalos abertos

$$(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$$

entre os n pontos.

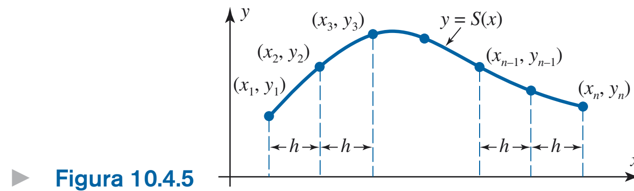


Figura 10.4.5

Também vamos precisar do resultado da teoria linear de vigas que afirma que, para uma viga que sofre somente a ação de forças externas, o deslocamento deve ter derivadas segundas contínuas. No caso da curva interpoladora $y = S(x)$ construída pelo spline de esboço, isso significa que $S(x)$, $S'(x)$ e $S''(x)$ devem ser contínuas com $x_1 \leq x \leq x_n$.

A condição de que $S''(x)$ seja contínua é o que faz com que um spline de esboço produza uma curva esteticamente satisfatória, pois ela tem *curvatura* contínua. O olho humano pode perceber mudanças súbitas de curvatura, isto é, descontinuidades de $S''(x)$, mas mudanças súbitas nas derivadas de ordem mais alta não são perceptíveis. Assim, a condição de continuidade de $S''(x)$ é o requisito mínimo para que uma curva interpoladora seja percebida como uma única curva lisa, em vez de uma sucessão de curvas distintas que foram emendadas.

Para determinar a forma matemática da função $S(x)$, observamos que, por ser $S^{(iv)}(x) \equiv 0$ nos intervalos entre os n pontos especificados, decorre, integrando essa equação quatro vezes, que $S(x)$ deve ser um *polinômio cúbico* em x em cada um desses intervalos. Em geral, no entanto, $S(x)$ será um polinômio cúbico diferente em cada intervalo, de modo que $S(x)$ deve ter a forma

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x_1 \leq x \leq x_2 \\ S_2(x), & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \quad \vdots & \\ S_{n-1}(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \tag{2}$$

onde $S_1(x), S_2(x), \ldots, S_{n-1}(x)$ são polinômios cúbicos. Por conveniência, escrevemos esses polinômios na forma

$$\begin{aligned} S_1(x) &= a_1(x-x_1)^3 + b_1(x-x_1)^2 + c_1(x-x_1) + d_1, & x_1 \le x \le x_2 \\ S_2(x) &= a_2(x-x_2)^3 + b_2(x-x_2)^2 + c_2(x-x_2) + d_2, & x_2 \le x \le x_3 \\ &\vdots \\ S_{n-1}(x) &= a_{n-1}(x-x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x-x_{n-1})^2 \\ &\quad + c_{n-1}(x-x_{n-1}) + d_{n-1}, & x_{n-1} \le x \le x_n \end{aligned} \tag{3}$$

Para especificar $S(x)$ completamente, devemos determinar as constantes a, b, c e d com subscritos, num total de $4n - 4$ coeficientes. Se escolhermos esses coeficientes de tal modo que $S(x)$ interpola os n pontos especificados no plano, e $S'(x)$ e $S''(x)$ são contínuas, dizemos que a curva interpoladora resultante é uma ***curva spline cúbica***.

Dedução da fórmula de uma spline cúbica

Das Equações (2) e (3), temos

$$\begin{aligned} S(x) = S_1(x) &= a_1(x-x_1)^3 + b_1(x-x_1)^2 + c_1(x-x_1) + d_1, & x_1 \le x \le x_2 \\ S(x) = S_2(x) &= a_2(x-x_2)^3 + b_2(x-x_2)^2 + c_2(x-x_2) + d_2, & x_2 \le x \le x_3 \\ \vdots \qquad \vdots \\ S(x) = S_{n-1}(x) &= a_{n-1}(x-x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x-x_{n-1})^2 \\ &\quad + c_{n-1}(x-x_{n-1}) + d_{n-1}, & x_{n-1} \le x \le x_n \end{aligned} \tag{4}$$

de modo que

$$\begin{aligned} S'(x) = S_1'(x) &= 3a_1(x-x_1)^2 + 2b_1(x-x_1) + c_1, & x_1 \le x \le x_2 \\ S'(x) = S_2'(x) &= 3a_2(x-x_2)^3 + 2b_2(x-x_2) + c_2, & x_2 \le x \le x_3 \\ \vdots \qquad \vdots \\ S'(x) = S_{n-1}'(x) &= 3a_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + 2b_{n-1}(x-x_{n-1}) + c_{n-1}, & x_{n-1} \le x \le x_n \end{aligned} \tag{5}$$

e

$$\begin{aligned} S''(x) = S_1''(x) &= 6a_1(x-x_1) + 2b_1, & x_1 \le x \le x_2 \\ S''(x) = S_2''(x) &= 6a_2(x-x_2) + 2b_2, & x_2 \le x \le x_3 \\ \vdots \qquad \vdots \\ S''(x) = S_{n-1}''(x) &= 6a_{n-1}(x-x_{n-1}) + 2b_{n-1}, & x_{n-1} \le x \le x_n \end{aligned} \tag{6}$$

Agora usamos essas equações e as quatro propriedades das splines cúbicas enunciadas adiante para expressar os coeficientes desconhecidos $a_i, b_i, c_i, d_i, i = 1, 2, \ldots, n-1$ em termos das coordenadas conhecidas $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

1. *$S(x)$ interpola os pontos (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Como $S(x)$ interpola os pontos (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, temos

$$S(x_1) = y_1, S(x_2) = y_2, \ldots, S(x_n) = y_n \tag{7}$$

Das $n - 1$ primeiras dessas equações e de (4), obtemos

$$\begin{aligned} d_1 &= y_1 \\ d_2 &= y_2 \\ &\vdots \\ d_{n-1} &= y_{n-1} \end{aligned} \tag{8}$$

Da última equação em (7), da última equação em (4) e lembrando que $x_n - x_{n-1} = h$, obtemos

$$a_{n-1}h^3 + b_{n-1}h^2 + c_{n-1}h + d_{n-1} = y_n \tag{9}$$

2. *$S(x)$ é contínua em* $[x_1, x_n]$.

Como $S(x)$ é contínua em $x_1 \leq x \leq x_n$, segue que, em cada ponto x_i do conjunto $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$, devemos ter

$$S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i), \quad i = 2, 3, \ldots, n-1 \tag{10}$$

Caso contrário, os gráficos de $S_{i-1}(x)$ e $S_i(x)$ não se ligariam formando uma curva contínua em x_i. Quando usamos a propriedade de interpolação $S_i(x_i) = y_i$, segue de (10) que $S_{i-1}(x_i) = y_i$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$ ou, por (4), que

$$\begin{aligned} a_1h^3 + b_1h^2 + c_1h + d_1 &= y_2 \\ a_2h^3 + b_2h^2 + c_2h + d_2 &= y_3 \\ &\vdots \\ a_{n-2}h^3 + b_{n-2}h^2 + c_{n-2}h + d_{n-2} &= y_{n-1} \end{aligned} \tag{11}$$

3. *$S'(x)$ é contínua em* $[x_1, x_n]$.

Como $S'(x)$ é contínua em $x_1 \leq x \leq x_n$, segue que

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i), \qquad i = 2, 3, \ldots, n-1$$

ou, por (5),

$$\begin{aligned} 3a_1h^2 + 2b_1h + c_1 &= c_2 \\ 3a_2h^2 + 2b_2h + c_2 &= c_3 \\ &\vdots \\ 3a_{n-2}h^2 + 2b_{n-2}h + c_{n-2} &= c_{n-1} \end{aligned} \tag{12}$$

4. *$S''(x)$ é contínua em* $[x_1, x_n]$.

Como $S''(x)$ é contínua em $x_1 \leq x \leq x_n$, segue que

$$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i), \qquad i = 2, 3, \ldots, n-1$$

ou, por (6),

$$\begin{aligned} 6a_1h + 2b_1 &= 2b_2 \\ 6a_2h + 2b_2 &= 2b_3 \\ &\vdots \\ 6a_{n-2}h + 2b_{n-2} &= 2b_{n-1} \end{aligned} \tag{13}$$

As Equações (8), (9), (11), (12) e (13) constituem um sistema de $4n - 6$ equações lineares nos $4n - 4$ coeficientes incógnitos a_i, b_i, c_i, d_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Consequentemente, precisamos de mais duas equações para determinar esses coeficientes de maneira única. Antes de obter essas equações adicionais, contudo, podemos simplificar nosso sistema atual expressando as incógnitas a_i, b_i, c_i e d_i em termos das novas quantidades incógnitas

$$M_1 = S''(x_1), \quad M_2 = S''(x_2), \ldots, \quad M_n = S''(x_n)$$

e as quantidades conhecidas

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

Por exemplo, de (6) segue que

$$\begin{aligned} M_1 &= 2b_1 \\ M_2 &= 2b_2 \\ &\vdots \\ M_{n-1} &= 2b_{n-1} \end{aligned}$$

de modo que

$$b_1 = \tfrac{1}{2}M_1, \quad b_2 = \tfrac{1}{2}M_2, \ldots, \quad b_{n-1} = \tfrac{1}{2}M_{n-1}$$

Além disso, já sabemos de (8) que

$$d_1 = y_1, \quad d_2 = y_2, \ldots, \quad d_{n-1} = y_{n-1}$$

Deixamos como um exercício deduzir as expressões para os coeficientes a e c em termos dos M e y. O resultado final é o seguinte.

TEOREMA 10.4.1 Interpolação spline cúbica

Dados n pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ *com* $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, *a curva spline cúbica*

$$S(x) = \begin{cases} a_1(x-x_1)^3 + b_1(x-x_1)^2 + c_1(x-x_1) + d_1, & x_1 \le x \le x_2 \\ a_2(x-x_2)^3 + b_2(x-x_2)^2 + c_2(x-x_2) + d_2, & x_2 \le x \le x_3 \\ \vdots & \\ a_{n-1}(x-x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x-x_{n-1})^2 & \\ \qquad + c_{n-1}(x-x_{n-1}) + d_{n-1}, & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

que interpola esses pontos tem os coeficientes dados por

$$\begin{aligned} a_i &= (M_{i+1} - M_i)/6h \\ b_i &= M_i/2 \\ c_i &= (y_{i+1} - y_i)/h - [(M_{i+1} + 2M_i)h/6] \\ d_i &= y_i \end{aligned} \tag{14}$$

com $i = 1, 2, \ldots, n-1$, *sendo* $M_i = S''(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

A partir desse resultado, vemos que as quantidades $M_1, M_2, \ldots, M_n$ determinam de modo único a curva spline cúbica. Para encontrar essas quantidades, substituímos em (12) as expressões para a_i, b_i e c_i dadas em (14). Depois de alguma simplificação algébrica, obtemos

$$\begin{aligned} M_1 + 4M_2 + M_3 &= 6(y_1 - 2y_2 + y_3)/h^2 \\ M_2 + 4M_3 + M_4 &= 6(y_2 - 2y_3 + y_4)/h^2 \\ &\vdots \\ M_{n-2} + 4M_{n-2} + M_n &= 6(y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n)/h^2 \end{aligned} \tag{15}$$

ou, em formato matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}$$

Isso é um sistema linear de $n - 2$ equações nas n incógnitas $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Assim, ainda precisamos de duas equações adicionais para determinar $M_1, M_2, \ldots, M_n$ univocamente.

A razão disso é que há uma infinidade de curvas spline cúbicas que interpolam os pontos dados, de modo que simplesmente não temos condições suficientes para determinar uma curva spline cúbica única passando pelos pontos. A seguir discutimos três possíveis maneiras de especificar as duas condições adicionais requeridas para obter uma curva spline cúbica única pelos pontos. (Os exercícios apresentam mais duas maneiras.) Na tabela a seguir, resumimos essa discussão.

Tabela 1

Spline natural	A derivada segunda da spline é zero nas extremidades.	$M_1 = 0$ $M_n = 0$	$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}$
Spline parabólica emendada	A spline se reduz a uma parábola no primeiro e no último intervalos.	$M_1 = M_2$ $M_n = M_{n-1}$	$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}$
Spline cúbica emendada	A spline é uma única curva cúbica nos dois primeiros e nos dois últimos intervalos.	$M_1 = 2M_2 - M_3$ $M_n = 2M_{n-1} - M_{n-2}$	$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}$

A spline natural As duas condições matematicamente mais simples que podemos impor são

$$M_1 = M_n = 0$$

Essas condições, junto com (15), resultam num sistema linear $n \times n$ para $M_1, M_2, \ldots, M_n$ que pode ser escrito em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-2} + y_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para cálculos numéricos, é mais conveniente eliminar M_1 e M_n desse sistema e escrever

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

junto com

$$M_1 = 0 \tag{17}$$

$$M_n = 0 \tag{18}$$

Assim, o sistema linear (16) de tamanho $(n-2) \times (n-2)$ pode ser resolvido nos $n-2$ coeficientes $M_2, M_3, \ldots, M_{n-1}$ e M_1 e M_n são determinados por (17) e (18).

Fisicamente, a spline natural resulta quando os extremos do spline de esboço se estendem livremente além dos pontos interpolados sem restrições. As porções livres nos extremos da spline, fora dos pontos interpolados, caem em caminhos retilíneos, fazendo com que $S''(x)$ se anule nas extremidades x_1 e x_2 e resultando na condição matemática $M_1 = M_n = 0$.

A spline natural tende a achatar a curva interpoladora nos extremos, o que pode ser indesejável. É claro que se for exigido que $S''(x)$ se anule nos extremos, então a spline natural precisa ser usada.

A spline parabólica emendada

As duas restrições adicionais impostas para esse tipo de spline são

$$M_1 = M_2 \tag{19}$$

$$M_n = M_{n-1} \tag{20}$$

Se usarmos essas duas equações para eliminar M_1 e M_2 em (15), obteremos o sistema linear de tamanho $(n-2) \times (n-2)$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix} \tag{21}$$

em $M_2, M_3, \ldots, M_{n-1}$. Uma vez determinados esses $n-2$ valores, podemos obter M_1 e M_2 de (19) e (20).

A partir de (14), vemos que $M_1 = M_2$ implica $a_1 = 0$ e $M_n = M_{n-1}$ implica $a_{n-1} = 0$. Assim, por (3), não há termos cúbicos na fórmula para a spline nos intervalos extremos $[x_1, x_2]$ e $[x_{n-1}, x_n]$. Portanto, como o nome sugere, a spline parabólica emendada se reduz a uma parábola nesses intervalos extremos.

A spline cúbica emendada

Para esse tipo de spline, impomos as duas condições adicionais

$$M_1 = 2M_2 - M_3 \tag{22}$$

$$M_n = 2M_{n-1} - M_{n-2} \tag{23}$$

Usando essas duas equações para eliminar M_1 e M_2 em (15), obtemos o sistema linear de tamanho $(n-2) \times (n-2)$ em $M_2, M_3, \ldots, M_{n-1}$ seguinte.

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix} \tag{24}$$

Uma vez resolvido esse sistema para $M_2, M_3, \ldots, M_{n-1}$, podemos usar (22) e (23) para determinar M_1 e M_n.

Reescrevendo (22) como

$$M_2 - M_1 = M_3 - M_2$$

segue de (14) que $a_1 = a_2$. Como $S'''(x) = 6a_1$ em $[x_1, x_2]$ e $S'''(x) = 6a_2$ em $[x_2, x_3]$, vemos que $S'''(x)$ é constante no intervalo $[x_1, x_3]$ inteiro. Consequentemente, $S(x)$ consiste numa *única* curva cúbica no intervalo $[x_1, x_3]$ em vez de duas curvas cúbicas diferentes juntadas em x_2. [Para ver isso, integre $S'''(x)$ três vezes.] Uma análise similar mostra que $S(x)$ consiste numa única curva cúbica nos dois últimos intervalos.

Enquanto a spline natural tende a produzir uma curva interpoladora que é achatada nos extremos, a spline cúbica emendada tem a tendência oposta: produz uma curva com acentuada curvatura nos extremos. Se nenhum desses comportamentos for desejado, a spline parabólica emendada é uma opção razoável.

► EXEMPLO 1 Usando uma spline parabólica emendada

É um fato bastante conhecido que a densidade da água atinge um máximo a uma temperatura ligeiramente acima do ponto de congelamento. A Tabela 2 (obtida do livro *Handbook of Chemistry and Physics*, editado em Cleveland, Ohio, EUA, pela Chemical Rubber Publishing Company) dá a densidade da água em gramas por centímetro cúbico para cinco temperaturas igualmente espaçadas no intervalo de −10°C a 30°C. Interpolemos essas cinco medidas de temperatura e densidade com uma spline parabólica emendada e tentemos descobrir a densidade máxima da água nesse intervalo encontrando o valor máximo nessa curva spline cúbica. Nos exercícios, pedimos para o leitor executar contas semelhantes usando uma spline natural e uma spline cúbica emendada para interpolar esses pontos.

Consideremos

$$\begin{aligned}
x_1 &= -10, & y_1 &= 0{,}99815\\
x_2 &= 0, & y_2 &= 0{,}99987\\
x_3 &= 10, & y_3 &= 0{,}99973\\
x_4 &= 20, & y_4 &= 0{,}99823\\
x_5 &= 30, & y_4 &= 0{,}99567
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
6[y_1 - 2y_2 + y_3]/h^2 &= -0{,}0001116\\
6[y_2 - 2y_3 + y_4]/h^2 &= -0{,}0000816\\
6[y_3 - 2y_4 + y_5]/h^2 &= -0{,}0000636
\end{aligned}$$

e o sistema linear (21) da spline parabólica emendada é

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_2\\ M_3\\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0001116\\ -0{,}0000816\\ -0{,}0000636 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos

$$\begin{aligned}
M_2 &= -0{,}00001973\\
M_3 &= -0{,}00001293\\
M_4 &= -0{,}00001013
\end{aligned}$$

Usando (19) e (20), resulta

$$\begin{aligned}
M_1 = M_2 &= -0{,}00001973\\
M_5 = M_4 &= -0{,}00001013
\end{aligned}$$

Tabela 2

Temperatura (°C)	Densidade (g/cm^3)
-10	0,99815
0	0,99987
10	0,99973
20	0,99823
30	0,99567

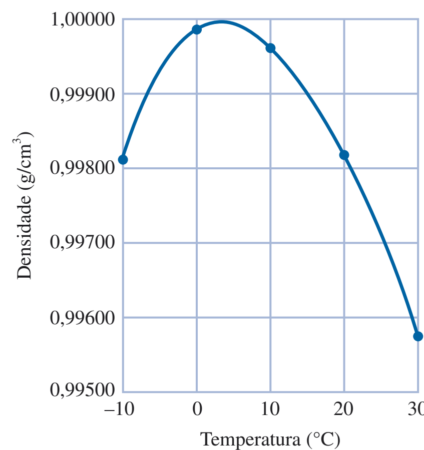
Resolvendo em termos dos coeficientes a, b, c e d em (14), obtemos a expressão seguinte para a spline parabólica emendada interpoladora:

$$S(x) = \begin{cases} -0{,}00000987(x+10)^2 + 0{,}0002707(x+10) + 0{,}99815, & -10 \le x \le 0 \\ 0{,}000000113(x-0)^3 - 0{,}00000987(x-0)^2 + 0{,}0000733(x-0) + 0{,}99987, & 0 \le x \le 10 \\ 0{,}000000047(x-10)^3 - 0{,}00000647(x-10)^2 - 0{,}0000900(x-10) + 0{,}99973, & 10 \le x \le 20 \\ -0{,}00000507(x-20)^2 - 0{,}0002053(x-20) + 0{,}99823, & 20 \le x \le 30 \end{cases}$$

Essa spline está esboçada na Figura 10.4.6. A partir dessa figura, vemos que o máximo é atingido no intervalo [0, 10]. Para encontrar esse máximo, colocamos $S'(x)$ igual a zero no intervalo [0, 10], como segue.

$$S'(x) = 0{,}000000339x^2 - 0{,}0000197x + 0{,}0000733 = 0$$

Com três dígitos significativos, a raiz dessa equação quadrática no intervalo [0, 10] é $x = 3{,}99$ e, com esse valor de x, temos $S(3{,}99) = 1{,}00001$. Assim, de acordo com nossa estimativa interpoladora, a densidade máxima da água é 1,00001 g/cm^3 atingida a 3,99°C. Isso confere com a densidade máxima experimental de 1,00000 g/cm^3 aos 3,98°C. (No sistema métrico original, o grama era *definido* como a massa de um centímetro cúbico de água à densidade máxima.) ◀



▶ **Figura 10.4.6**

Observações finais

Além de produzir excelentes curvas interpoladoras, as splines cúbicas e suas generalizações são úteis para derivação e integração numérica, para a solução numérica de equações diferenciais e integrais e na teoria de otimização.

Conjunto de exercícios 10.4

1. Deduza as expressões para os coeficientes a e c nas Equações (14) do Teorema 10.4.1.

2. Os seis pontos

$$(0{,}0;\ 0{,}00000),\ (0{,}2;\ 0{,}19867),\ (0{,}4;\ 0{,}38942),$$

$$(0{,}6;\ 0{,}56464),\ (0{,}8;\ 0{,}71736),\ (1{,}0;\ 0{,}84147)$$

estão no gráfico de $y = \text{sen}\,x$, sendo x em radianos.

(a) Encontre a curva spline parabólica emendada que interpola esses seis pontos com $0{,}4 \leq x \leq 0{,}6$. Mantenha uma precisão de cinco casas decimais em suas contas.

(b) Calcule $S(0{,}5)$ para a spline encontrada na parte (a). Qual é a porcentagem de erro de $S(0{,}5)$ em relação ao valor "exato" de $\text{sen}(0{,}5) = 0{,}47943$?

3. Os cinco pontos seguintes

$$(0,\ 1),\ (1,\ 7),\ (2,\ 27),\ (3,\ 79),\ (4,\ 181)$$

estão em uma única curva cúbica.

(a) Qual dos três tipos de cúbicas spline (natural, parabólica emendada ou cúbica emendada) coincide exatamente com a única curva cúbica na qual estão esses cinco pontos?

(b) Determine as equações da spline cúbica que você escolheu na parte (a) e mostre que ela é uma só curva cúbica que interpola os cinco pontos.

4. Repita as contas do Exemplo 1 usando uma spline natural para interpolar os cinco pontos de dados medidos.

5. Repita as contas do Exemplo 1 usando uma spline cúbica emendada para interpolar os cinco pontos de dados medidos.

6. Considere os cinco pontos $(0, 0)$, $(0{,}5;\ 1)$, $(1, 0)$, $(1{,}5;\ -1)$ e $(2, 0)$ no gráfico de $y = \text{sen}(\pi x)$.

(a) Use uma spline natural para interpolar os pontos $(0, 0)$, $(0{,}5;\ 1)$ e $(1, 0)$.

(b) Use uma spline natural para interpolar os pontos $(0{,}5;\ 1)$, $(1, 0)$ e $(1{,}5;\ -1)$.

(c) Explique a natureza pouco usual da resposta obtida na parte (b).

7. (***A spline periódica***) Se for conhecido ou desejado que os n pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ a serem interpolados estejam num só ciclo de uma curva periódica de período $x_n - x_1$, então uma curva spline interpoladora $S(x)$ deve satisfazer

$$\begin{aligned} S(x_1) &= S(x_n) \\ S'(x_1) &= S'(x_n) \\ S''(x_1) &= S''(x_n) \end{aligned}$$

(a) Mostre que essas três condições de periodicidade exigem que

$$\begin{aligned} y_1 &= y_n \\ M_1 &= M_n \\ 4M_1 + M_2 + M_{n-1} &= 6(y_{n-1} - 2y_1 + y_2)/h^2 \end{aligned}$$

(b) Usando as três equações da parte (a) e as Equações (15), construa um sistema linear $(n - 1) \times (n - 1)$ em $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ no formato matricial.

8. (***A spline apertada***) Suponha que, além dos n pontos para serem interpolados, sejam dados valores específicos y'_1 e y'_n para as inclinações $S'(x_1)$ e $S'(x_n)$ da spline cúbica interpoladora nas extremidades x_1 e x_n.

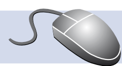
(a) Mostre que

$$2M_1 + M_2 = 6(y_2 - y_1 - hy'_1)/h^2$$

$$2M_n + M_{n-1} = 6(y_{n-1} - y_n + hy'_n)/h^2$$

(b) Usando as equações da parte (a) e as Equações (15), construa um sistema linear $n \times n$ em $M_1, M_2, \ldots, M_n$ no formato matricial.

Observação A spline apertada descrita nesse exercício é o tipo mais preciso de spline para trabalhos de interpolação se forem conhecidas ou puderem ser estimadas as inclinações nas duas extremidades.



Seção 10.4 Exercícios com tecnologia

Os exercícios seguintes foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, esse recurso é MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser algum outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidades de Álgebra Linear. Em cada exercício, você deverá ler a documentação pertinente do recurso particular que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você estará capacitado a usar seu recurso computacional para resolver muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Na resolução do problema da spline cúbica natural, é preciso resolver um sistema de equações cuja matriz de coeficientes é

$$A_n = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Se conseguirmos encontrar uma fórmula para a inversa dessa matriz, então a solução do problema da spline cúbica natural poderá ser encontrada facilmente. Neste exercício e no próximo,

vamos usar um computador para descobrir essa fórmula. Para conseguir isso, determinamos primeiro uma expressão para o determinante de A_n, que denotamos pelo símbolo D_n. Como

$$A_1 = [4] \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

vemos que

$$D_1 = \det(A_1) = \det[4] = 4$$

e

$$D_2 = \det(A_2) = \det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 15$$

(a) Use a expansão de determinantes em cofatores para mostrar que

$$D_n = 4D_{n-1} - D_{n-2}$$

com $n = 3, 4, 5, \ldots$. Isso significa, por exemplo, que

$$D_3 = 4D_2 - D_1 = 4(15) - 4 = 56$$

$$D_4 = 4D_3 - D_2 = 4(56) - 15 = 209$$

e assim por diante. Usando um computador, confira esse resultado com $5 \leq n \leq 10$.

(b) Escrevendo

$$D_n = 4D_{n-1} - D_{n-2}$$

e a identidade $D_{n-1} - D_{n-1}$ em formato matricial, ou seja,

$$\begin{bmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{n-1} \\ D_{n-2} \end{bmatrix}$$

mostre que

$$\begin{bmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} D_2 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(c) Use os métodos da Seção 5.2 e um computador para mostrar que

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} = \frac{\begin{bmatrix} (2+\sqrt{3})^{n-1} - (2-\sqrt{3})^{n-1} & (2-\sqrt{3})^{n-2} - (2+\sqrt{3})^{n-2} \\ (2+\sqrt{3})^{n-2} - (2-\sqrt{3})^{n-2} & (2-\sqrt{3})^{n-3} - (2+\sqrt{3})^{n-3} \end{bmatrix}}{2\sqrt{3}}$$

e, portanto,

$$D_n = \frac{(2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}}$$

com $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(d) Usando um computador, confira esse resultado com $1 \leq n \leq 10$.

T2. Neste exercício, determinamos uma fórmula para calcular A_n^{-1} a partir de D_k com $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$, supondo que D_0 seja definido como 1.

(a) Use um computador para calcular A_k^{-1} com $k = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5.

(b) Usando seu resultado na parte (a), descubra a conjectura que

$$A_n^{-1} = [\alpha_{ij}]$$

onde $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ e

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \left(\frac{D_{n-j} D_{i-1}}{D_n} \right)$$

com $i \leq j$.

(c) Use o resultado da parte (b) para calcular A_7^{-1} e compare com o resultado obtido usando o computador.

10.5 Cadeias de Markov

Nesta seção, descrevemos um modelo geral de um sistema que muda de estado para estado. Em seguida, aplicamos o modelo a vários problemas concretos.

PRÉ-REQUISITOS: Sistemas lineares
Matrizes
Compreensão intuitiva de limites

Um processo de Markov

Suponha que um sistema físico ou matemático esteja sofrendo mudanças tais que a cada momento ele possa ocupar algum entre um número finito de estados. Por exemplo, o tempo numa certa cidade poderia estar em um dentre três estados possíveis: ensolarado, nublado ou chuvoso; ou então, um indivíduo poderia estar num dentre quatro estados emocionais possíveis: feliz, triste, irritado ou apreensivo. Suponha que um tal sistema mude com o tempo de um estado para outro e que, em instantes predeterminados, observemos o estado do sistema. Se o estado do sistema em qualquer observação não puder ser predito com certeza, mas se a probabilidade de um certo estado ocorrer puder ser predita unicamente a partir do conhecimento do estado do sistema na observação imediatamente anterior, então o processo de mudança de um estado para outro é denominado uma ***cadeia de Markov*** ou um ***processo de Markov***.

DEFINIÇÃO 1 Se uma cadeia de Markov tiver k estados possíveis, que identificamos por $1, 2, \ldots, k$, então a probabilidade de o sistema estar no estado i em qualquer observação se na observação imediatamente precedente estava no estado j, é denotada por p_{ij} e é denominada ***probabilidade de transição*** do estado j ao estado i. A matriz $P = [p_{ij}]$ é denominada ***matriz de transição*** da cadeia de Markov.

Por exemplo, numa cadeia de Markov de três estados, a matriz de transição tem o formato

$$\begin{array}{c} \textbf{Estado precedente} \\ \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{array} \textbf{Novo estado} \end{array}$$

Nessa matriz, p_{32} é a probabilidade de que o sistema vá mudar do estado 2 para o estado 3, p_{11} é a probabilidade de que o sistema vá continuar no estado 1 imediatamente depois de ter sido observado no estado 1, e assim por diante.

► EXEMPLO 1 Matriz de transição da cadeia de Markov

Uma locadora de automóveis tem três lojas de atendimento, denotadas por 1, 2 e 3. Um cliente pode alugar um carro de qualquer uma das três lojas e devolver o carro para qualquer uma das três lojas. O gerente nota que os clientes costumam devolver os carros de acordo com as probabilidades seguintes.

$$\begin{array}{c} \textbf{Alugado da loja} \\ \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{array} \textbf{Devolvido à loja} \end{array}$$

Essa matriz é a matriz de transição do sistema se ele for considerado uma cadeia de Markov. A partir dessa matriz, a probabilidade de que um carro alugado na loja 3 vá ser devolvido na loja 2 é 0,6, a probabilidade de que um carro alugado na loja 1 vá ser devolvido na loja 1 é 0,8, e assim por diante.

► EXEMPLO 2 Matriz de transição da cadeia de Markov

Conferindo os registros de doações recebidas, a secretaria da associação de ex-alunos de uma universidade norte-americana observa que 80% de seus ex-alunos que contribuem ao fundo da associação num certo ano também contribuem no ano seguinte, e que 30% dos que não contribuem num certo ano contribuem no ano seguinte. Isso pode ser visto como uma cadeia de Markov de dois estados: o estado 1 corresponde a um ex-aluno que contribui em um ano qualquer e o estado 2 corresponde a um ex-aluno que não contribui naquele ano. A matriz de transição é

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

Nos exemplos acima, as matrizes de transição das cadeias de Markov têm a propriedade que as entradas em qualquer coluna somam 1. Isso não é acidental. Se $P = [p_{ij}]$ for a matriz de transição de uma cadeia de Markov qualquer de k estados, então, dado qualquer j, devemos ter

$$p_{1j} + p_{2j} + \cdots + p_{kj} = 1 \tag{1}$$

porque se o sistema estiver no estado j numa observação, é certo que estará num dos k estados possíveis na próxima observação.

Uma matriz com a propriedade (1) é denominada ***matriz estocástica***, ***matriz de probabilidade*** ou ***matriz de Markov***. Pelo discussão precedente, segue que a matriz de transição de uma cadeia de Markov deve ser uma matriz estocástica.

Em geral, não pode ser determinado com certeza o estado de um sistema em uma cadeia de Markov numa observação arbitrária. O melhor que podemos fazer é especificar probabilidades de cada um dos estados possíveis. Por exemplo, podemos descrever o estado possível do sistema numa certa observação em uma cadeia de Markov com três estados, por um vetor coluna

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

no qual x_1 é a probabilidade de que o sistema esteja no estado 1, x_2 é a probabilidade de que ele esteja no estado 2 e x_3 é a probabilidade de que ele esteja no estado 3. Em geral, temos a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 2 O ***vetor estado*** de uma observação de uma cadeia de Markov com k estados é um vetor coluna $\mathbf{x}$ cujo i-ésimo componente x_i é a probabilidade de o sistema estar, naquela observação, no i-ésimo estado.

Observe que as entradas em qualquer vetor estado de uma cadeia de Markov são não negativas e têm soma 1. (Por quê?) Um vetor coluna com essa propriedade é denominado ***vetor de probabilidade***.

Suponha, agora, que saibamos o vetor estado $\mathbf{x}^{(0)}$ de uma cadeia de Markov em alguma observação inicial. O teorema seguinte nos permitirá determinar os vetores estado

$$\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}, \ldots$$

nas observações subsequentes.

TEOREMA 10.5.1 *Se P for a matriz de transição de uma cadeia de Markov e $\mathbf{x}^{(n)}$ o vetor estado na enésima observação, então $\mathbf{x}^{(n+1)} = P\mathbf{x}^{(n)}$.*

A prova desse teorema envolve ideias da teoria de probabilidades e não será dada aqui. Desse teorema segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= P\mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(2)} &= P\mathbf{x}^{(1)} = P^2\mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(3)} &= P\mathbf{x}^{(2)} = P^3\mathbf{x}^{(0)} \\ &\vdots \\ \mathbf{x}^{(n)} &= P\mathbf{x}^{(n-1)} = P^n\mathbf{x}^{(0)} \end{aligned}$$

Dessa maneira, o vetor estado inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ e a matriz de transição P determinam $\mathbf{x}^{(n)}$ com $n = 1, 2, \ldots$.

▶ EXEMPLO 3 De novo o Exemplo 2

A matriz de transição no Exemplo 2 foi

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix}$$

Agora construímos um registro futuro provável de doações de um novo graduado que não tenha doado no primeiro ano após a formatura. Para tal graduado, o sistema está, inicialmente, com certeza no estado 2, de modo que o vetor estado inicial é

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pelo Teorema 10.5.1, temos, então,

$$\mathbf{x}^{(1)} = P\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = P\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}55 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = P\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}525 \\ 0{,}475 \end{bmatrix}$$

Assim, depois de três anos, pode-se esperar com probabilidade 0,525 que o ex-aluno irá fazer uma doação. Depois de três anos, obtemos os seguintes vetores estado (com até três casas decimais):

$$\mathbf{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0{,}563 \\ 0{,}438 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0{,}581 \\ 0{,}419 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(6)} = \begin{bmatrix} 0{,}591 \\ 0{,}409 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(7)} = \begin{bmatrix} 0{,}595 \\ 0{,}405 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(8)} = \begin{bmatrix} 0{,}598 \\ 0{,}402 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(9)} = \begin{bmatrix} 0{,}599 \\ 0{,}401 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(10)} = \begin{bmatrix} 0{,}599 \\ 0{,}401 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(11)} = \begin{bmatrix} 0{,}600 \\ 0{,}400 \end{bmatrix}$$

Com cada n depois de 11, temos

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0{,}600 \\ 0{,}400 \end{bmatrix}$$

até três casas decimais. Em outras palavras, os vetores estado convergem a um vetor fixo à medida que cresce o número de observações. (Voltamos a discutir isso mais adiante.)

▶ EXEMPLO 4 De novo o Exemplo 1

A matriz de transição no Exemplo 1 foi

$$\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Se um carro for inicialmente alugado da loja 2, então o vetor estado inicial será

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tabela 1

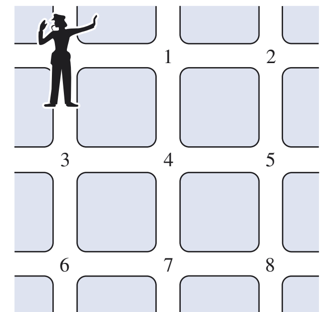
$\mathbf{x}^{(n)}$ \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x_1^{(n)}$	0	0,300	0,400	0,477	0,511	0,533	0,544	0,550	0,553	0,555	0,556	0,557
$x_2^{(n)}$	1	0,200	0,370	0,252	0,261	0,240	0,238	0,233	0,232	0,231	0,230	0,230
$x_3^{(n)}$	0	0,500	0,230	0,271	0,228	0,227	0,219	0,217	0,215	0,214	0,214	0,213

Usando esse vetor e o Teorema 10.5.1, obtemos os vetores estado posteriores listados na Tabela 1. Com qualquer valor de n maior do que 11, todos os vetores estado são iguais a $\mathbf{x}^{(11)}$ até a terceira casa decimal.

Nesse exemplo, deveriam ser observadas duas coisas. Em primeiro lugar, não foi necessário saber por quanto tempo o cliente permaneceu com o carro. Ou seja, num processo de Markov o tempo entre as observações não precisa ser regular. Em segundo lugar, os vetores estado convergem a um vetor fixo à medida que n cresce, exatamente como no exemplo anterior. ◀

▶ EXEMPLO 5 Usando o Teorema 10.5.1

Uma guarda de transito é designada para controlar o tráfego nos oito cruzamentos indicados na Figura 10.5.1. Ela é instruída a permanecer em cada cruzamento por uma hora e, em seguida, permanecer no mesmo cruzamento ou seguir para um cruzamento adjacente. Para evitar que ela estabeleça um padrão, ela deve escolher o novo cruzamento de maneira aleatória, com qualquer escolha igualmente provável. Por exemplo, se ela estiver no cruzamento 5, seu próximo cruzamento poderá ser 2, 4, 5 ou 8, cada um com probabilidade $\frac{1}{4}$. Todo dia, ela começa no cruzamento em que parou no dia anterior. A matriz de transição dessa cadeia de Markov é



▲ Figura 10.5.1

Cruzamento velho

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3}
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}
$$

Cruzamento novo

Se a guarda inicialmente começa no cruzamento 5, suas prováveis localizações, hora a hora, são dadas pelos vetores estado da Tabela 2. Com qualquer valor de n maior do que 22, todos os vetores estado são iguais a $\mathbf{x}^{(22)}$ até a terceira casa decimal. Assim, como nos dois primeiros exemplos, os vetores estado convergem a um vetor fixo à medida que n cresce. ◀

Tabela 2

$x^{(n)}$ \ n	0	1	2	3	4	5	10	15	20	22
$x_1^{(n)}$	0	0,000	0,133	0,116	0,130	0,123	0,113	0,109	0,108	0,107
$x_2^{(n)}$	0	0,250	0,146	0,163	0,140	0,138	0,115	0,109	0,108	0,107
$x_3^{(n)}$	0	0,000	0,050	0,039	0,067	0,073	0,100	1,106	0,107	0,107
$x_4^{(n)}$	0	0,250	0,113	0,187	0,162	0,178	0,178	0,179	0,179	0,179
$x_5^{(n)}$	0	0,250	0,279	0,190	0,190	0,168	0,149	0,144	0,143	0,143
$x_6^{(n)}$	1	0,000	0,000	0,050	0,056	0,047	0,099	0,105	0,107	0,107
$x_7^{(n)}$	0	0,000	0,133	0,104	0,131	0,125	0,138	0,142	0,143	0,143
$x_8^{(n)}$	0	0,250	0,146	0,152	0,124	0,121	0,108	0,107	0,107	0,107

Comportamento limite de vetores estado

Nos nossos exemplos, vimos que os vetores estado convergem a algum vetor fixo à medida que o número de observações cresce. Agora nos perguntamos se os vetores estado sempre convergem a um vetor fixo numa cadeia de Markov. Um exemplo simples mostra que isso não ocorre.

▶ EXEMPLO 6 O sistema oscila entre dois vetores estado

Sejam

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então, como $P^2 = I$ e $P^3 = P$, temos

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(4)} = \cdots = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(5)} = \cdots = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esse sistema oscila indefinidamente entre os dois vetores estado $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e, portanto, não converge a vetor fixado algum. ◀

No entanto, impondo uma restrição fraca à matriz de transição, podemos mostrar que o sistema de aproxima de um vetor estado fixo. Essa condição é descrita na próxima definição.

DEFINIÇÃO 3 Uma matriz de transição é ***regular*** se uma potência positiva da matriz tem todas as entradas positivas.

Assim, se P for uma matriz de transição regular, existe algum inteiro positivo m tal que todas as entradas de P^m são positivas. Isso ocorre com as matrizes de transição nos Exemplos 1 e 2 com $m = 1$. No Exemplo 5, é o caso em que P^4 tem todas as entradas positivas. Consequentemente, a matriz de transição é regular em todos esses exemplos.

Uma cadeia de Markov que é governada por uma matriz de transição regular é denominada ***cadeia de Markov regular***. Veremos que qualquer cadeia de Markov regular possui um vetor estado fixo $\mathbf{q}$ tal que, com qualquer escolha $\mathbf{x}^{(0)}$, o vetor $P^n\mathbf{x}^{(0)}$ converge a $\mathbf{q}$ quando n aumenta. Esse resultado é da maior importância na teoria de cadeias de Markov e tem por base o teorema seguinte.

TEOREMA 10.5.2 Comportamento de P^n quando $n \to \infty$

Se P for uma matriz de transição regular então, com $n \to \infty$,

$$P^n \to \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{bmatrix}$$

em que os q são números positivos tais que $q_1 + q_2 + \cdots + q_k = 1$.

Não provamos esse teorema aqui. O leitor interessado pode consultar um texto mais especializado, por exemplo, o de J. Kemeny e J. Snell, *Finite Markov Chains*, New York: Springer Verlag, 1976.

Definamos

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix}$$

Assim, Q é uma matriz de transição com todas colunas iguais ao vetor de probabilidade $\mathbf{q}$. A propriedade de Q é que a cada vetor de probabilidade $\mathbf{x}$, temos

$$Q\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1x_1 + q_1x_2 + \cdots + q_1x_k \\ q_2x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_2x_k \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ q_kx_1 + q_kx_2 + \cdots + q_kx_k \end{bmatrix}$$

$$= (x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix} = (1)\mathbf{q} = \mathbf{q}$$

Isso mostra que Q transforma qualquer vetor de probabilidade $\mathbf{x}$ no vetor de probabilidade $\mathbf{q}$ fixo. Esse resultado leva ao teorema seguinte.

TEOREMA 10.5.3 Comportamento de $P^n\mathbf{x}$ quando $n \to \infty$

Se P for uma matriz de transição regular e $\mathbf{x}$ um vetor de probabilidade qualquer então, com $n \to \infty$,

$$P^n\mathbf{x} \to \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix} = \mathbf{q}$$

em que $\mathbf{q}$ é um vetor de probabilidade fixo, independente de n, cujas entradas são todas positivas.

Esse resultado vale, pois o Teorema 10.5.2. implica que $P^n \to Q$ com $n \to \infty$, de modo que $P^n\mathbf{x} \to Q\mathbf{x} = \mathbf{q}$ com $n \to \infty$. Assim, para uma cadeia de Markov regular, o sistema sempre acaba convergindo para um vetor estado $\mathbf{q}$ fixo. O vetor $\mathbf{q}$ é denominado ***vetor de estado estacionário*** da cadeia de Markov regular.

Geralmente, a técnica mais eficiente de calcular o vetor de estado estacionário $\mathbf{q}$ de sistemas com muitos estados, é simplesmente calcular $P^n\mathbf{x}$ com algum n grande. Nossos exemplos ilustram esse procedimento. Cada um é um processo de Markov regular, de modo que é garantida a convergência a um vetor de estado estacionário. Uma outra maneira de calcular o vetor de estado estacionário é utilizar o teorema seguinte.

TEOREMA 10.5.4 Vetor de estado estacionário

O vetor de estado estacionário $\mathbf{q}$ de uma matriz de transição regular P é o único vetor de probabilidade que satisfaz a equação $P\mathbf{q} = \mathbf{q}$.

Para ver isso, considere a identidade matricial $PP^n = P^{n+1}$. Pelo Teorema 10.5.2, ambas iteradas P^n e P^{n+1} convergem a Q com $n \to \infty$. Assim, temos $PQ = Q$. Qualquer uma das colunas dessa equação matricial dá $P\mathbf{q} = \mathbf{q}$. Para mostrar que $\mathbf{q}$ é o único vetor de proba-

bilidade que satisfaz essa equação, suponha que **r** seja um outro vetor de probabilidade tal que $P\mathbf{r} = \mathbf{r}$. Então também $P^n\mathbf{r} = \mathbf{r}$ com $n = 1, 2, \ldots$. Pelo Teorema 10.5.3, quando $n \to \infty$, resulta $\mathbf{q} = \mathbf{r}$.

O Teorema 10.5.4 também pode ser expresso da maneira seguinte. O sistema linear homogêneo

$$(I - P)\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

tem um único vetor solução **q** com entradas não negativas que satisfazem a condição $q_1 + q_2 + \cdots + q_k = 1$. Podemos aplicar essa técnica ao cálculo do vetor de estado estacionário de nossos exemplos.

▶ EXEMPLO 7 De novo o Exemplo 2

No Exemplo 2, a matriz de transição foi

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix}$$

de modo que o sistema linear $(I - P)\mathbf{q} = \mathbf{0}$ é

$$\begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Isso leva a uma só equação independente

$$0{,}2q_1 - 0{,}3q_2 = 0$$

ou

$$q_1 = 1{,}5q_2$$

Assim, colocando $q_2 = s$, qualquer solução de (2) é da forma

$$\mathbf{q} = s\begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde s é uma constante arbitrária. Para fazer do vetor **q** um vetor de probabilidade, colocamos $s = 1/(1{,}5 + 1) = 0{,}4$. Consequentemente,

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$$

é o vetor de estado estacionário dessa cadeia de Markov regular. Isso significa que, a longo termo, 60% dos ex-alunos darão uma doação em algum ano e 40% não. Observe que isso confere com o resultado obtido numericamente no Exemplo 3.

▶ EXEMPLO 8 De novo o Exemplo 1

No Exemplo 1, a matriz de transição foi

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

de modo que o sistema linear $(I - P)\mathbf{q} = \mathbf{0}$ é

$$\begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}8 & -0{,}6 \\ -0{,}1 & -0{,}5 & 0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A forma escalonada reduzida por linhas da matriz de coeficientes é (verifique)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{34}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{14}{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que o sistema linear original é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} q_1 &= \left(\tfrac{34}{13}\right)q_3 \\ q_2 &= \left(\tfrac{14}{13}\right)q_3 \end{aligned}$$

Pondo $q_3 = s$, qualquer solução do sistema linear é da forma

$$\mathbf{q} = s\begin{bmatrix} \frac{34}{13} \\ \frac{14}{13} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para fazer disso um vetor de probabilidade, colocamos

$$s = \frac{1}{\frac{34}{13} + \frac{14}{13} + 1} = \frac{13}{61}$$

Assim, o vetor de estado estacionário desse sistema é

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{34}{61} \\ \frac{14}{61} \\ \frac{13}{61} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5573\ldots \\ 0{,}2295\ldots \\ 0{,}2131\ldots \end{bmatrix}$$

Isso confere com o resultado obtido numericamente na Tabela 1. As entradas de **q** dão as probabilidades de que, a longo termo, um carro qualquer vá ser devolvido à loja 1, 2 ou 3, respectivamente. Se a locadora de automóveis tiver 1.000 carros, deveria projetar suas instalações de modo a ter pelo menos 558 vagas na loja 1, pelo menos 230 vagas na loja 2 e pelo menos 214 vagas na loja 3.

▶ EXEMPLO 9 De novo o Exemplo 5

Não veremos os detalhes das contas, mas simplesmente afirmamos que o único vetor solução de probabilidade do sistema linear $(I - P)\mathbf{q} = \mathbf{0}$ é

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{3}{28} \\ \frac{3}{28} \\ \frac{3}{28} \\ \frac{5}{28} \\ \frac{4}{28} \\ \frac{3}{28} \\ \frac{4}{28} \\ \frac{3}{28} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1071\ldots \\ 0{,}1071\ldots \\ 0{,}1071\ldots \\ 0{,}1785\ldots \\ 0{,}1428\ldots \\ 0{,}1071\ldots \\ 0{,}1428\ldots \\ 0{,}1071\ldots \end{bmatrix}$$

As entradas desse vetor indicam a proporção de tempo que a guarda de trânsito permanece, a longo termo, em cada cruzamento. Assim, não é adequada a estratégia de movimentação aleatória com probabilidades iguais para cada cruzamento se o objetivo dela for passar a mesma proporção de tempo em cada cruzamento. (Ver Exercício 5.) ◀

Conjunto de exercícios 10.5

1. Considere a matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule $\mathbf{x}^{(n)}$ com $n = 1, 2, 3, 4, 5$ se $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) Enuncie por que P é regular e encontre seu vetor de estado estacionário.

2. Considere a matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ e $\mathbf{x}^{(3)}$ com três casas decimais se

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) Enuncie por que P é regular e encontre seu vetor de estado estacionário.

3. Em cada caso, encontre o vetor de estado estacionário da matriz de transição regular.

(a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0{,}81 & 0{,}26 \\ 0{,}19 & 0{,}74 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

4. Seja P a matriz de transição

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que P não é regular.

(b) Mostre que, quando n cresce, $P^n\mathbf{x}^{(0)}$ converge a $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, qualquer que seja o vetor estado inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.

(c) Qual conclusão do Teorema 10.5.3 não é válida para o estado estacionário dessa matriz de transição?

5. Mostre que se P for uma matriz de transição regular $k \times k$ tal que a soma das entradas de cada linha é 1, então as entradas do vetor de estado estacionário serão todas iguais a $1/k$.

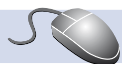
6. Mostre que a matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

é regular e use o Exercício 5 para encontrar seu vetor de estado estacionário.

7. O João ou está alegre, ou está triste. Se ele estiver alegre num dia, quatro em cinco vezes ele estará alegre no dia seguinte. Se ele estiver triste num dia, uma em três vezes ele estará triste no dia seguinte. A longo termo, quais são as chances do João estar alegre num dado dia qualquer?

8. Um país é dividido em três regiões demográficas. Observa-se que, a cada ano, 5% dos moradores da região 1 mudam para a região 2 e 5% mudam para a região 3. Dos moradores da região 2, 15% mudam para a região 1 e 10% mudam para a região 3. Finalmente, dos moradores da região 3, 10% mudam para a região 1 e 5% mudam para a região 2. A longo termo, qual porcentagem da população mora em cada uma das três regiões?



Seção 10.5 Exercícios com tecnologia

Os exercícios seguintes foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, esse recurso é MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser algum outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidades de Álgebra Linear. Em cada exercício, você deverá ler a documentação pertinente do recurso particular que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você estará capacitado a usar seu recurso computacional para resolver muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Considere a sequência de matrizes de transição

$$\{P_2, P_3, P_4, \ldots\}$$

com

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad P_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

e assim por diante.

(a) Use um computador para mostrar que cada uma dessas matrizes é regular, calculando seus quadrados.

(b) Verifique o Teorema 10.5.2 calculando a centésima potência de P_k com $k = 2, 3, 4, 5$. Em seguida, forneça uma conjectura sobre o valor limite de P_k^n quando $n \to \infty$, qualquer que seja $k = 2, 3, 4, \ldots$.

(c) Verifique que a coluna comum $\mathbf{q}_k$ da matriz limite encontrada na parte (b) satisfaz a equação $P_k\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k$, conforme exige o Teorema 10.5.4.

T2. Um camundongo é colocado numa caixa com nove compartimentos, como mostra a figura dada. Suponha que seja igualmente provável que o camundongo passe por qualquer uma das portas do compartimento ou que permaneça parado num mesmo compartimento.

(a) Construa a matriz de transição 9×9 para esse problema e mostre que é regular.

(b) Determine o vetor de estado estacionário da matriz.

(c) Use um argumento de simetria para mostrar que esse problema pode ser resolvido usando somente uma matriz 3×3.

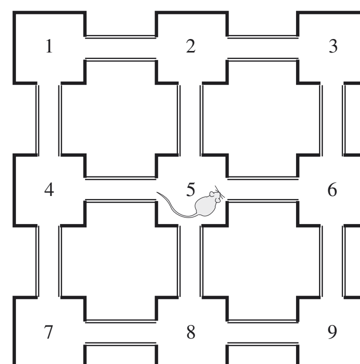


Figura Ex-T2

10.6 Teoria de grafos

Nesta seção, introduzimos representações matriciais das relações entre elementos de um conjunto e usamos aritmética matricial para analisar essas relações.

PRÉ-REQUISITO: Adição e multiplicação de matrizes

Relações entre os elementos de um conjunto

Existem inúmeros exemplos de conjuntos com um número finito de elementos nos quais existe alguma relação entre os elementos do conjunto. Por exemplo, o conjunto poderia consistir numa coleção de pessoas, animais, países, companhias, equipes esportivas ou cidades; e a relação entre dois elementos A e B de um tal conjunto poderia ser que a pessoa A domina a pessoa B, o animal A alimenta-se do animal B, o país A apoia militarmente o país B, a companhia A vende seus produtos para a companhia B, a equipe A sistematicamente derrota a equipe B, ou a cidade A possui um voo sem escalas para a cidade B.

Veremos agora como a teoria de *grafos dirigidos* pode ser usada para modelar, matematicamente, relações como as dos exemplos precedentes.

Grafos dirigidos

Um ***grafo dirigido*** é um conjunto finito de elementos $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ juntamente com uma coleção finita de pares ordenados (P_i, P_j) de elementos distintos desse conjunto, sem repetição de pares ordenados. Os elementos do conjunto são denominados ***vértices*** e os pares ordenados, ***arestas dirigidas*** do grafo dirigido. Usamos a notação $P_i \to P_j$ (que lemos "P_i está conectado a P_j") para indicar que a aresta dirigida (P_i, P_j) pertence ao grafo dirigido. Geometricamente, podemos visualizar um grafo dirigido (Figura 10.6.1) representando os vértices como pontos no plano e representando a aresta dirigida $P_i \to P_j$ por um segmento de reta ou de arco, do vértice P_i até o vértice P_j, com uma seta apontando de P_i para P_j. Se ambos $P_i \to P_j$ e $P_j \to P_i$ forem válidos (caso que denotamos por $P_i \leftrightarrow P_j$), desenhamos somente um segmento entre P_i e P_j, mas com setas apontando em ambos os sentidos (como entre P_2 e P_3 na figura).

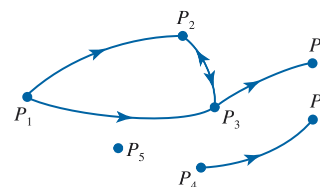
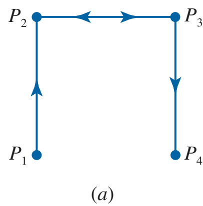
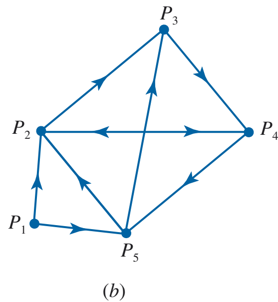


Figura 10.6.1

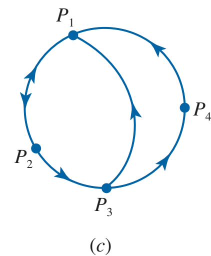
Como ocorre na Figura 10.6.1, por exemplo, um grafo dirigido pode ter componentes "separados" de vértices, que são conectados somente entre si, bem como alguns



(a)



(b)



(c)

▲ **Figura 10.6.2**

vértices, tal como P_5, que podem não estar conectados com nenhum outro vértice. Além disso, como $P_i \to P_i$ não é permitido num gráfico dirigido, um vértice não pode estar conectado consigo mesmo por um único arco que não passe por nenhum outro vértice.

A Figura 10.6.2 mostra diagramas representando outros três exemplos de grafos dirigidos. Dado um grafo dirigido de n vértices, podemos associar ao grafo dirigido uma matriz $M = [m_{ij}]$ de tamanho $n \times n$, denominada ***matriz de vértices*** do grafo dirigido, como segue. Os elementos da matriz são definidos por

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } P_i \to P_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

com $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Para os três grafos dirigidos da Figura 10.6.2, as matrizes de vértices correspondentes são

$$\text{Figura 10.6.2}a\text{:} \qquad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Figura 10.6.2}b\text{:} \qquad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Figura 10.6.2}c\text{:} \qquad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por definição, as matrizes de vértices têm as propriedades seguintes:

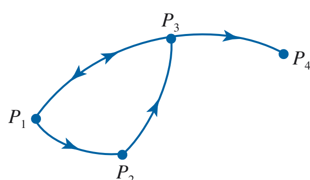
(i) Todas as entradas são 0 ou 1.

(ii) Todas as entradas na diagonal principal são 0.

Reciprocamente, qualquer matriz com essas propriedades determina um único grafo dirigido cuja matriz de vértices é a matriz dada. Por exemplo, a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

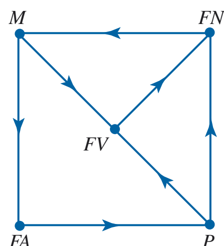
determina o grafo dirigido da Figura 10.6.3.



▲ **Figura 10.6.3**

▶ EXEMPLO 1 Influências numa família

Uma certa família consiste numa mãe, num pai, numa filha e em dois filhos. Os membros da família exercem influência, ou poder, sobre cada outro membro da família da seguinte maneira: a mãe pode influenciar a filha e o filho mais velho; o pai pode influenciar os dois filhos; a filha pode influenciar o pai; o filho mais velho pode influenciar o filho mais novo; o filho mais novo pode influenciar a mãe. Podemos modelar esse padrão de influência familiar com um grafo dirigido cujos vértices são os cinco membros da família. Se o membro da família A influencia o membro B, escrevemos $A \to B$. A Figura 10.6.4 é



▲ **Figura 10.6.4**

o grafo dirigido resultante, sendo que usamos as letras M, P, FA, FV e FN para denotar a mãe, o pai, a filha, o filho mais velho e o filho mais novo, respectivamente. A matriz de vértices desse grafo dirigido é

$$\begin{array}{c|ccccc|} & M & P & FA & FV & FN \\ M & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ FA & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ FV & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ FN & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

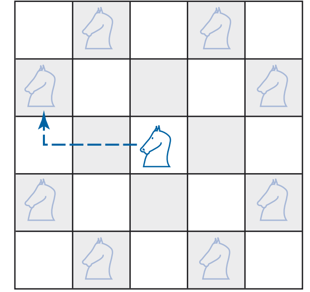


Figura 10.6.5

▶ EXEMPLO 2 Matriz de vértices: movimentos de xadrez

No jogo de xadrez, o cavalo se move pelo tabuleiro num padrão “L.” No tabuleiro da Figura 10.6.5, ele pode se mover horizontalmente duas casas e depois verticalmente uma casa ou, então, ele pode se mover verticalmente duas casas e depois horizontalmente uma casa. Assim, a partir da casa central branca do tabuleiro, o cavalo pode se mover para qualquer uma das oito casas pretas marcadas com um cavalo na figura. Suponha, agora, que o cavalo esteja restrito às nove casas numeradas da Figura 10.6.6. Se $i \to j$ significa que o cavalo pode se mover da casa i para a casa j, então o grafo dirigido da Figura 10.6.7 ilustra todos os possíveis movimentos que o cavalo pode fazer dentre essas nove casas. Na Figura 10.6.8, “desenrolamos” a Figura 10.6.7 para deixar mais claro o padrão de movimentos possíveis.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figura 10.6.6

A matriz de vértices desse grafo dirigido é dada por

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ◀

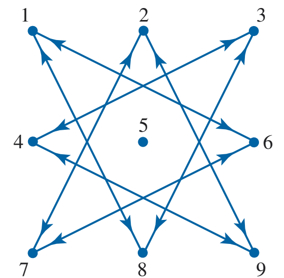


Figura 10.6.7

No Exemplo 1, o pai não pode influenciar diretamente a mãe; ou seja, $F \to M$ não é verdadeiro. Mas o pai pode influenciar o filho mais novo que pode, então, influenciar a mãe. Escrevemos isso como $P \to FN \to M$ e dizemos que isso é uma ***conexão de 2 passos*** de P para M. Analogamente, dizemos que $M \to FA$ é uma ***conexão de 1 passo***, $P \to FV \to FN \to M$ uma ***conexão de 3 passos***, e assim por diante. Consideremos, agora, uma técnica para encontrar o número de todas as conexões de r passos ($r = 1, 2, \ldots$) de um vértice P_i para um vértice P_j de um grafo dirigido qualquer. (Isso inclui o caso em que P_i e P_j forem o mesmo vértice.) O número de conexões de 1 passo de P_i para P_j é simplesmente m_{ij}. Ou seja, há somente zero ou uma conexão de 1 passo de P_i para P_j, dependendo se m_{ij} for zero ou um. Para o número de conexões de 2 passos, consideramos o quadrado da matriz de vértices. Se $m_{ij}^{(2)}$ for o (i, j)-ésimo elemento de M^2, temos

$$m_{ij}^{(2)} = m_{i1}m_{1j} + m_{i2}m_{2j} + \cdots + m_{in}m_{nj} \tag{1}$$

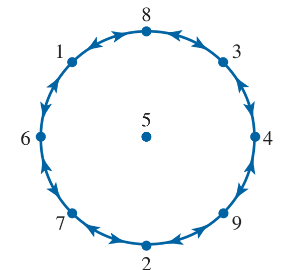


Figura 10.6.8

Agora, se $m_{i1} = m_{1j} = 1$, existe uma conexão de 2 passos $P_i \to P_1 \to P_j$ de P_i para P_j. No entanto, se m_{i1} ou se m_{1j} for zero, uma tal conexão de 2 passos não é possível. Assim, $P_i \to P_1 \to P_j$ é uma conexão de 2 passos se, e somente se, $m_{i1}m_{1j} = 1$. Analogamente,

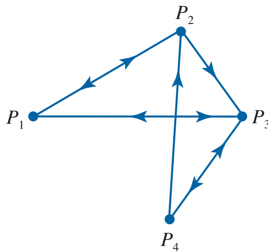
dado qualquer $k = 1, 2, \ldots, n$, $P_i \to P_k \to P_j$ é uma conexão de 2 passos de P_i para P_j se, e só se, o termo $m_{ik}m_{kj}$ à direita de (1) for igual a um; caso contrário, o termo é zero. Assim, o lado direito de (1) é o número total de conexões de 2 passos de P_i para P_j.

Um argumento análogo funciona para encontrar o número de conexões de 3, 4, . . . , r passos de P_i para P_j. Em geral, temos o resultado seguinte.

TEOREMA 10.6.1 *Seja M a matriz de vértices de um grafo dirigido e seja $m_{ij}^{(r)}$ o (i, j)-ésimo elemento de M^r. Então $m_{ij}^{(r)}$ é igual ao número de conexões de r passos de P_i para P_j.*

▶ EXEMPLO 3 Usando o Teorema 10.6.1

A Figura 10.6.9 é o mapa das rotas de uma pequena companhia aérea que atende as quatro cidades P_1, P_2, P_3 e P_4. Como grafo dirigido, a matriz de vértices é



▲ **Figura 10.6.9**

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos

$$M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Se estivermos interessados nas conexões da cidade P_4 para a cidade P_3, podemos usar o Teorema 10.6.1 para saber quantas existem. Como $m_{43} = 1$, existe uma conexão de um passo; como $m_{43}^{(2)} = 1$, existe uma conexão de 2 passos e, como $m_{43}^{(3)} = 1$, existem 3 conexões de 3 passos. Para verificar isso, da Figura 10.6.9, obtemos

conexões de 1 passo de P_4 para P_3: $P_4 \to P_3$
conexões de 2 passos de P_4 para P_3: $P_4 \to P_2 \to P_3$
conexões de 3 passo de P_4 para P_3: $P_4 \to P_3 \to P_4 \to P_3$
$P_4 \to P_2 \to P_1 \to P_3$
$P_4 \to P_3 \to P_1 \to P_3$ ◀

Panelas

Na linguagem do dia a dia, uma "panela" é um grupo coeso de pessoas (em geral três ou mais) que tendem a se comunicar entre si e que não têm lugar para pessoas fora do grupo. Na teoria de grafos, damos um sentido mais preciso a esse conceito.

DEFINIÇÃO 1 Um subconjunto de um grafo dirigido é denominado ***panela*** se satisfizer as três condições seguintes.

(i) O subconjunto contém pelo menos três vértices.

(ii) Dado qualquer par de vértices P_i e P_j no subconjunto, ambos $P_i \to P_j$ e $P_j \to P_i$ são verdadeiros.

(iii) O subconjunto é tão grande quanto possível, ou seja, não é possível acrescentar mais um vértice ao subconjunto e ainda satisfazer a condição (ii).

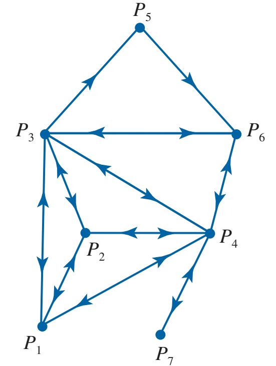
Essa definição sugere que as panelas são subconjuntos máximos de elementos que estão em "comunicação perfeita" uns com os outros. Por exemplo, se os vértices representarem cidades e $P_i \to P_j$ significar que existe um voo direto de P_i para P_j, então existirão voos diretos em ambos sentidos entre duas cidades quaisquer de uma panela.

▶ **EXEMPLO 4 Um grafo dirigido com duas panelas**

O grafo dirigido ilustrado na Figura 10.6.10 (que poderia representar o mapa das rotas de uma companhia aérea) tem duas panelas, a saber,

$$\{P_1, P_2, P_3, P_4\} \quad \text{e} \quad \{P_3, P_4, P_6\}$$

Esse exemplo mostra que um grafo dirigido pode conter várias panelas e que um vértice pode pertencer simultaneamente a mais de uma panela. ◀



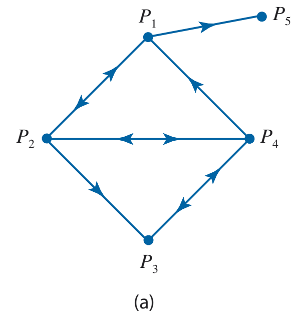
▲ **Figura 10.6.10**

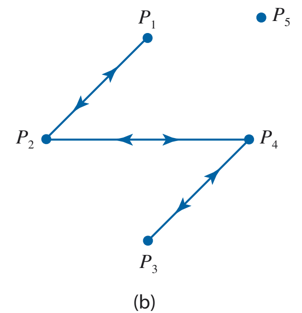
Nos grafos dirigidos simples, as panelas podem ser encontradas por inspeção, mas, em grafos dirigidos maiores, seria desejável ter um procedimento sistemático de detectar panelas. Para esse propósito, é conveniente definir uma matriz $S = [s_{ij}]$ relacionada ao grafo dirigido como segue.

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } P_i \leftrightarrow P_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A matriz S determina um grafo dirigido idêntico ao grafo dirigido dado, exceto que as arestas com somente uma seta foram suprimidas. Por exemplo, se o grafo dirigido original for o dado na Figura 10.6.11*a*, então o grafo dirigido que tem S como matriz de vértices é dado na Figura 10.6.11*b*. A matriz S pode ser obtida da matriz de vértices M do grafo dirigido original colocando $s_{ij} = 1$ se $m_{ij} = m_{ji} = 1$ e $s_{ij} = 0$, caso contrário.

O teorema seguinte, que utiliza a matriz S, é útil para identificar panelas.





▲ **Figura 10.6.11**

TEOREMA 10.6.2 Identificando panelas

Seja $s_{ij}^{(3)}$ o (i, j)-ésimo elemento de S^3. Então um vértice P_i pertence a uma panela se, e só se, $s_{ii}^{(3)} \neq 0$.

Prova Se $s_{ii}^{(3)} \neq 0$, então existe pelo menos uma conexão de 3 passos de P_i para si mesmo no grafo dirigido modificado determinado por S, digamos, $P_i \to P_j \to P_k \to P_i$. No grafo dirigido modificado, todas as relações dirigidas são bilaterais, de modo que também temos as conexões $P_i \leftrightarrow P_j \leftrightarrow P_k \leftrightarrow P_i$. No entanto, isso significa que $\{P_i, P_j, P_k\}$ é ou uma panela ou um subconjunto de uma panela. Em ambos casos, P_i deve pertencer a alguma panela. A afirmação recíproca, que se P_i pertencer a alguma panela, então $s_{ii}^{(3)} \neq 0$, segue de maneira similar. ◀

▶ **EXEMPLO 5 Usando o Teorema 10.6.2**

Suponha que um grafo dirigido tenha como matriz de vértices

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como todas as entradas diagonais de S^3 são zero, segue do Teorema 10.6.2 que o grafo dirigido não possui panelas.

▶ EXEMPLO 6 Usando o Teorema 10.6.2

Suponha que um grafo dirigido tenha como matriz de vértices

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S^3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

As entradas diagonais de s^3 são $s_{11}^{(3)}$, $s_{22}^{(3)}$ e $s_{44}^{(3)}$. Consequentemente, nesse grafo dirigido, P_1, P_2 e P_4 pertencem a panelas. Como uma panela deve conter pelo menos três vértices, o grafo dirigido dado tem somente uma panela, a saber, $\{P_1, P_2, P_4\}$. ◀

Grafos dirigidos por dominância

Em muitos grupos de indivíduos ou animais, existe uma ordem de dominação bem direcionada entre quaisquer dois de seus membros. Ou seja, dados dois indivíduos A e B quaisquer, ou A domina B, ou B domina A, mas não ambos. Em termos de grafos dirigidos nos quais $P_i \to P_j$ significa que P_i domina P_j, isso significa que dados quaisquer pares de pontos distintos, ou $P_i \to P_j$, ou $P_j \to P_i$, mas não ambos. Em geral, temos a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 2 Um ***grafo dirigido por dominância*** é um grafo dirigido tal que dado qualquer par de vértices distintos P_i e P_j, ou $P_i \to P_j$, ou $P_j \to P_i$, mas não ambos.

Um exemplo de grafo dirigido satisfazendo essa definição é uma divisão de n equipes esportivas em que cada equipe joga exatamente uma vez com cada uma das outras e em que não são permitidos empates, no estilo de rodadas eliminatórias de um torneio. Se $P_i \to P_j$ significa que P_i derrota P_j, é fácil ver que a definição de grafo dirigido por dominância está satisfeita. Por causa desse aspecto, os grafos dirigidos por dominância são, às vezes, denominados ***torneios***.

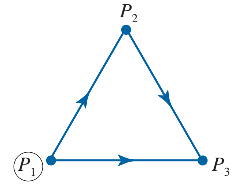
A Figura 10.6.12 dá alguns grafos dirigidos por dominância com três, quatro e cinco vértices, respectivamente. Nesses três grafos, os vértices circulados têm a seguinte propriedade interessante: de cada um deles existe uma conexão de 1 ou de 2 passos para cada outro vértice do grafo. Num torneio esportivo, esses vértices correspondem às equipes mais "poderosas" que, ou derrotam uma outra equipe, ou derrotam uma equipe que derrota essa outra equipe. Agora podemos enunciar e provar um teorema que garante que qualquer grafo dirigido por dominância tem pelo menos um vértice com essa propriedade.

TEOREMA 10.6.3 Conexões em grafos dirigidos por dominância

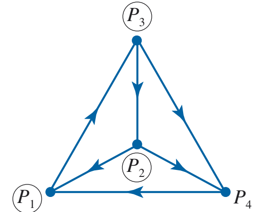
Em qualquer grafo dirigido por dominância, existe pelo menos um vértice do qual existem conexões de 1 ou de 2 passos para qualquer outro vértice.

Prova Considere um vértice (pode haver vários) com o maior número total de conexões de 1 e de 2 passos para os outros vértices do grafo. Renumerando, se necessário, os vértices, podemos supor que P_1 seja um tal vértice. Suponha que P_i seja um vértice tal que não existam conexões de 1 ou de 2 passos de P_1 para P_i. Então, em particular, $P_1 \to P_i$ não é verdadeiro, de modo que, pela definição de grafo dirigido por dominância, $P_i \to P_1$ é verdadeiro. Suponha, agora, que P_k seja um vértice tal que $P_1 \to P_k$ é verdadeiro. Então não podemos ter $P_k \to P_i$ pois, nesse caso, $P_1 \to P_k \to P_i$ seria uma conexão de 2 passos de P_1 para P_i. Assim, necessariamente, $P_i \to P_k$ é verdadeiro. Ou seja, P_1 tem uma conexão de 1 passo para todos os vértices para os quais P_1 tem uma conexão de 1 passo. Esse vértice P_i também tem, então, uma conexão de 2 passos para todos os vértices para os quais P_1 tem uma conexão de 2 passos. No entanto, temos adicionalmente que $P_i \to P_1$ é verdadeiro, de modo que P_i tem mais conexões de 1 e de 2 passos a outros vértices do grafo do que P_1. Isso contradiz a maneira pela qual escolhemos P_1, pelo que concluímos que não existe o tal vértice P_i para o qual P_1 não possui conexões de 1 e de 2 passos. ◀

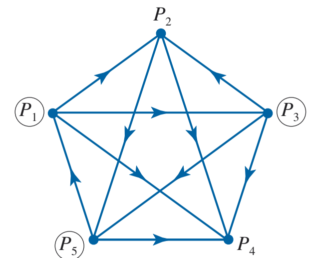
Essa prova mostra que um vértice com o maior número total de conexões de 1 e de 2 passos para os outros vértices do grafo tem a propriedade enunciada no teorema. Existe uma maneira simples de encontrar tais vértices usando a matriz de vértices M e seu quadrado M^2. A soma das entradas na i-ésima linha de M é o número total de conexões de 1 passo de P_i para os outros vértices e a soma das entradas na i-ésima linha de M^2 é o número total de conexões de 2 passos de P_i para os outros vértices. Consequentemente, a soma das entradas na i-ésima linha da matriz $A = M + M^2$ é o número total de conexões de 1 e de 2 passos de P_i para os outros vértices. Em outras palavras, uma linha de $A = M + M^2$ com a maior soma de entradas identifica um vértice com a propriedade enunciada no Teorema 10.6.3.



(*a*)



(*b*)



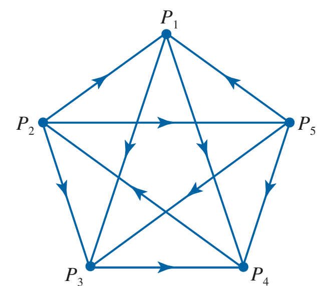
(*c*)

▲ **Figura 10.6.12**

▶ **EXEMPLO 7 Usando o Teorema 10.6.3**

Suponha que cinco tenistas joguem exatamente uma vez entre si e que os resultados sejam os indicados no grafo dirigido por dominância da Figura 10.6.13. A matriz de vértices do grafo é

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



▲ **Figura 10.6.13**

e, então

$$A = M + M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

A soma das linhas de A é

soma das entradas da 1ª linha = 4
soma das entradas da 2ª linha = 9
soma das entradas da 3ª linha = 2
soma das entradas da 4ª linha = 4
soma das entradas da 5ª linha = 7

Como a segunda linha tem a maior soma de entradas, o vértice P_2 deve ter uma conexão de 1 ou de 2 passos com cada um dos demais vértices. Isso é facilmente confirmado na Figura 10.6.13. ◀

Informalmente, foi sugerido que um vértice com o maior número de conexões de 1 e de 2 passos para os outros vértices do grafo é um vértice "poderoso". Podemos formalizar esse conceito com a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 3 O ***poder*** de um vértice num grafo dirigido por dominância é o número total de suas conexões de 1 e de 2 passos para os outros vértices do grafo. Alternativamente, o poder de um vértice P_i é a soma das entradas da i-ésima linha da matriz $A = M + M^2$, em que M é a matriz de vértices do grafo dirigido.

▶ EXEMPLO 8 De novo o Exemplo 7

Vamos classificar os cinco tenistas do Exemplo 7 de acordo com seu poder. Pelas contas de soma de entradas naquele exemplo, temos

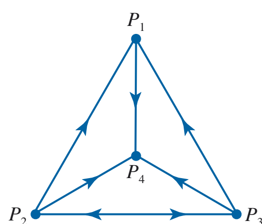
Poder do tenista $P_1 = 4$
Poder do tenista $P_2 = 9$
Poder do tenista $P_3 = 2$
Poder do tenista $P_4 = 4$
Poder do tenista $P_5 = 7$

Isso mostra que uma classificação dos tenistas de acordo com seu poder é

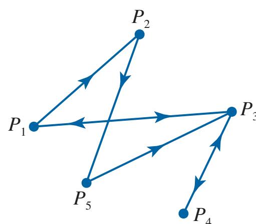
P_2 (primeiro), P_3 (segundo), P_1 e P_4 (empatados em terceiro), P_3 (último). ◀

Conjunto de exercícios 10.6

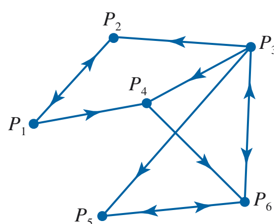
1. Em cada parte, construa a matriz de vértices do grafo dirigido dado na figura.



(a)



(b)



(c)

▲ **Figura Ex-1**

2. Em cada parte, desenhe um diagrama do grafo dirigido correspondente à matriz de vértices dada.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Seja M a matriz de vértices de um grafo dirigido seguinte.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Desenhe um diagrama do grafo dirigido.

(b) Use o Teorema 10.6.1 para encontrar o número de conexões de 1, de 2 e de 3 passos do vértice P_1 ao vértice P_2.

Confira sua resposta como no Exemplo 3, listando todas as diversas conexões.

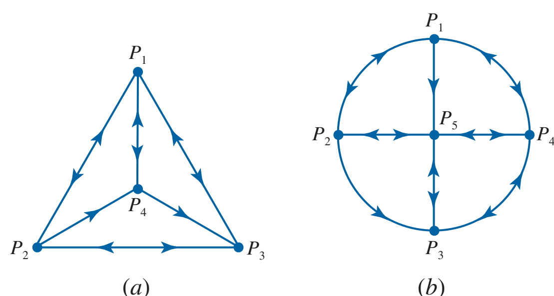
(c) Repita a parte (b) para as conexões de 1, de 2 e de 3 passos do vértice P_1 ao vértice P_4.

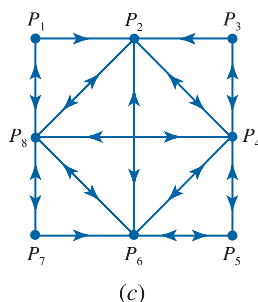
4. (a) Calcule a matriz produto M^TM com a matriz de vértices M do Exemplo 1.

(b) Verifique que a k-ésima entrada diagonal de M^TM é o número de membros da família que influenciam o k-ésimo membro da família. Por que vale isso?

(c) Encontre uma interpretação análoga dos valores não diagonais de M^TM.

5. Em cada parte, identifique visualmente todas as panelas do grafos dirigido dado na figura.



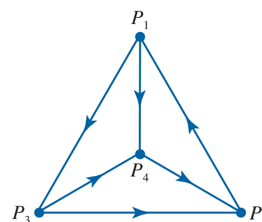


▲ **Figura Ex-5**

6. Em cada parte, use o Teorema 10.6.2 para encontrar todas as panelas no grafo dirigido correspondente à matriz de vértices dada.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

7. Construa a matriz de vértices e encontre o poder de cada um dos vértices do grafo dirigido por dominância ilustrado na figura.



◀ **Figura Ex-7**

8. Cinco tenistas jogam entre si uma vez com os resultados seguintes.

A derrota B, C e D

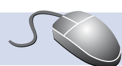
B derrota C e E

C derrota D e E

D derrota B

E derrota A e D

Classifique os cinco tenistas de acordo com o poder dos vértices que lhes correspondem no grafo dirigido por dominância que representa o resultado das partidas.



Seção 10.6 Exercícios com tecnologia

Os exercícios seguintes foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, esse recurso é MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser algum outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidades de Álgebra Linear. Em cada exercício, você deverá ler a documentação pertinente do recurso particular que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você estará capacitado a usar seu recurso computacional para resolver muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Um grafo com n vértices tais que cada vértice esteja conectado a cada outro vértice, tem uma matriz de vértices dada por

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Nesse problema, desenvolvemos uma fórmula para M_m^k, cuja (i, j)-ésima entrada iguala o número de conexões de k passos de P_i para P_j.

(a) Use um computador para calcular as oito matrizes M_n^k, com $n = 2, 3$ e $k = 2, 3, 4, 5$.

(b) Use os resultados da parte (a) e argumentos de simetria para mostrar que M_m^k pode ser escrito como

$$M_n^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^k$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k & \cdots & \beta_k \\ \beta_k & \alpha_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k & \cdots & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \alpha_k & \beta_k & \beta_k & \cdots & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \beta_k & \alpha_k & \beta_k & \cdots & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k & \alpha_k & \cdots & \beta_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k & \cdots & \alpha_k \end{bmatrix}$$

(c) Usando o fato que $M_n^k = M_n M_n^{k-1}$, mostre que

$$\begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & n-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{k-1} \\ \beta_{k-1} \end{bmatrix}$$

com

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(d) Usando a parte (c), mostre que

$$\begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & n-2 \end{bmatrix}^{k-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(e) Use os métodos da Seção 5.2 para calcular

$$\begin{bmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & n-2 \end{bmatrix}^{k-1}$$

e, com isso, obter expressões para α_k e β_k e, finalmente, mostrar que

$$M_n^k = \left(\frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n} \right) U_n + (-1)^k I_n$$

em que U_n é a matriz $n \times n$ com todas entradas 1 e I_n é a matriz identidade $n \times n$.

(f) Mostre que, se $n > 2$, todos os vértices desses grafos dirigidos pertencem a panelas.

T2. Considere um torneio eliminatório entre n jogadores (denotados por $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$) no qual a_1 derrota a_2, a_2 derrota a_3, a_3 derrota $a_4, \ldots, a_{n-1}$ derrota a_n e a_n derrota a_1. Calcule o "poder" de cada jogador, mostrando que eles têm todos o mesmo poder; em seguida, determine esse poder comum. [*Sugestão*: use um computador para estudar os casos $n = 3, 4, 5, 6$; depois estabeleça uma conjectura e prove que sua conjectura é verdadeira.]

10.7 Jogos de estratégia

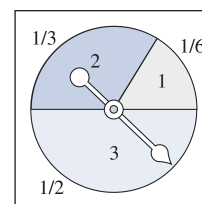
Nesta seção, discutimos um jogo genérico no qual dois oponentes escolhem estratégias distintas para alcançar objetivos opostos. Em alguns casos, a estratégia ótima de cada jogador é encontrada com o uso de técnicas matriciais.

PRÉ-REQUISITOS: Multiplicação de matrizes
Conceitos básicos de probabilidade

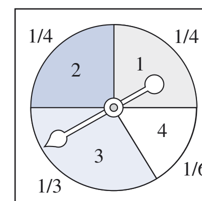
Teoria de jogos

Para introduzir os conceitos básicos da teoria de jogos, consideramos um jogo que pode ser encontrado em parques de diversões, e em que duas pessoas concordam em jogar. Digamos que os participantes do jogo sejam o *jogador L* e *jogador C*. Cada jogador tem uma roda estacionária com um ponteiro móvel fixado em seu centro, como mostra a Figura 10.7.1. Por razões que ficarão claras, vamos denominar a roda do jogador L de *roda das linhas* e a roda do jogador C de *roda das colunas*. A roda das linhas é dividida em três setores, numerados 1, 2 e 3 e a roda das colunas é dividida em quatro setores, numerados 1, 2, 3 e 4. As frações de área ocupadas pelos diversos setores estão indicadas na figura. Para

jogar o jogo, cada jogador gira o ponteiro de sua roda, pondo-o em movimento até parar aleatoriamente. O número do setor no qual cada roda para é denominado o *movimento* do jogador. Assim, o jogador L tem três movimentos possíveis e o jogador C tem quatro movimentos possíveis. Dependendo do movimento feito por cada jogador, o jogador C faz um pagamento em dinheiro ao jogador L de acordo com a Tabela 1.



Roda das linhas do jogador *L*



Roda das colunas do jogador *C*

Figura 10.7.1

Tabela 1 Pagamentos ao jogador *L*

		Movimento do jogador *C*			
		1	**2**	**3**	**4**
Movimento do jogador *L*	**1**	\$3	\$5	−\$2	−\$1
	2	−\$2	\$4	−\$3	−\$4
	3	\$6	−\$5	\$0	\$3

Por exemplo, se o ponteiro da roda das linhas parar no setor 1 (o jogador L fez o movimento 1) e o ponteiro da roda das colunas parar no setor 2 (o jogador C fez o movimento 2), então o jogador C deve pagar \$5 ao jogador L. Algumas das entradas nessa tabela são negativas, indicando que o jogador C faz um pagamento negativo ao jogador L, com o que queremos dizer que o jogador L faz um pagamento positivo ao jogador C. Por exemplo, se a roda das linhas mostrar 2 e a roda das colunas mostrar 4, então o jogador L paga ao jogador C a quantia de \$4, pois a entrada correspondente na tabela é −\$4. Dessa maneira, as entradas positivas na tabela são os ganhos do jogador L e as perdas do jogador C, e as entradas negativas na tabela são os ganhos do jogador C e as perdas do jogador L.

Nesse jogo, os jogadores não têm controle sobre seus movimentos, pois cada movimento é determinado pela sorte. Contudo, se cada jogador puder decidir se ele quer ou não jogar, então cada um quererá saber quanto pode esperar ganhar ou perder a longo termo, caso decida jogar. (Adiante nesta seção, discutimos essa questão e também consideramos a situação mais complicada na qual os jogadores podem exercer algum controle sobre seus movimentos por meio de variações nos setores de suas rodas.)

Jogos de matriz de duas pessoas com soma zero

O jogo que acabamos de descrever é um exemplo de um ***jogo de matriz de duas pessoas com soma zero***. O termo "soma zero" significa que a cada vez que é jogado, o ganho positivo de um jogador é igual ao ganho negativo (perda) do outro jogador. Ou seja, a soma dos dois ganhos é zero. O termo "jogo de matriz" é utilizado para descrever um jogo de duas pessoas no qual cada jogador tem somente um número finito de movimentos, de modo que todos os possíveis resultados de cada jogada, e os correspondentes ganhos dos jogadores, podem ser arranjados em formato tabular ou matricial, como na Tabela 1.

Em um jogo arbitrário desse tipo, seja m o número de movimentos possíveis do jogador L e seja n o número de possíveis movimentos do jogador C. Num lance desse jogo, cada jogador faz um de seus movimentos possíveis e, então, é feita uma *compensação* do jogador C para o jogador L, dependendo dos movimentos. Sendo $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$, escrevemos

a_{ij} = compensação do jogador C para o jogador L, se o jogador L fizer o movimento i e o jogador C o movimento j

Essa compensação não precisa ser em dinheiro, mas qualquer espécie de bem de consumo ao qual possamos associar um valor numérico. Como antes, se uma entrada a_{ij} for

negativa, isso significa que o jogador C recebe do jogador L uma compensação de $[a_{ij}]$. Arranjamos essas mn compensações possíveis no formato de uma matriz $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

à qual nos referimos como ***matriz de compensação*** ou ***matriz de pagamento*** do jogo.

Cada jogador deve fazer seus movimentos numa base probabilística. Por exemplo, para o jogo discutido na introdução, a razão da área de um setor para a área da roda seria a probabilidade de que o jogador faça o movimento correspondente àquele setor. Assim, pela Figura 10.7.1, vemos que o jogador L faz o movimento 2 com probabilidade $\frac{1}{3}$ e o jogador C faz o movimento 2 com probabilidade $\frac{1}{4}$. Em geral, usamos as definições seguintes.

p_i = probabilidade de que o jogador L faça o movimento i $(i = 1, 2, \ldots, m)$

q_j = probabilidade de que o jogador C faça o movimento j $(j = 1, 2, \ldots, n)$

Segue dessas definições que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1$$

e

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$$

Com as probabilidades p_i e q_j, formamos os dois vetores

$$\mathbf{p} = [p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_m] \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

Dizemos que o vetor linha **p** é a ***estratégia do jogador L*** e o vetor coluna **q**, a ***estratégia do jogador C***. Por exemplo, pela Figura 10.7.1 temos

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

para o jogo de parque de diversões descrito acima.

Pela Teoria de Probabilidades, se p_i for a probabilidade do jogador L fazer o movimento i e, independentemente, q_j for a probabilidade do jogador C fazer o movimento j, então $p_i q_j$ será a probabilidade de, num lance qualquer do jogo, o jogador L fazer o movimento i *e* o jogador C fazer o movimento j. A compensação para o jogador L para um tal par de movimentos é a_{ij}. Multiplicando cada possível compensação pela correspondente probabilidade e somando sobre todas as compensações possíveis, obtemos a expressão

$$a_{11}\, p_1 q_1 + a_{12}\, p_1 q_2 + \cdots + a_{1n}\, p_1 q_n + a_{21}\, p_2 q_1 + \cdots + a_{mn}\, p_m q_n \tag{1}$$

A Equação (1) é uma média ponderada das compensações para o jogador L; cada compensação é ponderada de acordo com a probabilidade de sua ocorrência. Na Teoria de Probabilidades, essa média ponderada é denominada ***compensação esperada*** para o jogador L. Pode ser mostrado que, se o jogo for jogado muitas vezes, a compensação média por jogada para o jogador L, a longo termo, é dada por essa expressão. Denotamos essa compensação esperada por $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, para enfatizar que depende das estratégias

de ambos os jogadores. Pela definição da matriz de compensação A e das estratégias $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, pode ser verificado que podemos expressar a compensação esperada em notação matricial como

$$E(\mathbf{p},\mathbf{q}) = [p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_m]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \mathbf{p}A\mathbf{q} \qquad (2)$$

Como $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ é a compensação esperada para o jogador L, segue que $-E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ é a compensação esperada para o jogador C.

▶ EXEMPLO 1 Compensação esperada para o jogador *L*

Para o jogo de parque de diversões descrito no início desta seção, temos

$$E(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{p}A\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -3 & -4 \\ 6 & -5 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \frac{13}{72} = 0{,}1805\ldots$$

Assim, a longo termo, o jogador L pode esperar receber uma média de 18 centavos do jogador C a cada jogada do jogo. ◀

Até aqui, discutimos a situação em que cada jogador tem uma estratégia predeterminada. Agora discutimos a situação mais difícil em que ambos os jogadores podem mudar suas estratégias independentemente. Por exemplo, no jogo descrito na introdução, permitimos a ambos jogadores alterar as áreas dos setores de suas rodas e, assim, controlar as probabilidades de seus respectivos movimentos. Isso muda qualitativamente a natureza do problema e nos coloca firmemente na verdadeira teoria de jogos. Fica entendido que nenhum dos dois jogadores conhece a estratégia que o outro irá escolher. Também supomos que cada jogador vá fazer a melhor escolha possível de estratégia e que o outro jogador sabe disso. Assim, o jogador L tenta escolher uma estratégia $\mathbf{p}$ tal que $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ seja a maior possível para a melhor estratégia $\mathbf{q}$ que o jogador C possa escolher e, analogamente, o jogador C tenta escolher uma estratégia $\mathbf{q}$ tal que $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ seja a menor possível para a melhor estratégia $\mathbf{p}$ que o jogador L possa escolher. Para ver que essas escolhas são realmente possíveis, precisamos do teorema seguinte, denominado ***teorema fundamental dos jogos de duas pessoas com soma zero***. (A prova geral, que envolve ideias da teoria de programação linear, será omitida. No entanto, mais adiante, provamos esse teorema no caso de jogos estritamente determinados e jogos de matrizes 2×2.)

TEOREMA 10.7.1 Teorema fundamental dos jogos com soma zero

Existem estratégias $\mathbf{p}^*$ *e* $\mathbf{q}^*$ *tais que*

$$E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) \geq E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq E(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) \qquad (3)$$

quaisquer que sejam as estratégias $\mathbf{p}$ *e* $\mathbf{q}$.

As estratégias $\mathbf{p}^*$ e $\mathbf{q}^*$ desse teorema são as melhores estratégias para os jogadores L e C, respectivamente. Para ver isso, escrevemos $v = E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$. A desigualdade do lado esquerdo da Equação (3) então diz que

$$E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) \geq v, \quad \text{com qualquer estratégia } \mathbf{q}$$

Isso significa que, se o jogador L escolher a estratégia $\mathbf{p}^*$, não interessando qual estratégia $\mathbf{q}$ o jogador C escolher, a compensação esperada para o jogador L nunca será menor do que v. Além disso, não é possível para o jogador L alcançar uma compensação esperada maior do que v. Para ver isso, suponha que exista alguma estratégia $\mathbf{p}^{**}$ que o jogador L possa escolher de tal modo que

$$E(\mathbf{p}^{**}, \mathbf{q}) > v, \quad \text{com qualquer estratégia } \mathbf{q}$$

Então, em particular,

$$E(\mathbf{p}^{**}, \mathbf{q}^*) > v$$

contradizendo a desigualdade do lado direito da Equação (3), que pede $v \geq E(\mathbf{p}^{**}, \mathbf{q}^*)$. Consequentemente, o melhor que o jogador L pode fazer é impedir que a sua compensação esperada caia abaixo do valor v. De maneira análoga, o melhor que o jogador C pode fazer é garantir que a sua compensação esperada tenha pelo menos o valor v, o que pode ser alcançado com a estratégia $\mathbf{q}^*$.

A partir dessa discussão, chegamos às definições que seguem.

DEFINIÇÃO 1 Se $\mathbf{p}^*$ e $\mathbf{q}^*$ forem estratégias tais que

$$E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) \geq E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq E(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) \tag{4}$$

quaisquer que sejam as estratégias $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, então dizemos que

(i) $\mathbf{p}^*$ é uma ***estratégia ótima para o jogador L***;

(ii) $\mathbf{q}^*$ é uma ***estratégia ótima para o jogador C***;

(iii) a compensação esperada $v = E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ é o ***valor*** do jogo.

O fraseado nessa definição sugere que as estratégias ótimas não são necessariamente únicas. Isso realmente ocorre e, no Exercício 2, pedimos uma prova ao leitor. Contudo, pode ser demonstrado que quaisquer dois pares de estratégias ótimas sempre resultam no mesmo valor v do jogo. Ou seja, se $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}^*$ e $\mathbf{p}^{**}$, $\mathbf{q}^{**}$ forem estratégias ótimas, então

$$E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = E(\mathbf{p}^{**}, \mathbf{q}^{**}) \tag{5}$$

O valor de um jogo é, portanto, a compensação esperada para o jogador L quando ambos jogadores escolhem quaisquer estratégias ótimas possíveis.

Para encontrar estratégias ótimas, devemos encontrar vetores $\mathbf{p}^*$ e $\mathbf{q}^*$ que satisfaçam a Equação (4). Geralmente, isso é feito usando técnicas de Programação Linear. A seguir, discutimos casos especiais nos quais as estratégias ótimas podem ser encontradas usando técnicas mais elementares.

Agora introduzimos a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 2 Uma entrada a_{rs} de uma matriz de compensação A é denominada ***ponto de sela*** se

(i) a_{rs} for a menor entrada em sua linha e

(ii) a_{rs} for a maior entrada em sua coluna.

Dizemos que um jogo cuja matriz de compensação tem um ponto de sela é ***estritamente determinado***.

Por exemplo, o elemento sombreado em cada uma das matrizes de compensação seguintes é um ponto de sela.

$$\begin{bmatrix} 3 & \boxed{1} \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 30 & -50 & -5 \\ \boxed{60} & 90 & 75 \\ -10 & 60 & -30 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 & -9 \\ 15 & -8 & -2 & 10 \\ 7 & 10 & \boxed{6} & 9 \\ 6 & 11 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Se uma matriz tiver um ponto de sela a_{rs}, ocorre que estratégias ótimas para os dois jogadores são as seguintes.

$$\mathbf{p}^* = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1 \quad \cdots \quad 0], \qquad \mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow s\text{-ésima entrada}$$

(r-ésima entrada indicada pela seta no 1 de $\mathbf{p}^*$)

Isso mostra que uma estratégia ótima para o jogador L é fazer sempre o r-ésimo movimento e que uma estratégia ótima para o jogador C é fazer sempre o s-ésimo movimento. Essas estratégias em que um só movimento é possível são denominadas ***estratégias puras***. As estratégias nas quais é possível mais de um movimento são denominadas ***estratégias mistas***. Para mostrar que as estratégias acima são ótimas, o leitor pode verificar as três equações a seguir (ver Exercício 6).

$$E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = \mathbf{p}^*A\mathbf{q}^* = a_{rs} \tag{6}$$

$$E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) = \mathbf{p}^*A\mathbf{q} \geq a_{rs} \quad \text{com qualquer estratégia } \mathbf{q} \tag{7}$$

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) = \mathbf{p}A\mathbf{q}^* \leq a_{rs} \quad \text{com qualquer estratégia } \mathbf{p} \tag{8}$$

Juntas, essas desigualdades implicam

$$E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) \geq E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq E(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)$$

quaisquer que sejam as estratégias $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$. Como isso coincide com a Equação (4), segue que $\mathbf{p}^*$ e $\mathbf{q}^*$ são estratégias ótimas.

Pela Equação (6), o valor de um jogo estritamente determinado é simplesmente o valor numérico do ponto de sela a_{rs}. É possível uma matriz de compensação ter vários pontos de sela, mas então a unicidade do valor de um jogo garante que o valor numérico de todos os pontos de sela é o mesmo.

▶ EXEMPLO 2 Estratégias ótimas para maximizar uma audiência

Duas redes de televisão competidoras, L e C, estão planejando levar ao ar programas de uma hora de duração para o mesmo horário. A rede L pode utilizar um entre três programas possíveis, e a rede C pode utilizar um entre quatro programas possíveis. Nenhuma das redes sabe qual programa a outra vai levar ao ar. Ambas as redes contratam o mesmo instituto de pesquisa de opinião para lhes dar uma estimativa de como as diversas possibilidades de transmitir os dois programas vão dividir a audiência. O instituto dá às redes a Tabela 2, cuja (i, j)-ésima entrada é a porcentagem da audiência que assistirá à rede L se o programa i da rede L competir, em termos de audiência, com o programa j da rede C. Qual programa cada rede deveria levar ao ar para maximizar a audiência?

Tabela 2 Porcentagem de audiência para a rede L

		Programa da rede *C*			
		1	**2**	**3**	**4**
Programa da rede *L*	**1**	60	20	30	55
	2	50	75	45	60
	3	70	45	35	30

Solução Subtraímos 50 de cada entrada da tabela e construímos a matriz

$$\begin{bmatrix} 10 & -30 & -20 & 5 \\ 0 & 25 & -5 & 10 \\ 20 & -5 & -15 & -20 \end{bmatrix}$$

Essa é a matriz de compensação do jogo de duas pessoas com soma zero no qual consideramos que as duas redes de televisão começam com 50% da audiência e em que a (i, j)-ésima entrada da matriz é a porcentagem da audiência que a rede C perde para a rede L se os programas i da rede L e j da rede C competirem entre si. É fácil ver que a entrada

$$a_{23} = -5$$

é um ponto de sela da matriz de compensação. Portanto, a estratégia ótima para a rede L é levar ao ar o programa 2 e a estratégia ótima para a rede C é levar ao ar o programa 3. Isso vai resultar em 45% da audiência para a rede L e 55% da audiência para a rede C. ◀

Jogos de matrizes 2 × 2

Um outro caso em que podemos encontrar estratégias ótimas por meios elementares ocorre quando cada jogador tem somente dois movimentos possíveis. Nesse caso, a matriz de compensação é a matriz 2 × 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Se o jogo for estritamente determinado, pelo menos uma das quatro estradas de A será um ponto de sela e as técnicas discutidas acima poderão, então, ser aplicadas para determinar as estratégias ótimas para os dois jogadores. Se o jogo não for estritamente determinado, calculamos primeiro a compensação esperada com estratégias **p** e **q** quaisquer, obtendo

$$\begin{aligned} E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p}A\mathbf{q} &= [p_1 \quad p_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \\ &= a_{11} p_1 q_1 + a_{12} p_1 q_2 + a_{21} p_2 q_1 + a_{22} p_2 q_2 \end{aligned} \tag{9}$$

Como

$$p_1 + p_2 = 1 \quad \text{e} \quad q_1 + q_2 = 1 \tag{10}$$

podemos substituir $p_2 = 1 - p_1$ e $q_2 = 1 - q_1$ em (9) para obter

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1(1 - q_1) + a_{21}(1 - p_1)q_1 + a_{22}(1 - p_1)(1 - q_1) \tag{11}$$

Rearranjando os termos da Equação (11), podemos escrever

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = [(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})p_1 - (a_{22} - a_{21})]q_1 + (a_{12} - a_{22})p_1 + a_{22} \tag{12}$$

Examinando os coeficientes do termo com q_1 em (12), vemos que colocando

$$p_1 = p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \tag{13}$$

esse coeficiente resulta ser zero e (12) reduz-se a

$$E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \tag{14}$$

A Equação (14) é independente de **q**, ou seja, se o jogador L escolher a estratégia determinada por (13), o jogador C não poderá modificar a compensação esperada por uma variação de sua estratégia.

Analogamente, pode ser verificado que se o jogador C escolher a estratégia determinada por

$$q_1 = q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \tag{15}$$

então, substituindo em (12), obtemos

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \tag{16}$$

As Equações (14) e (16) mostram que

$$E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) = E(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = E(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) \tag{17}$$

quaisquer que sejam as estratégias **p** e **q**. Assim, as estratégias determinadas por (13), (15) e (10) são estratégias ótimas para os jogadores L e C, respectivamente, e obtemos o resultado seguinte.

TEOREMA 10.7.2 Estratégias ótimas para jogos de matrizes 2 × 2

Num jogo 2×2 *que não seja estritamente determinado,*

$$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} & \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \\ \dfrac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{bmatrix}$$

são estratégias ótimas para os jogadores L e C. O valor do jogo é

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Para sermos completos, precisamos mostrar que as entradas nos vetores **p*** e **q*** são números estritamente entre 0 e 1. No Exercício 8, pedimos ao leitor mostrar que esse é o caso, pelo menos sempre que o jogo não for estritamente determinado.

A Equação (17) é interessante, pois implica que cada um dos jogadores, escolhendo sua estratégia ótima, pode forçar o valor do jogo a ser a compensação esperada, independentemente de qual estratégia for escolhida pelo outro jogador. No entanto, isso não é válido nos jogos em que cada jogador tenha mais de dois movimentos.

▶ EXEMPLO 3 Usando o Teorema 10.7.2

O governo federal deseja vacinar seus cidadãos contra um certo vírus de gripe. O vírus tem dois sorotipos, mas é desconhecida a proporção na qual os dois sorotipos ocorrem na população do vírus. Foram desenvolvidas duas vacinas. A eficácia da vacina 1 é de 85% contra o sorotipo 1 e de 70% contra o sorotipo 2. A eficácia da vacina 2 é de 60% contra o sorotipo 1 e de 90% contra o sorotipo 2. Qual política de vacinação deveria ser adotada pelo governo?

Solução Podemos considerar isso um jogo de duas pessoas no qual o jogador L (o governo) deseja fazer a maior compensação (a fração dos cidadãos resistentes ao vírus) possível e o jogador C (o vírus) deseja fazer a menor compensação possível. A matriz de compensação é

		Sorotipo 1	Sorotipo 2
Vacina	1	0,85	0,70
	2	0,60	0,90

Essa matriz não tem pontos de sela, de modo que podemos aplicar o Teorema 10.7.2. Consequentemente,

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{0{,}90 - 0{,}60}{0{,}85 + 0{,}90 - 0{,}70 - 0{,}60} = \frac{0{,}30}{0{,}45} = \frac{2}{3}$$

$$p_2^* = 1 - p_1^* = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{0{,}90 - 0{,}70}{0{,}85 + 0{,}90 - 0{,}70 - 0{,}60} = \frac{0{,}20}{0{,}45} = \frac{4}{9}$$

$$q_2^* = 1 - q_1^* = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{(0{,}85)(0{,}90) - (0{,}70)\,(0{,}60)}{0{,}85 + 0{,}90 - 0{,}70 - 0{,}60} = \frac{0{,}345}{0{,}45} = 0{,}7666\ldots$$

Assim, a estratégia ótima para o governo é inocular $\frac{2}{3}$ dos cidadãos com a vacina 1 e $\frac{1}{3}$ dos cidadãos com a vacina 2. Isso vai garantir que cerca do 76,7% dos cidadãos resistirá a um ataque do vírus, independentemente da distribuição dos dois sorotipos do vírus.

Observe que uma distribuição de $\frac{4}{9}$ do sorotipo 1 e de $\frac{5}{9}$ do sorotipo 2 do vírus resultará nos mesmos 76,7% de cidadãos resistentes, independentemente da política de vacinação adotada pelo governo (ver Exercício 7). ◀

Conjunto de exercícios 10.7

1. Suponha que um jogo tenha uma matriz de compensação

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -4 & 1 \\ 5 & -7 & 3 & 8 \\ -8 & 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) Se os jogadores L e C usarem as estratégias

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

respectivamente, qual será a compensação esperada do jogo?

(b) Se o jogador C mantiver a sua estratégia fixada como na parte (a), qual deveria ser a estratégia escolhida pelo jogador L para maximizar sua compensação esperada?

(c) Se o jogador L mantiver a sua estratégia fixada como na parte (a), qual deveria ser a estratégia escolhida pelo jogador C para minimizar a compensação esperada para o jogador L?

2. Construa um exemplo simples para mostrar que as estratégias ótimas não são necessariamente únicas. Por exemplo, encontre uma matriz de compensação com vários pontos de sela iguais.

3. Em cada parte, encontre estratégias ótimas para os dois jogadores e o valor do jogo estritamente determinado com a matriz de compensação dada.

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & -5 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

4. Em cada parte, encontre estratégias ótimas para os dois jogadores e o valor do jogo 2×2 com a matriz de compensação dada.

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 40 & 20 \\ -10 & 30 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

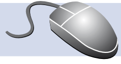
(d) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

5. O jogador L tem duas cartas de baralho: um ás preto e um quatro vermelho. O jogador C também tem duas cartas: um dois preto e um três vermelho. Cada jogador seleciona, secretamente, uma de suas cartas. Se ambas cartas selecionadas forem de mesma cor, o jogador C paga ao jogador L a soma dos valores numéricos das cartas em dinheiro. Se as cartas forem de cores diferentes, o jogador L paga ao jogador C a soma dos valores numéricos das cartas. Quais são as estratégias ótimas para os dois jogadores e qual é o valor do jogo?

6. Verifique as Equações (6), (7) e (8).

7. Verifique a afirmação no último parágrafo do Exemplo 3.

8. Mostre que as entradas das estratégias ótimas $\mathbf{p}^*$ e $\mathbf{q}^*$ dadas no Teorema 10.7.2 são números estritamente entre 0 e 1.



Seção 10.7 Exercícios com tecnologia

Os exercícios seguintes foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, esse recurso é MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser algum outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidades de Álgebra Linear. Em cada exercício, você deverá ler a documentação pertinente do recurso particular que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você estará capacitado a usar seu recurso computacional para resolver muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Considere um jogo entre dois jogadores, no qual cada jogador pode fazer até n movimentos diferentes ($n > 1$). Se o i-ésimo movimento do jogador L e o j-ésimo movimento do jogador C forem tais que $i + j$ é par, então C paga a L a quantia de \$1. Se $i + j$ for ímpar, então L paga a C a quantia de \$1. Suponha que ambos jogadores têm a mesma estratégia, ou seja, $\mathbf{p}_n = [\rho_i]_{1\times n}$ e $\mathbf{q}_n = [\rho_i]_{1\times n}$, sendo $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \cdots + \rho_n = 1$. Use um computador para mostrar que

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) &= (p_1 - p_2)^2 \\
E(\mathbf{p}_3, \mathbf{q}_3) &= (p_1 - p_2 + p_3)^2 \\
E(\mathbf{p}_4, \mathbf{q}_4) &= (p_1 - p_2 + p_3 - p_4)^2 \\
E(\mathbf{p}_5, \mathbf{q}_5) &= (p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + p_5)^2
\end{aligned}$$

Usando esses resultados como guia, prove que, em geral, a compensação esperada para o jogador L é

$$E(\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} p_j\right)^2 \geq 0$$

o que mostra que, a longo termo, o jogador L *não vai perder* esse jogo.

T2. Considere um jogo entre dois jogadores, no qual cada jogador pode fazer até n movimentos diferentes ($n > 1$). Se ambos os jogadores fizerem o mesmo movimento, então C pagará a L a quantia de \$$(n - 1)$. No entanto, se os dois jogadores fizerem movimentos distintos, então L pagará a C a quantia de \$1. Suponha que ambos jogadores têm a mesma estratégia, ou seja, $\mathbf{p}_n = [\rho_i]_{1\times n}$ e $\mathbf{q}_n = [\rho_i]_{1\times n}$, sendo $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \cdots + \rho_n = 1$. Use um computador para mostrar que

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2) &= \tfrac{1}{2}(p_1 - p_1)^2 + \tfrac{1}{2}(p_1 - p_2)^2 + \tfrac{1}{2}(p_2 - p_1)^2 \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(\rho_2 - \rho_2)^2 \\
E(\mathbf{p}_3, \mathbf{q}_3) &= \tfrac{1}{2}(p_1 - p_1)^2 + \tfrac{1}{2}(p_1 - p_2)^2 + \tfrac{1}{2}(p_1 - p_3)^2 \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(p_2 - p_1)^2 + \tfrac{1}{2}(p_2 - p_2)^2 + \tfrac{1}{2}(p_2 - p_3)^2 \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(p_3 - p_1)^2 + \tfrac{1}{2}(p_3 - p_2)^2 + \tfrac{1}{2}(p_3 - p_3)^2 \\
E(\mathbf{p}_4, \mathbf{q}_4) &= \tfrac{1}{2}(p_1 - p_1)^2 + \tfrac{1}{2}(p_1 - p_2)^2 + \tfrac{1}{2}(p_1 - p_3)^2 \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(p_1 - p_4)^2 + \tfrac{1}{2}(p_2 - p_1)^2 + \tfrac{1}{2}(p_2 - p_2)^2 \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(p_2 - p_3)^2 + \tfrac{1}{2}(p_2 - p_4)^2 + \tfrac{1}{2}(p_3 - p_1)^2 \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(p_3 - p_2)^2 + \tfrac{1}{2}(p_3 - p_3)^2 + \tfrac{1}{2}(p_3 - p_4)^2 \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(p_4 - p_1)^2 + \tfrac{1}{2}(p_4 - p_2)^2 + \tfrac{1}{2}(p_4 - p_3)^2 \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(p_4 - p_4)^2
\end{aligned}$$

Usando esses resultados como guia, prove que, em geral, a compensação esperada para o jogador L é

$$E(\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(p_i - p_j)^2 \geq 0$$

o que mostra que, a longo termo, o jogador L *não vai perder* esse jogo.

10.8 Modelos econômicos de Leontief

Nesta seção, discutimos dois modelos lineares para sistemas econômicos. Alguns resultados sobre matrizes não negativas são aplicados para determinar as estruturas de preços de equilíbrio e a produção necessária para satisfazer a demanda.

PRÉ-REQUISITOS: Sistemas lineares
Matrizes

Sistemas econômicos

A teoria das matrizes tem tido muito sucesso na descrição da inter-relação de preços, produção e demanda em sistemas econômicos. Nesta seção, discutimos alguns modelos simples baseados nas ideias do prêmio Nobel Wassily Leontief. Examinamos dois modelos diferentes, mas relacionados: o modelo fechado, ou modelo *input-output*, e o modelo aberto, ou modelo de produção. Em cada um, são dados certos parâmetros que descrevem as inter-relações entre as "indústrias" do modelo econômico sob consideração. Usando teoria de matrizes, poderemos, então, calcular alguns outros parâmetros, tais como os preços e níveis de produção, para satisfazer um objetivo econômico desejado. Começamos com o modelo fechado.

O modelo fechado (de input-output) de Leontief

Inicialmente apresentamos um exemplo simples e, depois, prosseguimos para a teoria geral desse modelo.

▶ EXEMPLO 1 Um modelo de *input-output*

Três proprietários de casas, um pedreiro, um eletricista e um hidráulico, pretendem fazer consertos em suas três casas. Eles concordam em trabalhar um total de 10 dias cada de acordo com a tabela seguinte.

	Trabalho executado pelo		
	Pedreiro	**Eletricista**	**Hidráulico**
Dias de trabalho na casa do pedreiro	2	1	6
Dias de trabalho na casa do eletricista	4	5	1
Dias de trabalho na casa do hidráulico	4	4	3

Para efeitos de impostos, eles devem declarar e pagar um ao outro um salário diário razoável, mesmo para o trabalho que cada um faz em sua própria casa. Seus salários diários normais são de aproximadamente \$100, mas eles concordam em ajustar seus respectivos salários diários de tal modo que saiam empatados, ou seja, de tal modo que o total que cada um paga seja igual ao total recebido. Podemos colocar

$$p_1 = \text{salário diário do pedreiro}$$
$$p_2 = \text{salário diário do eletricista}$$
$$p_3 = \text{salário diário do hidráulico}$$

Para satisfazer a condição de "equilíbrio" de que saiam empatados, exigimos que

$$\text{total dos gastos} = \text{total do recebido}$$

para cada um dos proprietários pelo período de dez dias. Por exemplo, o pedreiro paga um total de $2p_1 + p_2 + 6p_3$ pelos consertos em sua própria casa e recebe um total de $10p_1$ pelos consertos que faz em todas as três casas. Igualando essas duas expressões, obtemos a primeira das três equações seguintes.

$$\begin{aligned} 2p_1 + p_2 + 6p_3 &= 10p_1 \\ 4p_1 + 5p_2 + p_3 &= 10p_2 \\ 4p_1 + 4p_2 + 3p_3 &= 10p_3 \end{aligned}$$

As duas outras equações são as equações de equilíbrio do eletricista e do hidráulico. Dividindo essas equações por 10 e reescrevendo-as em formato matricial, obtemos

$$\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Subtraindo o lado esquerdo do direito, podemos reescrever a Equação (1) como

$$\begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 & -0{,}6 \\ -0{,}4 & 0{,}5 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & -0{,}4 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução desse sistema homogêneo é (verifique)

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 31 \\ 32 \\ 36 \end{bmatrix}$$

onde s é uma constante arbitrária. Essa constante é um fator de escala, que os proprietários podem escolher de acordo com sua conveniência. Por exemplo, podem colocar $s = 3$, de modo que os correspondentes salários diários, a saber, \$93, \$96 e \$108, sejam aproximadamente \$100. ◀

Esse exemplo ilustra as principais características do modelo de *input-output* de Leontief. Na Equação (1) fundamental, a soma de cada coluna da matriz de coeficientes é 1, correspondendo ao fato de que o produto (o "*output*") do trabalho de cada um dos proprietários está completamente distribuído entre esses mesmos proprietários nas proporções dadas pelas entradas da coluna. Nosso problema é determinar "preços" convenientes para esses trabalhos de modo a colocar esse sistema em equilíbrio, ou seja, de tal modo que o gasto total de cada proprietário seja igual ao total recebido em salário.

No modelo geral, temos um sistema econômico consistindo num número finito de "indústrias" que identificamos pelos números $1, 2, 3, \ldots, k$. Ao longo de algum período fixado de tempo, cada indústria produz um produto, que pode ser algum bem ou serviço, que é completamente utilizado de uma maneira predeterminada pelas k indústrias. Um problema importante é encontrar "preços" convenientes que devem ser cobrados por esses k produtos de tal maneira que, para cada indústria, o total dos gastos se iguale ao total recebido. Uma tal estrutura de preços representa uma posição de equilíbrio para a economia.

Para o período fixado de tempo dado, escrevemos

p_i = preço cobrado pela i-ésima indústria pela sua produção total

e_{ij} = fração da produção total da j-ésima indústria que é comprada pela i-ésima indústria

com $i, j = 1, 2, 3, \ldots, k$. Por definição, temos

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & p_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, k \\ \text{(ii)} & e_{ij} \geq 0, & i, j = 1, 2, \ldots, k \\ \text{(iii)} & e_{1j} + e_{2j} + \cdots + e_{kj} = 1, & j = 1, 2, \ldots, k \end{array}$$

Com essas quantidades, formamos o ***vetor preço***

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix}$$

e a ***matriz de troca*** ou a ***matriz de input-output***

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1k} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{k1} & e_{k2} & \cdots & e_{kk} \end{bmatrix}$$

A condição (iii) expressa o fato de que todas as somas de colunas da matriz de troca são iguais a 1.

Como no exemplo, para que os gastos das indústrias igualem seus rendimentos, a equação matricial seguinte deve ser satisfeita [ver (1)].

$$E\mathbf{p} = \mathbf{p} \tag{2}$$

ou

$$(I - E)\mathbf{p} = \mathbf{0} \tag{3}$$

A Equação (3) é um sistema linear homogêneo para o vetor preço **p**. Esse sistema tem uma solução não trivial se, e só se, o determinante da matriz de coeficientes $I - E$ for zero. No Exercício 7, pedimos ao leitor mostrar que isso ocorre com qualquer matriz de troca. Assim, (3) sempre tem soluções não triviais para o vetor preço **p**.

Na realidade, para o nosso sistema econômico fazer sentido, precisamos de mais do que simplesmente o fato de (3) possuir soluções não triviais para **p**. Também precisamos que os preços p_i dos k produtos sejam números não negativos. Essa condição é expressa por $\mathbf{p} \geq 0$. (Em geral, se A for qualquer vetor ou matriz, a notação $A \geq 0$ significa que cada entrada de A é não negativa, e a notação $A > 0$ significa que cada entrada de A é positiva. De maneira análoga, $A \geq B$ significa $A - B \geq 0$ e $A > B$ significa $A - B > 0$.) Mostrar que (3) tem uma solução não trivial com a qual $\mathbf{p} \geq 0$ é um pouco mais difícil do que simplesmente mostrar que existem soluções não triviais. No entanto, isso é válido e, no próximo teorema, enunciamos esse fato sem dar a prova.

TEOREMA 10.8.1 *Se E for uma matriz de troca, então $E\mathbf{p} = \mathbf{p}$ sempre tem uma solução não trivial* **p** *cujas entradas são não negativas.*

Consideremos alguns exemplos elementares desse teorema.

▶ EXEMPLO 2 Usando o Teorema 10.8.1

Seja

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Então $(I - E)\mathbf{p} = \mathbf{0}$ é

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que tem a solução geral

$$\mathbf{p} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

em que s é uma constante arbitrária. Dado qualquer $s > 0$, temos uma solução não trivial $\mathbf{p} \geq 0$.

▶ EXEMPLO 3 Usando o Teorema 10.8.1

Seja

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então $(I - E)\mathbf{p} = \mathbf{0}$ tem a solução geral

$$\mathbf{p} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

em que s e t são constantes arbitrárias independentes. Dados quaisquer $s \geq 0$ e $t \geq 0$, não ambos nulos, temos soluções não triviais $\mathbf{p} \geq 0$. ◀

O Exemplo 2 indica que, em algumas situações, um dos preços precisa ser zero para a condição de equilíbrio ser satisfeita. O Exemplo 3 indica que pode haver várias estruturas disponíveis de preço linearmente independentes. Nenhuma dessas situações descreve uma estrutura econômica realmente interdependente. O teorema a seguir dá condições suficientes para excluir ambos os casos.

TEOREMA 10.8.2 *Seja E uma matriz de troca tal que todas as entradas de E^m sejam positivas, com algum inteiro positivo m. Então existe exatamente uma solução linearmente independente de $(I - E)\mathbf{p} = \mathbf{0}$, e ela pode ser escolhida com todas suas entradas positivas.*

Não daremos uma prova desse teorema. O leitor que leu a Seção 10.5, sobre cadeias de Markov, pode observar que esse teorema é, essencialmente, igual ao Teorema 10.5.4. As matrizes de troca desta seção são matrizes estocásticas, ou de Markov, na Seção 10.5.

▶ EXEMPLO 4 Usando o Teorema 10.8.2

A matriz de troca do Exemplo 1 foi

$$E = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

Como $E > 0$, a condição $E^m > 0$ do Teorema 10.8.2 está satisfeita com $m = 1$. Por consequência, temos a garantia de que existe exatamente uma solução linearmente independente de $(I - E)\mathbf{p} = \mathbf{0}$ que pode ser escolhida tal que $\mathbf{p} > 0$. Naquele exemplo, vimos que

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 31 \\ 32 \\ 36 \end{bmatrix}$$

é uma tal solução. ◀

O modelo aberto (de produção) de Leontief

Ao contrário do modelo fechado, no qual os produtos de k indústrias são somente distribuídos entre as próprias indústrias, o modelo aberto tenta satisfazer uma demanda externa para os produtos. Uma porção dessa produção ainda pode ser distribuída entre as próprias indústrias, para mantê-las operacionais, mas deve haver algum excesso, alguma produção líquida, com a qual possa ser satisfeita a demanda externa. No modelo fechado, a produção das indústrias é fixada, e nosso objetivo é determinar seu preço de modo que seja satisfeita a condição de equilíbrio, na qual gastos igualam ganhos. No modelo aberto, são os preços que são fixados, e nosso objetivo é determinar os níveis de produção das indústrias necessários para satisfazer a demanda externa. Medimos os níveis de produção em termos dos seus valores econômicos usando os preços fixos. Mais precisamente, dado algum período fixado de tempo, escrevemos

x_i = valor monetário da produção total da i-ésima indústria

d_i = valor monetário da produção da i-ésima indústria necessária para satisfazer a demanda externa

c_{ij} = valor monetário da produção da i-ésima indústria que é necessária para a j-ésima indústria produzir uma unidade do valor monetário de seu próprio produto

Com essas quantidades, definimos o ***vetor produção***

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

o ***vetor demanda***

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix}$$

e a ***matriz de consumo***

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{bmatrix}$$

Pela sua própria natureza, temos

$$\mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{d} \geq 0 \quad \text{e} \quad C \geq 0$$

A partir da definição de c_{ij} e de x_j, pode ser visto que a quantidade

$$c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{ik}x_k$$

é o valor da produção da i-ésima indústria que é necessária para todas as k indústrias produzirem um total especificado pelo vetor de produção $\mathbf{x}$. Como essa quantidade é simplesmente a i-ésima entrada do vetor coluna $C\mathbf{x}$, podemos dizer, além disso, que a i-ésima entrada do vetor coluna

$$\mathbf{x} - C\mathbf{x}$$

é o valor do excesso de produção da i-ésima indústria que está disponível para satisfazer a demanda externa. O valor da demanda externa pelo produto da i-ésima indústria é a i--ésima entrada do vetor demanda $\mathbf{d}$. Consequentemente, somos levados à equação

$$\mathbf{x} - C\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

ou

$$(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d} \tag{4}$$

para a demanda ser satisfeita exatamente, sem sobras nem faltas. Assim, dados C e $\mathbf{d}$, nosso objetivo é encontrar um vetor produção $\mathbf{x} \geq 0$ que satisfaça a Equação (4).

► EXEMPLO 5 Vetor produção de uma cidade

Certa cidade tem três indústrias principais: uma mina de carvão, uma usina elétrica e uma rede ferroviária local. Para produzir \$1 de carvão, a mina precisa comprar \$0,25 de eletricidade para seu equipamento e \$0,25 da ferrovia para suas necessidades de transporte. Para produzir \$1 de eletricidade, a usina requer \$0,65 de carvão para combustível, \$0,05 de sua própria eletricidade para equipamento auxiliar e \$0,05 da ferrovia para suas necessidades de transporte. Para fornecer \$1 de transporte, a rede ferroviária precisa de \$0,55 de carvão para combustível e \$0,10 de eletricidade para seu equipamento auxiliar. Certa semana, a mina recebe pedidos de \$50.000 de carvão de fora da cidade e a usina recebe pedidos de \$25.000 de eletricidade de fora da cidade. Não há demanda externa para a ferrovia. Quanto cada uma dessas três indústrias deve produzir nessa semana para atender exatamente suas próprias demandas e a demanda externa?

Solução Para o período da semana em questão, sejam

x_1 = valor da produção total da mina

x_2 = valor da produção total da usina

x_3 = valor da produção total da ferrovia

Pela informação fornecida, a matriz de consumo do sistema é

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}65 & 0{,}55 \\ 0{,}25 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}25 & 0{,}05 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema linear $(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d}$ é, então,

$$\begin{bmatrix} 1{,}00 & -0{,}65 & -0{,}55 \\ -0{,}25 & 0{,}95 & -0{,}10 \\ -0{,}25 & -0{,}05 & 1{,}00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 25.000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de coeficientes à esquerda é invertível e a solução é dada por

$$\mathbf{x} = (I - C)^{-1}\mathbf{d} = \frac{1}{503} \begin{bmatrix} 756 & 542 & 470 \\ 220 & 690 & 190 \\ 200 & 170 & 630 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50.000 \\ 25.000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102.087 \\ 56.163 \\ 28.330 \end{bmatrix}$$

Assim, a produção total da mina deveria ser \$102.087, a produção total da usina deveria ser \$56.163 e a produção total da ferrovia deveria ser \$28.330. ◀

Reconsideremos a Equação (4):

$$(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

Se a matriz quadrada $I - C$ for invertível, poderemos escrever

$$\mathbf{x} = (I - C)^{-1}\mathbf{d} \tag{5}$$

Além disso, se a matriz $(I - C)^{-1}$ tiver somente entradas não negativas, então teremos certeza de que a Equação (5) terá uma única solução não negativa $\mathbf{x}$, qualquer que seja $\mathbf{d} \geq 0$. Essa é uma situação particularmente desejável, por significar que qualquer demanda externa pode ser satisfeita. A terminologia utilizada para descrever esse caso é dada na definição seguinte.

DEFINIÇÃO 1 Dizemos que uma matriz de consumo C é ***produtiva*** se existir $(I - C)^{-1}$ e valer

$$(I - C)^{-1} \geq 0$$

Consideremos alguns critérios simples que garantem que uma matriz de consumo seja produtiva. O primeiro é dado no teorema seguinte.

TEOREMA 10.8.3 Matriz de consumo produtiva

Uma matriz de consumo C é produtiva se, e só se, existe um vetor produção $\mathbf{x} \geq 0$ tal que $\mathbf{x} \geq C\mathbf{x}$.

(A prova está delineada no Exercício 9.) A condição $\mathbf{x} \geq C\mathbf{x}$ significa que existe alguma tabela de produção possível tal que cada indústria produza mais do que consome.

O Teorema 10.8.3 tem dois corolários interessantes. Suponha que todas as somas das entradas de linhas de C sejam menores do que 1. Se

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

então $C\mathbf{x}$ é um vetor coluna cujas entradas são essas somas de linhas. Isso significa que $\mathbf{x} > C\mathbf{x}$ e, portanto, a condição do teorema está satisfeita. Assim, chegamos ao corolário a seguir.

COROLÁRIO 10.8.4 *Uma matriz de consumo C é produtiva se a soma das entradas de cada linha de C for menor do que* 1.

No Exercício 8, pedimos ao leitor mostrar que esse corolário leva ao seguinte.

COROLÁRIO 10.8.5 *Uma matriz de consumo C é produtiva se a soma das entradas de cada coluna de C for menor do que* 1.

Lembrando da definição das entradas da matriz de consumo C, vemos que a soma das entradas da j-ésima coluna de C é o valor total da produção de todas as k indústrias que é necessária para produzir uma unidade de valor do produto da j-ésima indústria. A j-ésima indústria, portanto, é dita ***lucrativa*** se essa soma da j-ésima coluna for menor do que 1. Em outras palavras, o Corolário 10.8.5 diz que uma matriz de consumo é produtiva se todas as k indústrias do sistema econômico forem lucrativas.

▶ EXEMPLO 6 Usando o Corolário 10.8.5

A matriz de consumo do Exemplo 5 foi

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}65 & 0{,}55 \\ 0{,}25 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}25 & 0{,}05 & 0 \end{bmatrix}$$

As somas das três colunas dessa matriz são todas menores do que 1 e, portanto, as três indústrias são lucrativas. Consequentemente, pelo Corolário 10.8.5, a matriz de consumo C é produtiva. Isso também pode ser visto pelas contas no Exemplo 5, já que $(I - C)^{-1}$ é não negativa. ◀

Conjunto de exercícios 10.8

1. Em cada parte, encontre vetores preço não negativos que satisfaçam a condição de equilíbrio (3) com a matriz de troca dada.

(a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0{,}35 & 0{,}50 & 0{,}30 \\ 0{,}25 & 0{,}20 & 0{,}30 \\ 0{,}40 & 0{,}30 & 0{,}40 \end{bmatrix}$

2. Em cada parte, mostre que a matriz de consumo é produtiva usando o Teorema 10.8.3 e seus corolários.

(a) $\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0{,}70 & 0{,}30 & 0{,}25 \\ 0{,}20 & 0{,}40 & 0{,}25 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}25 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{bmatrix}$

3. Usando o Teorema 10.8.2, mostre que existe somente um vetor preço linearmente independente para o sistema econômico fechado dado pela matriz de troca

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 1 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Três vizinhos têm hortas nos fundos de suas casas. O vizinho A planta tomates, o vizinho B planta milho e o vizinho C planta alface. Eles concordam em dividir a colheita entre eles como segue: A recebe $\frac{1}{2}$ dos tomates, $\frac{1}{3}$ do milho e $\frac{1}{4}$ da alface; B recebe $\frac{1}{3}$ dos tomates, $\frac{1}{3}$ do milho e $\frac{1}{4}$ da alface; C recebe $\frac{1}{6}$ dos tomates, $\frac{1}{3}$ do milho e $\frac{1}{2}$ da alface. Que preços os vizinhos devem dar às suas respectivas colheitas para satisfazer a condição de equilíbrio de uma economia fechada se a colheita de menor preço deve ter um preço de \$100?

5. Três engenheiros, um engenheiro civil (EC), um elétrico (EE) e um mecânico (EM) têm, cada um, uma firma de consultoria. A consultoria que prestam é de natureza multidisciplinar, de modo que cada um compra uma parte do serviço das outras

duas firmas. Para cada \$1 de consultoria feita pelo EC, ele compra \$0,10 de serviços do EE e \$0,30 de serviços do EM. Para cada \$1 de consultoria feita pelo EE, ele compra \$0,20 de serviços do EC e \$0,40 de serviços do EM. Finalmente, para cada \$1 de consultoria feita pelo EM, ele compra \$0,30 de serviços do EC e \$0,40 de serviços do EE. Certa semana, o EC recebe pedidos de consultoria externa de \$500, o EE recebe pedidos de consultoria externa de \$700 e o EM recebe pedidos de consultoria externa de \$600. Qual é o valor da consultoria de cada engenheiro nessa semana?

6. (a) Suponha que a demanda d_i para a produção da i-ésima indústria cresça uma unidade. Explique por que a i-ésima coluna da matriz $(I - C)^{-1}$ é o acréscimo que deve ser dado ao vetor produção $\mathbf{x}$ para satisfazer a demanda adicional.

(b) Voltando ao Exemplo 5, use o resultado da parte (a) para determinar o acréscimo que deve ser dado ao valor da produção da mina de carvão para satisfazer a demanda de uma unidade adicional no valor da produção da usina elétrica.

7. Usando o fato que as somas das entradas de coluna de uma matriz de troca E são todas 1, mostre que as somas de $I - E$ são 0. A partir disso, mostre que $I - E$ tem determinante zero e que, portanto, $(I - E)\mathbf{p} = \mathbf{0}$ tem soluções não triviais $\mathbf{p}$.

8. Mostre que o Corolário 10.8.5 segue do Corolário 10.8.4. [*Sugestão*: lembre que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, qualquer que seja a matriz invertível A.]

9. (***Requer Cálculo***) Prove o Teorema 10.8.3 como segue.

(a) Prove a parte "só se" do teorema, ou seja, mostre que se C for uma matriz de consumo produtiva, então existe um vetor $\mathbf{x} \geq 0$ tal que $\mathbf{x} > C\mathbf{x}$.

(b) Prove a parte "se" do teorema como segue.

Passo 1. Mostre que se existir algum vetor $\mathbf{x}^* \geq 0$ tal que $C\mathbf{x}^* < \mathbf{x}^*$, então $\mathbf{x}^* > 0$.

Passo 2. Mostre que, existe algum número λ tal que $0 < \lambda < 1$ e $C\mathbf{x}^* < \lambda\mathbf{x}^*$.

Passo 3. Mostre que $C^n\mathbf{x}^* < \lambda^n\mathbf{x}^*$ com $n = 1, 2, \ldots$.

Passo 4. Mostre que $C^n \to 0$ se $n \to \infty$.

Passo 5. Expandindo o produto, mostre que

$$(I - C)(I + C + C^2 + \cdots + C^{n-1}) = I - C^n$$

com $n = 1, 2, \ldots$.

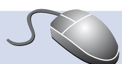
Passo 6. Fazendo $n \to \infty$ no Passo 5, mostre que existe a soma infinita de matrizes

$$S = I + C + C^2 + \cdots$$

e que $(I - C)S = I$.

Passo 7. Mostre que $S \geq 0$ e que $S = (I - C)^{-1}$.

Passo 8. Mostre que C é uma matriz de consumo produtiva.



Seção 10.8 Exercícios com tecnologia

Os exercícios seguintes foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, esse recurso é MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser algum outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidades de Álgebra Linear. Em cada exercício, você deverá ler a documentação pertinente do recurso particular que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você estará capacitado a usar seu recurso computacional para resolver muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Considere a sequência $\{E_2, E_3, E_4, E_5, \ldots, E_n\}$ de matrizes de troca, com

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \qquad E_5 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

e assim por diante. Use um computador para mostrar que $E_2^2 > 0_2$, $E_3^3 > 0_3$, $E_4^4 > 0_4$, $E_5^5 > 0_5$ e fazer a conjectura que, embora $E_n^n > 0_n$ seja verdadeiro, $E_n^k > 0_n$ não é verdadeiro se $k = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$. Em seguida, use um computador para determinar os vetores $\mathbf{p}_n$ tais que $E_n\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_n$ (com $n = 2, 3, 4, 5, 6$) e, depois, veja se você consegue descobrir um padrão que lhe permita calcular $\mathbf{p}_{n+1}$ facilmente a partir de $\mathbf{p}_n$. Teste sua descoberta, primeiro calculando $\mathbf{p}_8$ a partir de

$$\mathbf{p}_7 = \begin{bmatrix} 2.520 \\ 3.360 \\ 1.890 \\ 672 \\ 175 \\ 36 \\ 7 \end{bmatrix}$$

e, depois, verificando se $E_8\mathbf{p}_8 = \mathbf{p}_8$.

T2. Considere um modelo de produção aberto com n indústrias e $n > 1$. Para poder produzir \$1 de seu próprio produto, a j-ésima indústria precisa gastar $\$(1/n)$ com o produto da i-ésima indústria (qualquer $i \neq j$), mas a j-ésima indústria (com $j = 1, 2, 3, \ldots, n$) nada gasta com a produção do seu próprio produto. Construa a matriz de consumo C_n, mostre que é produtiva e

determine uma expressão para $(I_n - C_n)^{-1}$. Ao determinar uma expressão para $(I_n - C_n)^{-1}$, use um computador para estudar os casos $n = 2, 3, 4$ e 5 e, então, faça uma conjectura e prove sua validade. [*Sugestão*: se $F_n = [1]_{n\times n}$ (ou seja, a matriz $n \times n$ com todas as entradas iguais a 1), mostre primeiro que

$$F_n^2 = nF_n$$

e, depois, expresse sua resposta para $(I_n - C_n)^{-1}$ em termos de n, I_n e F_n.]

10.9 Administração florestal

Nesta seção, discutimos um modelo matricial para administrar uma floresta cujas árvores são agrupadas em classes de acordo com sua altura. Calculamos o rendimento sustentável ótimo de um corte periódico quando as árvores de diferentes classes de altura podem ter diferentes valores econômicos.

PRÉ-REQUISITO: Operações com matrizes

Rendimento sustentável ótimo

Nosso objetivo é introduzir um modelo simplificado para o corte sustentável de uma floresta cujas árvores são classificadas por altura. Supomos que a altura da árvore quando for cortada e vendida determina seu valor econômico. Inicialmente, há uma distribuição de árvores de várias alturas. Por um certo período de tempo, a floresta cresce livremente e, então, algumas das árvores, de tamanhos variados, são cortadas. As árvores restantes, que não foram cortadas, devem ter a mesma configuração de tamanho que as árvores da floresta original, de modo que o corte seja sustentável. Como veremos, existem muitos desses procedimentos de corte sustentável. O que queremos é encontrar um para o qual o valor econômico total de todas as árvores removidas seja o maior possível. Isso determina o ***rendimento sustentável ótimo*** da floresta e é o maior rendimento que pode ser obtido continuamente sem dizimar a floresta.

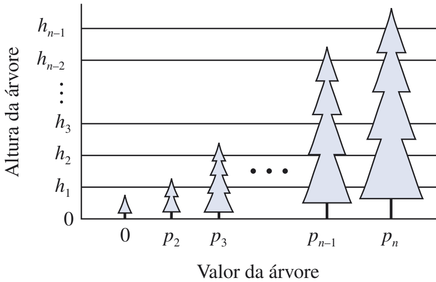
O modelo

Suponhamos que um plantador tenha uma floresta de pinheiros que são vendidos ano após ano como árvores de Natal. A cada dezembro, o plantador corta alguns dos pinheiros para vender. Para cada pinheiro cortado, é plantada uma muda em seu lugar. Desse modo, o número total de árvores na floresta é sempre o mesmo. (Nesse modelo simplificado, desconsideramos as árvores que morrem durante o ano. Também vamos supor que cada muda plantada sobrevive e cresce até ser cortada.)

Árvores de diferentes tamanhos têm valores econômicos diferentes no mercado natalino. Suponha que existam n classes distintas de preços, correspondendo a certos intervalos de altura, conforme mostram a Tabela 1 e a Figura 10.9.1. A primeira classe consiste em mudas com altura no intervalo $[0, h_1)$ e sem valor econômico. A enésima classe consiste em árvores com altura maior do que ou igual a h_{n-1}.

Tabela 1

Classe	Valor ($)	Intervalo de altura
1 (mudas)	Nenhum	$[0, h_1)$
2	p_2	$[h_1, h_2)$
3	p_3	$[h_2, h_3)$
⋮	⋮	⋮
$n-1$	p_{n-1}	$[h_{n-2}, h_{n-1})$
n	p_n	$[h_{n-1},)$



▲ **Figura 10.9.1**

Seja x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) o número de árvores na i-ésima classe que sobrevivem aos cortes. Formamos um vetor coluna com esses números, que denominamos ***vetor de não cortadas***.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Para uma política de corte sustentável, a floresta deve retornar à configuração fixada do vetor de não cortadas **x**. Parte do nosso problema é encontrar aqueles vetores de não cortadas **x** com os quais é possível um corte sustentável.

Como o número total de árvores da floresta permanece fixado, podemos colocar

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s \tag{1}$$

em que s fica predeterminado pelo tamanho da terra disponível e pelo espaço que cada árvore requer. Olhando para a Figura 10.9.2, temos a situação seguinte. Depois de cada corte, a configuração da floresta é dada pelo vetor **x**. Entre dois cortes, as árvores crescem e produzem uma nova configuração antes de cada novo corte. Um certo número de árvores é removido de cada classe quando ocorre o corte. Finalmente, uma muda é plantada no lugar de cada árvore removida para a floresta retornar à sua configuração original dada por **x**.

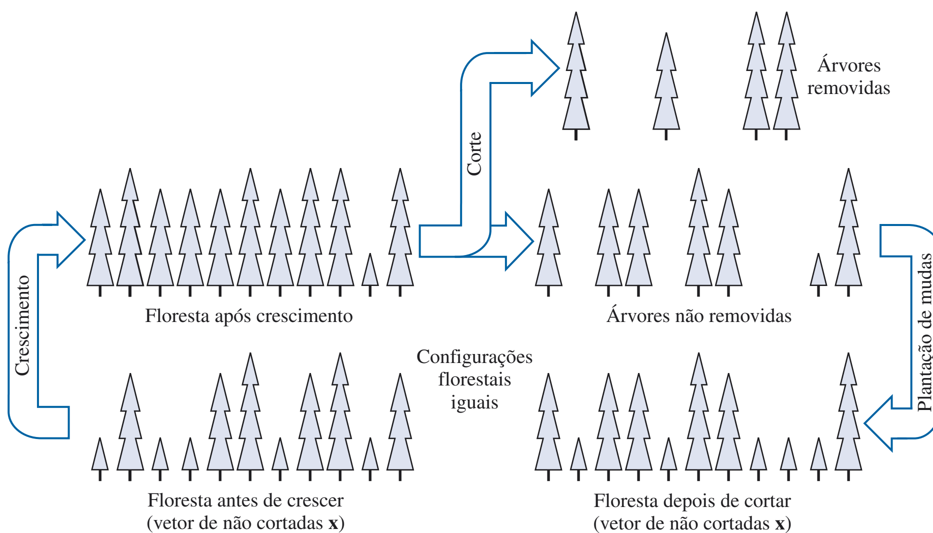


Figura 10.9.2

Inicialmente consideramos o crescimento da floresta entre os cortes anuais. Durante esse período, uma árvore da i-ésima classe pode crescer e passar a uma classe de maior altura, ou seu crescimento pode ser retardado por algum motivo e ela permanece em sua classe. Consequentemente, definimos o seguinte parâmetro de crescimento g_i com $i = 1, 2, \ldots, n - 1$:

g_i = a fração das árvores da i-ésima classe que crescem para a $(i + 1)$-ésima classe durante um período de crescimento

Por simplicidade, supomos que, durante um período de crescimento, uma árvore muda, no máximo, uma classe para cima. Com essa hipótese, temos

$1 - g_i$ = a fração das árvores da i-ésima classe que permanecem na i-ésima classe durante um período de crescimento

Com esses $n - 1$ parâmetros de crescimento, formamos a ***matriz de crescimento*** $n \times n$

$$G = \begin{bmatrix} 1-g_1 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ g_1 & 1-g_2 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & g_2 & 1-g_3 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-g_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Como as entradas do vetor **x** são os números de árvores nas n classes antes do período de crescimento, o leitor pode verificar que as entradas do vetor

$$G\mathbf{x} = \begin{bmatrix} (1-g_1)x_1 \\ g_1x_1 + (1-g_2)x_2 \\ g_2x_2 + (1-g_3)x_3 \\ \vdots \\ g_{n-2}x_{n-2} + (1-g_{n-1})x_{n-1} \\ g_{n-1}x_{n-1} + x_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

são os números de árvores nas n classes depois do período de crescimento.

Suponha que, durante o corte, sejam removidas ($i = 1, 2, \ldots, n$) árvores da i-ésima classe. Dizemos que o vetor coluna

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

é o ***vetor de cortadas***. Assim, um total de

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

árvores são removidas a cada corte. Esse número também é o total de árvores adicionadas à primeira classe (as novas mudas) depois de cada corte. Se definirmos a ***matriz de reposição*** $n \times n$ por

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

então o vetor coluna

$$R\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + \cdots + y_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

especificará a configuração de árvores plantadas depois de cada corte.

Agora estamos prontos para escrever as equações seguintes, que caracterizam uma política de corte sustentável.

$$\begin{bmatrix} \text{configuração no} \\ \text{final do período} \\ \text{de crescimento} \end{bmatrix} - [\text{corte}] + \begin{bmatrix} \text{reposição} \\ \text{de mudas} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{configuração no} \\ \text{início do período} \\ \text{de crescimento} \end{bmatrix}$$

ou, matematicamente,

$$G\mathbf{x} - \mathbf{y} + R\mathbf{y} = \mathbf{x}$$

Essa equação pode ser rescrita como

$$(I - R)\mathbf{y} = (G - I)\mathbf{x} \tag{6}$$

ou, mais compreensivelmente, como

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -g_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ g_1 & -g_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & -g_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -g_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Dizemos que a Equação (6) é a ***condição de corte sustentável***. Quaisquer vetores **x** e **y** com entradas não negativas, tais que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s$ que satisfazem essa equação matricial, determinam uma política de corte sustentável para a floresta. Note que se $y_1 > 0$, então o cortador está removendo mudas sem valor econômico e substituindo-as por mudas novas. Como isso não faz sentido, supomos que

$$y_1 = 0 \tag{7}$$

Com essa hipótese, pode ser verificado que (6) é o formato matricial do conjunto de equações seguinte.

$$\begin{aligned} y_2 + y_3 + \cdots + y_n &= g_1 x_1 \\ y_2 &= g_1 x_1 - g_2 x_2 \\ y_3 &= g_2 x_2 - g_3 x_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1} &= g_{n-2} x_{n-2} - g_{n-1} x_{n-1} \\ y_n &= g_{n-1} x_{n-1} \end{aligned} \tag{8}$$

Observe que a primeira equação em (8) é a soma das demais $n - 1$ equações.

Como devemos ter $y_i \geq 0$ com $i = 2, 3, \ldots, n$, as Equações (8) exigem que

$$g_1 x_1 \geq g_2 x_2 \geq \cdots \geq g_{n-1} x_{n-1} \geq 0 \tag{9}$$

Reciprocamente, se **x** for um vetor coluna com entradas não negativas que satisfaz a Equação (9), então (7) e (8) definem um vetor coluna **y** com entradas não negativas. Além disso, **x** e **y** satisfazem a condição de corte sustentável (6). Em outras palavras, uma condição necessária e suficiente para que um vetor coluna **x** determine uma configuração da floresta que permite um corte sustentável é que as entradas de **x** satisfaçam (9).

Rendimento sustentável ótimo

Como removemos y_i árvores da i-ésima classe ($i = 2, 3, \ldots, n$) e cada árvore na i-ésima classe tem valor econômico p_i, o rendimento total RT do corte é dado por

$$RT = p_2 y_2 + p_3 y_3 + \cdots + p_n y_n \tag{10}$$

Usando (8), podemos substituir os y_i em (10) e obter

$$RT = p_2 g_1 x_1 + (p_3 - p_2) g_2 x_2 + \cdots + (p_n - p_{n-1}) g_{n-1} x_{n-1} \tag{11}$$

Combinando (11), (1) e (9) podemos, agora, enunciar o problema de maximizar o rendimento da floresta sobre todas as possíveis políticas de corte sustentável como segue.

Problema Encontre números não negativos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que maximizem

$$RT = p_2 g_1 x_1 + (p_3 - p_2) g_2 x_2 + \cdots + (p_n - p_{n-1}) g_{n-1} x_{n-1}$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s$$

e

$$g_1 x_1 \geq g_2 x_2 \geq \cdots \geq g_{n-1} x_{n-1} \geq 0$$

Da maneira que foi formulado, esse problema pertence à área de Programação Linear. No entanto, vamos ilustrar o próximo resultado exibindo explicitamente uma política de corte sustentável, sem utilizar a teoria de Programação Linear.

TEOREMA 10.9.1 Rendimento sustentável ótimo

O rendimento sustentável ótimo é obtido cortando todas as árvores de uma classe de altura específica e nenhuma árvore de qualquer outra classe.

Inicialmente denotamos

RT_k = rendimento obtido cortando todas as árvores da k-ésima classe e nenhuma árvore das outras classes

O maior valor de RT_k com $k = 2, 3, \ldots, n$ será, então, o rendimento sustentável ótimo, e o correspondente valor de k será a classe que deveria ser completamente cortada para obter esse rendimento sustentável ótimo. Como nenhuma classe é cortada, exceto a k-ésima, temos

$$y_2 = y_3 = \cdots = y_{k-1} = y_{k+1} = \cdots = y_n = 0 \tag{12}$$

Além disso, como todas as árvores da k-ésima classe são cortadas, não restam árvores para cortar na k-ésima classe e nunca há árvores nas classes de altura acima da k-ésima classe. Assim,

$$x_k = x_{k+1} = \cdots = x_n = 0 \tag{13}$$

Substituindo (12) e (13) na condição de corte sustentável (8), obtemos

$$\begin{aligned}
y_k &= g_1 x_1 \\
0 &= g_1 x_1 - g_2 x_2 \\
0 &= g_2 x_2 - g_3 x_3 \\
&\vdots \\
0 &= g_{k-2} x_{k-2} - g_{k-1} x_{k-1} \\
y_k &= g_{k-1} x_{k-1}
\end{aligned} \tag{14}$$

As Equações (14) também podem ser escritas como

$$y_k = g_1 x_1 = g_2 x_2 = \cdots = g_{k-1} x_{k-1} \tag{15}$$

da qual segue que

$$\begin{aligned} x_2 &= g_1x_1/\, g_2 \\ x_3 &= g_1x_1\, /g_3 \\ &\vdots \\ x_{k-1} &= g_1x_1\, /g_{k-1} \end{aligned} \tag{16}$$

Substituindo as Equações (13) e (16) em

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s$$

[que é a Equação (1)], podemos resolver em x_1 e obter

$$x_1 = \frac{s}{1 + \dfrac{g_1}{g_2} + \dfrac{g_1}{g_3} + \cdots + \dfrac{g_1}{g_{k-1}}} \tag{17}$$

Para o rendimento RT_k , combinamos (10), (12), (15) e (17) para obter

$$\begin{aligned} RT_k &= p_2y_2 + p_3y_3 + \cdots + p_ny_n \\ &= p_ky_k \\ &= p_k\, g_1\, x_1 \\ &= \frac{p_ks}{\dfrac{1}{g_1} + \dfrac{1}{g_2} + \cdots + \dfrac{1}{g_{k-1}}} \end{aligned} \tag{18}$$

A Equação (18) determina RT_k em termos dos parâmetros econômicos e de crescimento conhecidos com quaisquer $k = 2, 3, \ldots, n$. Assim, o rendimento sustentável ótimo é obtido como segue.

TEOREMA 10.9.2 Encontrando o rendimento sustentável ótimo

O rendimento sustentável ótimo é o maior valor de

$$\frac{p_ks}{\dfrac{1}{g_1} + \dfrac{1}{g_2} + \cdots + \dfrac{1}{g_{k-1}}}$$

com $k = 2, 3, \ldots, n$. O correspondente valor de k é o número da classe que é completamente cortada.

No Exercício 4, pedimos para o leitor mostrar que o vetor de não cortadas $\mathbf{x}$ para o rendimento sustentável ótimo é

$$\mathbf{x} = \frac{s}{\dfrac{1}{g_1} + \dfrac{1}{g_2} + \cdots + \dfrac{1}{g_{k-1}}} \begin{bmatrix} 1/g_1 \\ 1/g_2 \\ \vdots \\ 1/g_{k-1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

O Teorema 10.9.2 implica que não é necessariamente a classe de árvores de maior preço que deve ser totalmente cortada. Os parâmetros de crescimento g_i também devem ser levados em conta para determinar o rendimento sustentável ótimo.

▶ **EXEMPLO 1 Usando o Teorema 10.9.2**

A matriz de crescimento seguinte refere-se a uma floresta de pinheiros escoceses na Escócia com período de crescimento de seis anos (ver M. B. Usher, "A Matrix Approach to the Management of Renewable Resources, with Special Reference to Selection Forests," *Journal of Applied Ecology*, Vol. 3, 1966, páginas 355-367).

$$G = \begin{bmatrix} 0{,}72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}28 & 0{,}69 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}31 & 0{,}75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0{,}77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}23 & 0{,}63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}37 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

Suponha que os preços das árvores nas cinco classes de maior altura sejam

$$p_2 = \$50, \quad p_3 = \$100, \quad p_4 = \$150, \quad p_5 = \$200, \quad p_6 = \$250$$

Qual classe deveria ser completamente cortada para obter o rendimento sustentável ótimo e qual é o rendimento?

Solução Da matriz G, obtemos

$$g_1 = 0{,}28, \quad g_2 = 0{,}31, \quad g_3 = 0{,}25, \quad g_4 = 0{,}23, \quad g_5 = 0{,}37$$

As Equações (18) fornecem então

$$\begin{aligned} RT_2 &= 50s/(0{,}28^{-1}) = 14{,}0s \\ RT_3 &= 100s/(0{,}28^{-1} + 0{,}31^{-1}) = 14{,}7s \\ RT_4 &= 150s/(0{,}28^{-1} + 0{,}31^{-1} + 0{,}25^{-1}) = 13{,}9s \\ RT_5 &= 200s/(0{,}28^{-1} + 0{,}31^{-1} + 0{,}25^{-1} + 0{,}23^{-1}) = 13{,}2s \\ RT_6 &= 250s/(0{,}28^{-1} + 0{,}31^{-1} + 0{,}25^{-1} + 0{,}23^{-1} + 0{,}37^{-1}) = 14{,}0s \end{aligned}$$

Vemos que RT_3 é a maior dessas cinco quantidades, de modo que, pelo Teorema 10.9.2, a terceira classe deveria ser completamente cortada a cada seis anos para maximizar o rendimento sustentável. O rendimento sustentável ótimo correspondente é \$14,7s, em que s é o número total de árvores na floresta. ◀

Conjunto de exercícios 10.9

1. Uma certa floresta é dividida em três classes de altura e a matriz de crescimento das árvores entre os cortes é dada por

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Se o preço das árvores da segunda classe for de \$30 e as da terceira classe, \$50, qual classe deveria ser totalmente cortada para obter o rendimento sustentável ótimo? Qual é o rendimento ótimo se houver 100 árvores na floresta?

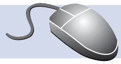
2. No Exemplo 1, a que nível deve subir o preço das árvores da quinta classe para que esta seja a que deve ser totalmente cortada para obter o rendimento sustentável ótimo?

3. No Exemplo 1, qual deve ser a razão $p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6$ entre os preços das árvores para que os rendimentos RT_k, com $k = 2$, 3, 4, 5, 6, sejam todos iguais? (Nesse caso, qualquer política de corte sustentável irá produzir o mesmo rendimento sustentável ótimo.)

4. Obtenha a Equação (19) para o vetor de não cortadas correspondente à política de corte sustentável ótima descrita no Teorema 10.9.2.

5. Quantas árvores são removidas da floresta em cada corte na política de corte sustentável ótima descrita no Teorema 10.9.2?

6. Se todos os parâmetros $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$ de crescimento da matriz de crescimento G forem iguais, qual deve ser a razão $p_2 : p_3 : \ldots : p_n$ entre os preços para que qualquer política de corte sustentável seja uma política de corte ótima? (Ver Exercício 3.)



Seção 10.9 Exercícios com tecnologia

Os exercícios seguintes foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, esse recurso é MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser algum outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidades de Álgebra Linear. Em cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso particular que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você estará capacitado a usar seu recurso computacional para resolver muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Uma certa floresta tem parâmetros de crescimento dados por

$$g_i = \frac{1}{i}$$

com $i = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$, onde n (o número total de classes de altura) pode ser escolhido como tão grande quanto necessário. Suponha que o valor de uma árvore no k-ésimo intervalo de altura seja dado por

$$p_k = a(k - 1)^\rho$$

em que a é uma constante (monetária) e ρ é um parâmetro satisfazendo $1 \leq \rho \leq 2$.

(a) Mostre que o rendimento RT_k é dado por

$$RT_k = \frac{2a(k-1)^{\rho-1}s}{k}$$

(b) Nos casos

$$\rho = 1{,}0;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}3;\ 1{,}4;\ 1{,}5;\ 1{,}6;\ 1{,}7;\ 1{,}8;\ 1{,}9$$

use um computador para determinar o número da classe que deveria ser completamente cortada e determine o rendimento sustentável ótimo em cada caso. Lembre que, em suas contas, k pode tomar somente valores inteiros.

(c) Repita as contas da parte (b) usando

$$\rho = 1{,}91;\ 1{,}92;\ 1{,}93;\ 1{,}94;\ 1{,}95;\ 1{,}96;\ 1{,}97;\ 1{,}98;\ 1{,}99$$

(d) Mostre que se $\rho = 2$, então o rendimento sustentável ótimo nunca pode ser maior do que $2as$.

(e) Compare os valores de k determinados nas partes (b) e (c) com $1/(2 - \rho)$ e use Cálculo para explicar por que

$$k \simeq \frac{1}{2-\rho}$$

T2. Uma certa floresta tem parâmetros de crescimento dados por

$$g_i = \frac{1}{2^i}$$

com $i = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$, onde n (o número total de classes de altura) pode ser escolhido tão grande quanto necessário. Suponha que o valor de uma árvore no k-ésimo intervalo de altura seja dado por

$$p_k = a(k - 1)^\rho$$

onde a é uma constante (monetária) e ρ é um parâmetro satisfazendo $1 \leq \rho$.

(a) Mostre que o rendimento RT_k é dado por

$$RT_k = \frac{a(k-1)^\rho s}{2^k - 2}$$

(b) Nos casos

$$\rho = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

use um computador para determinar o número da classe que deveria ser completamente cortada para obter um rendimento ótimo e determine o rendimento sustentável ótimo em cada caso. Lembre que, em suas contas, k pode tomar somente valores inteiros.

(c) Compare os valores de k determinados na parte (b) com $1 + \rho/\ln(2)$ e use Cálculo para explicar por que

$$k \simeq 1 + \frac{\rho}{\ln(2)}$$

10.10 Computação gráfica

Nesta seção, supomos que uma imagem de um objeto tridimensional seja exibida num monitor de vídeo e mostramos como a álgebra matricial pode ser usada para obter novas imagens do objeto por meio de rotação, translação e mudanças de escala.

PRÉ-REQUISITOS: Álgebra matricial
Geometria Analítica

Visualização de um objeto tridimensional

Queremos visualizar um objeto tridimensional mostrando num monitor de vídeo várias imagens desse objeto. O objeto que pretendemos mostrar é determinado por um número finito de segmentos de reta. Por exemplo, considere o tronco de pirâmide reta com base hexagonal ilustrado na Figura 10.10.1. Primeiro introduzimos um sistema de coordenadas

xyz no qual mergulhamos o objeto. Como na Figura 10.10.1, orientamos o sistema de coordenadas de modo que sua origem esteja no centro da tela do monitor e o plano *xy* coincida com o plano da tela. Consequentemente, um observador somente verá a projeção da imagem do objeto tridimensional no plano bidimensional *xy*.

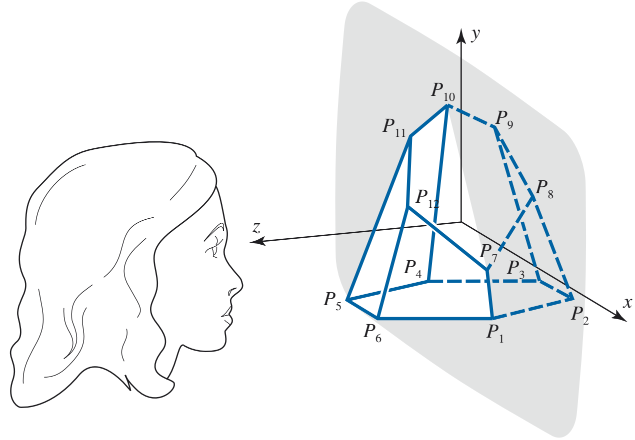


Figura 10.10.1

As extremidades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ dos segmentos de reta que determinam a imagem do objeto têm certas coordenadas no sistema de coordenadas *xyz*, digamos,

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \ldots, \quad (x_n, y_n, z_n)$$

Essas coordenadas são armazenadas na memória do sistema, junto com uma especificação de quais pares são conectados por segmentos de reta. Por exemplo, suponha que a tela tenha 4 unidades de largura e 3 de altura, e que os 12 vértices da pirâmide truncada da Figura 10.10.1 tenham as coordenadas seguintes.

$$\begin{array}{ll} P_1\text{: } (1{,}000;\ -0{,}800;\ 0{,}000) & P_2\text{: } (0{,}500;\ -0{,}800;\ -0{,}866), \\ P_3\text{: } (-0{,}500;\ -0{,}800;\ -0{,}866), & P_4\text{: } (-1{,}000;\ -0{,}800;\ 0{,}000) \\ P_5\text{: } (-0{,}500;\ -0{,}800;\ 0{,}866), & P_6\text{: } (0{,}500;\ -0{,}800;\ 0{,}866), \\ P_7\text{: } (-0{,}840;\ -0{,}400;\ 0{,}000), & P_8\text{: } (0{,}315;\ 0{,}125;\ -0{,}546), \\ P_9\text{: } (-0{,}210;\ 0{,}650;\ -0{,}364), & P_{10}\text{: } (-0{,}360;\ 0{,}800;\ 0{,}000), \\ P_{11}\text{: } (-0{,}210;\ 0{,}650;\ 0{,}364), & P_{12}\text{: } (0{,}315;\ 0{,}125;\ 0{,}546), \end{array}$$

Esses 12 vértices são conectados dois a dois por 18 segmentos de reta como segue, em que $P_i \leftrightarrow P_j$ significa que o ponto P_i está conectado ao ponto P_j.

$$\begin{array}{llllll} P_1 \leftrightarrow P_2, & P_2 \leftrightarrow P_3, & P_3 \leftrightarrow P_4, & P_4 \leftrightarrow P_5, & P_5 \leftrightarrow P_6, & P_6 \leftrightarrow P_1, \\ P_7 \leftrightarrow P_8, & P_8 \leftrightarrow P_9, & P_9 \leftrightarrow P_{10}, & P_{10} \leftrightarrow P_{11}, & P_{11} \leftrightarrow P_{12}, & P_{12} \leftrightarrow P_7, \\ P_1 \leftrightarrow P_7, & P_2 \leftrightarrow P_8, & P_3 \leftrightarrow P_9, & P_4 \leftrightarrow P_{10}, & P_5 \leftrightarrow P_{11}, & P_6 \leftrightarrow P_{12} \end{array}$$

Na Imagem 1, esses 18 segmentos de reta estão mostrados como apareceriam na tela. Deve ser observado que somente as coordenadas *x* e *y* dos vértices são usadas pelo sistema para desenhar a imagem, pois é mostrada somente a projeção do objeto no plano *xy*. No entanto, precisamos manter a informação sobre as coordenadas *z* para efetuar certas transformações que discutiremos adiante.

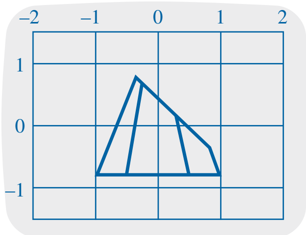


Imagem 1

Agora vamos mostrar como formar uma nova imagem do objeto mudando a escala, rodando ou transladando a imagem original. Para isso, construímos uma matriz *P* de tamanho $3 \times n$, denominada ***matriz de coordenadas da imagem***, cujas colunas são as coordenadas dos *n* pontos de uma imagem.

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix}$$

Por exemplo, a matriz de coordenadas P que corresponde à Imagem 1 é a matriz 3×12

$$\begin{bmatrix} 1{,}000 & 0{,}500 & -0{,}500 & -1{,}000 & -0{,}500 & 0{,}500 & 0{,}840 & 0{,}315 & -0{,}210 & -0{,}360 & -0{,}210 & 0{,}315 \\ -0{,}800 & -0{,}800 & -0{,}800 & -0{,}800 & -0{,}800 & -0{,}800 & -0{,}400 & 0{,}125 & 0{,}650 & 0{,}800 & 0{,}650 & 0{,}125 \\ 0{,}000 & -0{,}866 & -0{,}866 & 0{,}000 & 0{,}866 & 0{,}866 & 0{,}000 & -0{,}546 & -0{,}364 & 0{,}000 & 0{,}364 & 0{,}546 \end{bmatrix}$$

Vamos mostrar a seguir como transformar a matriz de coordenadas P de uma imagem na nova matriz de coordenadas P' que corresponde a uma nova imagem do objeto. Os segmentos de retas que conectam os vários pontos se movem junto com os pontos quando esses pontos são transformados. Dessa maneira, cada imagem é determinada univocamente pela sua matriz de coordenadas, desde que tenham sido especificados quais pares de pontos são conectados por segmentos de reta na imagem original.

Mudança de escala

O primeiro tipo de transformação que consideramos é a mudança de escala, que consiste em mudar as escalas da imagem ao longo das direções x, y e z por fatores α, β e γ, respectivamente. Isso significa que um ponto P_i de coordenadas (x_i, y_i, z_i) na imagem original, será transformado no novo ponto P_i' de coordenadas $(\alpha x_i, \beta y_i, \gamma z_i)$ na nova imagem. Isso tem o efeito de transformar um cubo unitário da imagem original num paralelepípedo de dimensões $\alpha \times \beta \times \gamma$ (Figura 10.10.2). Matematicamente, essa mudança de escala é efetuada pela multiplicação matricial, como segue. Definimos uma matriz diagonal 3×3

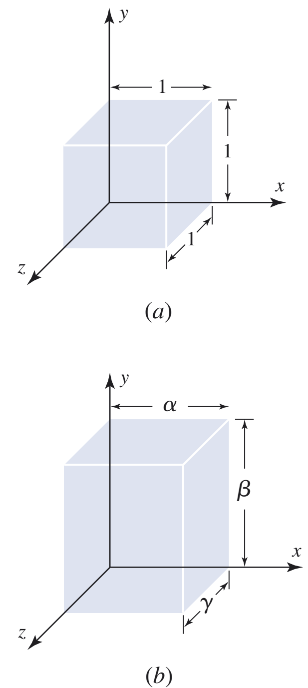
$$S = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Então, se um ponto P_i da imagem original for representado pelo vetor coluna

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

então o ponto transformado P_i' é representado pelo vetor coluna

$$\begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$



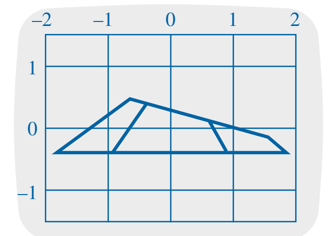
▲ **Figura 10.10.2**

Usando a matriz de coordenadas P, que contém as coordenadas de todos os n pontos da imagem original como colunas, esses n pontos podem ser transformados simultaneamente para produzir a matriz de coordenadas P' da mudança de escala, como segue.

$$SP = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha x_1 & \alpha x_2 & \cdots & \alpha x_n \\ \beta y_1 & \beta y_2 & \cdots & \beta y_n \\ \gamma z_{1} & \gamma z_2 & \cdots & \gamma z_n \end{bmatrix} = P'$$

A nova matriz de coordenadas pode, então, ser fornecida ao sistema para produzir a nova imagem do objeto. Exemplificando, a Imagem 2 é o resultado da mudança de escala dada por $\alpha = 1{,}8$, $\beta = 0{,}5$ e $\gamma = 3{,}0$ aplicada à Imagem 1. Observe que a mudança de escala $\gamma = 3{,}0$ ao longo do eixo z não é visível na Imagem 2, pois vemos somente a projeção do objeto no plano xy.



▲ **Imagem 2** A Imagem 1 com escala alterada por $\alpha = 1{,}8$, $\beta = 0{,}5$, $\gamma = 3{,}0$.

Translação

Em seguida, consideramos a transformação de translação, que desloca um objeto para uma nova posição na tela. Usando a Figura 10.10.3, suponha que queiramos mudar uma imagem existente de tal modo que cada ponto P_i de coordenadas (x_i, y_i, z_i) seja movido para um novo ponto P'_i de coordenadas $(x_i + x_0, y_i + y_0, z_i + z_0)$. O vetor

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

é denominado ***vetor translação*** da transformação. Definindo a matriz $3 \times n$

$$T = \begin{bmatrix} x_0 & x_0 & \cdots & x_0 \\ y_0 & y_0 & \cdots & y_0 \\ z_0 & z_0 & \cdots & z_0 \end{bmatrix}$$

podemos transladar todos os n pontos da imagem determinados pela matriz de coordenadas P pela adição matricial por meio da equação

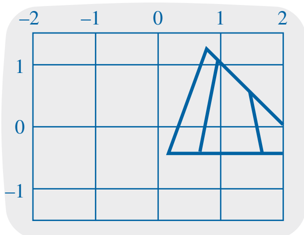
$$P' = P + T$$

A matriz de coordenadas P' especifica, portanto, as novas coordenadas dos n pontos. Por exemplo, se quisermos transladar a Imagem 1 de acordo com o vetor de translação

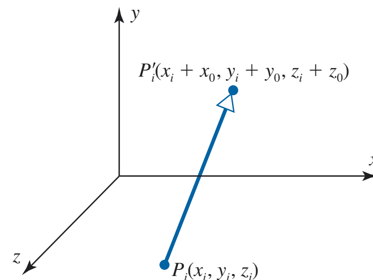
$$\begin{bmatrix} 1{,}2 \\ 0{,}4 \\ 1{,}7 \end{bmatrix}$$

então o resultado é a Imagem 3. Observe, novamente, que a translação por $z_0 = 1{,}7$ ao longo do eixo z não aparece explicitamente na Imagem 3.

No Exercício 7, é explicada uma técnica de efetuar translações por multiplicação matricial em vez de adição matricial.



▲ **Imagem 3** A Imagem 1 transladada por $x_0 = 1{,}2$, $y_0 = 0{,}4$, $z_0 = 1{,}7$.

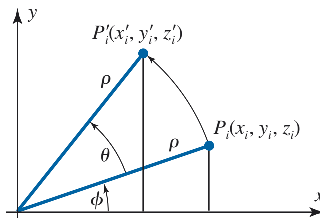


▶ **Figura 10.10.3**

Rotação

Um tipo mais complicado de transformação é a rotação de uma imagem em torno de um dos três eixos coordenados. Começamos com uma rotação em torno do eixo z (o eixo perpendicular à tela) por um ângulo θ. Dado um ponto P_i de coordenadas (x_i, y_i, z_i) da imagem original, queremos calcular as novas coordenadas (x'_i, y'_i, z'_i) do ponto P'_i girado. Usando um pouco de Trigonometria e a Figura 10.10.4, o leitor deveria conseguir deduzir as relações seguintes.

$$\begin{aligned} x'_i &= \rho\cos(\phi + \theta) = \rho\cos\phi\cos\theta - \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta = x_i\cos\theta - y_i\,\text{sen}\,\theta \\ y'_i &= \rho\,\text{sen}(\phi + \theta) = \rho\cos\phi\,\text{sen}\,\theta + \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta = x_i\,\text{sen}\,\theta + y_i\cos\theta \\ z'_i &= z_i \end{aligned}$$



▲ **Figura 10.10.4**

Essas equações podem ser escritas em formato matricial como

$$\begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

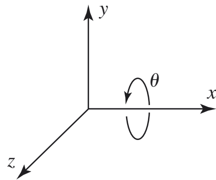
Se denotarmos a matriz 3×3 dessa equação por R, então todos os n pontos poderão ser girados pela multiplicação matricial

$$P' = RP$$

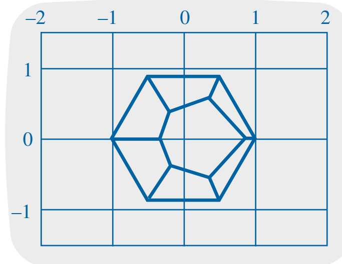
para fornecer a matriz de coordenadas P' da imagem rodada.

Analogamente, podemos obter rotações em torno dos eixos x e y e as matrizes de rotação resultantes são dadas nas Imagens 4, 5 e 6 a seguir. Essas novas imagens da pirâmide truncada correspondem às rotações da Imagem 1 em torno dos eixos x, y e z por um ângulo de 90°, respectivamente.

Rotação em torno do eixo x

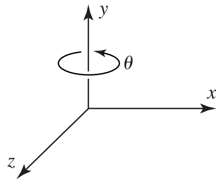


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

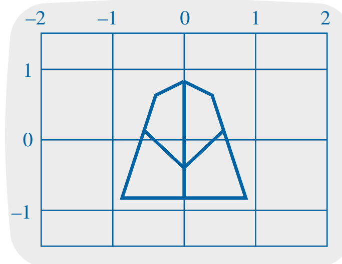


▲ **Imagem 4** A Imagem 1 girada 90° em torno do eixo *x*.

Rotação em torno do eixo y

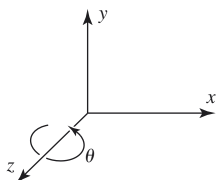


$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

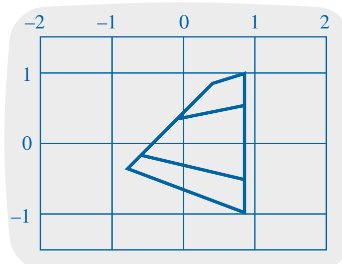


▲ **Imagem 5** A Imagem 1 girada 90° em torno do eixo *y*.

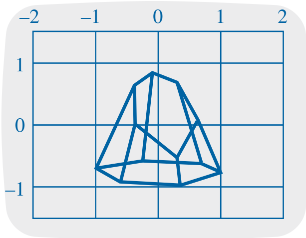
Rotação em torno do eixo z



$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



▲ **Imagem 6** A Imagem 1 girada 90° em torno do eixo *z*.



▲ **Imagem 7** Imagem oblíqua da pirâmide truncada.

As rotações em torno dos três eixos coordenados podem ser combinadas para dar imagens oblíquas de um objeto. Por exemplo, a Imagem 7 é a Imagem 1 inicialmente girada em torno do eixo x por 30°, em seguida girada em torno do eixo y por $-70°$, e finalmente girada em torno do eixo z por $-27°$. Matematicamente, essas três rotações sucessivas podem ser encorpadas numa única equação de transformação $P' = RP$, em que R é o produto das três matrizes individuais de rotação

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(30°) & -\operatorname{sen}(30°) \\ 0 & \operatorname{sen}(30°) & \cos(30°) \end{bmatrix}$$

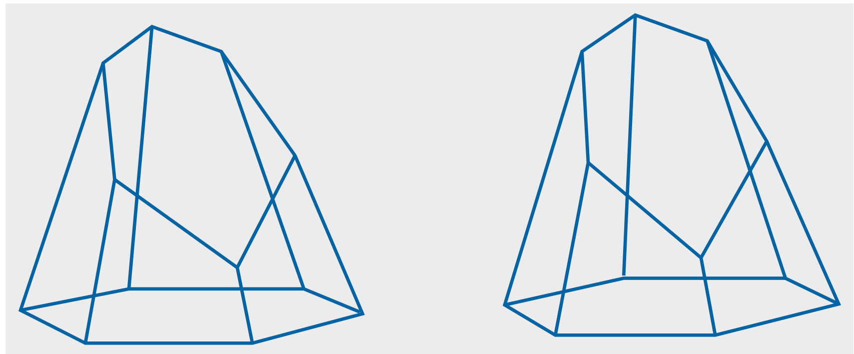
$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos(-70°) & 0 & \operatorname{sen}(-70°) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(-70°) & 0 & \cos(-70°) \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} \cos(-27°) & -\operatorname{sen}(-27°) & 0 \\ \operatorname{sen}(-27°) & \cos(-27°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

na ordem

$$R = R_3 R_2 R_1 = \begin{bmatrix} 0{,}305 & -0{,}025 & -0{,}952 \\ -0{,}155 & 0{,}985 & -0{,}076 \\ 0{,}940 & 0{,}171 & 0{,}296 \end{bmatrix}$$

Como uma ilustração final, apresentamos na Imagem 8 duas imagens separadas da pirâmide truncada, que constituem um par estereoscópico. Essas imagens foram produzidas rodando primeiro a Imagem 7 em torno do eixo y por um ângulo de $-3°$ e transladando para a direita e, em seguida, rodando a mesma Imagem 7 em torno do eixo y por um ângulo de $+3°$ e transladando para a esquerda. As distâncias de translação foram escolhidas de tal modo que as imagens estereoscópicas estejam afastadas cerca de 6,5 centímetros, a distância aproximada entre um par de olhos.



▲ **Imagem 8** Uma figura estereoscópica da pirâmide truncada. A tridimensionalidade do diagrama pode ser vista segurando o livro a cerca de 30 centímetros e focando os olhos à distância. Voltando a olhar para a Imagem 8 sem trocar o foco dos olhos, as duas imagens do par estereoscópico podem ser combinadas para produzir o efeito desejado.

Conjunto de exercícios 10.10

1. A Imagem 9 é uma imagem de um quadrado de vértices (0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0) e (0, 1, 0).

(a) Qual é a matriz de coordenadas da Imagem 9?

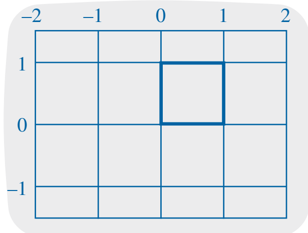
(b) Qual é a matriz de coordenadas da Imagem 9 depois de uma mudança de escala por um fator de $1\frac{1}{2}$ na direção x e $\frac{1}{2}$ na direção y? Faça um esboço da imagem transformada.

(c) Qual é a matriz de coordenadas da Imagem 9 depois de transladada pelo vetor

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Faça um esboço da imagem transformada.

(d) Qual é a matriz de coordenadas da Imagem 9 depois de girada por um ângulo de $-30°$ em torno do eixo z? Faça um esboço da imagem transformada.



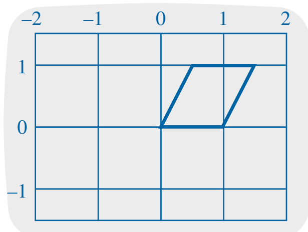
▲ **Imagem 9** O quadrado de vértices (0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0) e (0, 1, 0) (Exercícios 1 e 2).

2. (a) Se a matriz de coordenadas da Imagem 9 for multiplicada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o resultado será a matriz de coordenadas da Imagem 10. Uma tal transformação é denominada ***cisalhamento na direção x de fator*** $\frac{1}{2}$ ***em relação à coordenada y***. Mostre que, sob tal transformação, um ponto de coordenadas (x_i, y_i, z_i) passa a ter coordenadas $(x_i + \frac{1}{2}y_i, y_i, z_i)$.

(b) Quais são as coordenadas dos quatro vértices do quadrado cisalhado da Imagem 10?

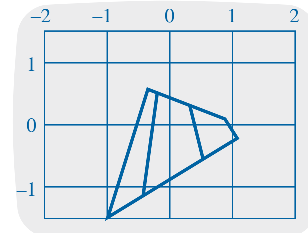


▲ **Imagem 10** A Imagem 9 com cisalhamento na direção *x* por $\frac{1}{2}$ em relação à coordenada *y* (Exercício 2).

(c) A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

determina um ***cisalhamento na direção y de fator* 0,6 *em relação à coordenada x*** (um exemplo aparece na Imagem 11). Esboce uma imagem do quadrado da Imagem 9 depois de uma tal transformação de cisalhamento e encontre as novas coordenadas de seus quatro vértices.



▲ **Imagem 11** A Imagem 1 com cisalhamento na direção *y* de 0,6 em relação à coordenada *x* (Exercício 2).

3. (a) A ***reflexão no plano*** xz é definida como a transformação que associa a cada ponto (x_i, y_i, z_i) o ponto $(x_i, -y_i, z_i)$ (por exemplo, ver Imagem 12). Se P e P' forem as matrizes de coordenadas de uma imagem e de sua reflexão no plano xz, respectivamente, encontre uma matriz M tal que $P' = MP$.

(b) Analogamente à parte (a), defina a ***reflexão no plano*** yz e construa a matriz correspondente a essa transformação. Faça um esboço da Imagem 1 refletida no plano yz.

(c) Analogamente à parte (a), defina a ***reflexão no plano*** xy e construa a matriz correspondente a essa transformação. Faça um esboço da Imagem 1 refletida no plano xy.

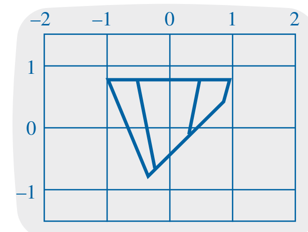


Imagem 12 A Imagem 1 refletida no plano *xz* (Exercício 3).

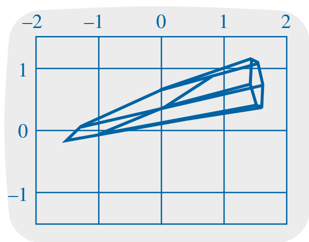
4. (a) A Imagem 13 é o resultado da Imagem 1 submetida às cinco transformações seguintes.

1. Mudança de escala de fator $\frac{1}{2}$ na direção x, 2 na direção y e $\frac{1}{3}$ na direção z.
2. Translação de $\frac{1}{2}$ unidade na direção x.

3. Rotação de 20° em torno do eixo x.
4. Rotação de $-45°$ em torno do eixo y.
5. Rotação de 90° em torno do eixo z.

Construa as cinco matrizes M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5 associadas a essas cinco transformações.

(b) Se P for a matriz de coordenadas da Imagem 1 e P' a da Imagem 13, expresse P' em termos das matrizes M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 e P.



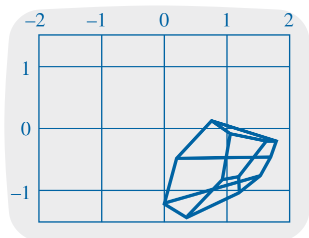
▲ **Imagem 13** A Imagem 1 transformada com mudança de escala, translação e rotação (Exercício 4).

5. (a) A Imagem 14 é o resultado da Imagem 1 submetida às sete transformações seguintes.

1. Mudança de escala de fator 0,3 na direção x e 0,5 na direção y.
2. Rotação de 45° em torno do eixo x.
3. Translação de 1 unidade na direção x.
4. Rotação de 35° em torno do eixo y.
5. Rotação de $-45°$ em torno do eixo z.
6. Translação de 1 unidade na direção z.
7. Mudança de escala de fator 2 na direção x.

Construa as matrizes $M_1, M_2, \ldots, M_7$ associadas a essas sete transformações.

(b) Se P for a matriz de coordenadas da Imagem 1 e P' a da Imagem 14, expresse P' em termos das matrizes $M_1, M_2, \ldots, M_7$ e P.



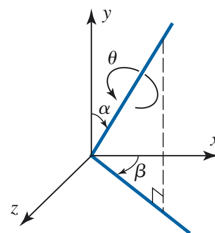
▲ **Imagem 14** A Imagem 1 transformada com mudança de escala, translação e rotação (Exercício 5).

6. Suponha que P seja a matriz de coordenadas de uma imagem que é transformada pela rotação de um ângulo θ em torno de um eixo pela origem que é especificado pelos dois ângulos α e β (ver Figura Ex-6). Se P' for a matriz de coordenadas da imagem girada, encontre as matrizes de rotação R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5 tais que

$$P' = R_5R_4R_3R_2R_1P$$

[*Sugestão*: a rotação procurada pode ser efetuada com os cinco passos seguintes.

1. Rotação de um ângulo β em torno do eixo y.
2. Rotação de um ângulo α em torno do eixo z.
3. Rotação de um ângulo θ em torno do eixo y.
4. Rotação de um ângulo $-\alpha$ em torno do eixo z.
5. Rotação de um ângulo $-\beta$ em torno do eixo y.]



◀ **Figura Ex-6**

7. Este exercício ilustra uma técnica para transladar um ponto de coordenadas (x_i, y_i, z_i) para um ponto de coordenadas $(x_i + x_0, y_i + y_0, z_i + z_0)$ por meio de multiplicação matricial em vez de adição.

(a) Associe o ponto (x_i, y_i, z_i) com o vetor coluna

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

e o ponto $(x_i + x_0, y_i + y_0, z_i + z_0)$ com o vetor coluna

$$\mathbf{v}_i' = \begin{bmatrix} x_i + x_0 \\ y_i + y_0 \\ z_i + z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

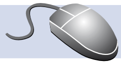
Encontre uma matriz M de tamanho 4×4 tal que $\mathbf{v}_i' = M\mathbf{v}_j$.

(b) Encontre a matriz 4×4 específica do formato dado acima que efetua a translação do ponto $(4, -2, 3)$ para o ponto $(-1, 7, 0)$.

8. Para as três matrizes de rotação dadas com as Imagens 4, 5 e 6, mostre que

$$R^{-1} = R^T$$

(Dizemos que uma matriz com essa propriedade é uma ***matriz ortogonal***. Ver Seção 7.1.)



Seção 10.10 Exercícios com tecnologia

Os exercícios seguintes foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, esse recurso é MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser algum outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidades de Álgebra Linear. Em cada exercício, você deverá ler a documentação pertinente do recurso particular que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você estará capacitado a usar seu recurso computacional para resolver muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Sejam (a, b, c) um vetor unitário normal ao plano $ax + by + cz = 0$ e $\mathbf{r} = (x, y, z)$ um vetor. Pode ser mostrado que a imagem espelhada do vetor $\mathbf{r}$ no plano dado tem coordenadas $r_e = (x_e, y_e, z_e)$, em que

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

com

$$M = I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} [a \quad b \quad c]$$

(a) Mostre que $M^2 = I$ e dê uma razão física por que isso deve ser assim. [*Sugestão*: use que o vetor (a, b, c) é unitário para mostrar que $\mathbf{n}^T\mathbf{n} = 1$.]

(b) Use um computador para mostrar que $\det(M) = -1$.

(c) Os autovetores de M satisfazem a equação

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

e, portanto, correspondem àqueles vetores cujas direções não são afetadas por uma reflexão no plano. Use um computador para determinar os autovetores e autovalores de M e então dê um argumento físico para corroborar sua resposta.

T2. Um vetor $\mathbf{v} = (x, y, z)$ é rodado por um ângulo θ em torno de um eixo com vetor unitário (a, b, c) formando assim o vetor rodado $\mathbf{v}_R = (x_R, y_R, z_R)$. Pode ser mostrado que

$$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

com

$$R(\theta) = \cos(\theta) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \cos(\theta)) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} [a \quad b \quad c] + \operatorname{sen}(\theta) \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Use um computador para mostrar que $R(\theta)R(\varphi) = R(\theta + \varphi)$ e dê uma razão física por que isso deve ser assim. Dependendo da sofisticação do computador que você estiver usando, talvez você deva experimentar com valores diferentes de a, b e

$$c = \sqrt{1 - a^2 - b^2}$$

(b) Mostre também que $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$ e dê uma razão física para isso.

(c) Use um computador para mostrar que $\det(R(\theta)) = +1$.

10.11 Distribuições de temperatura de equilíbrio

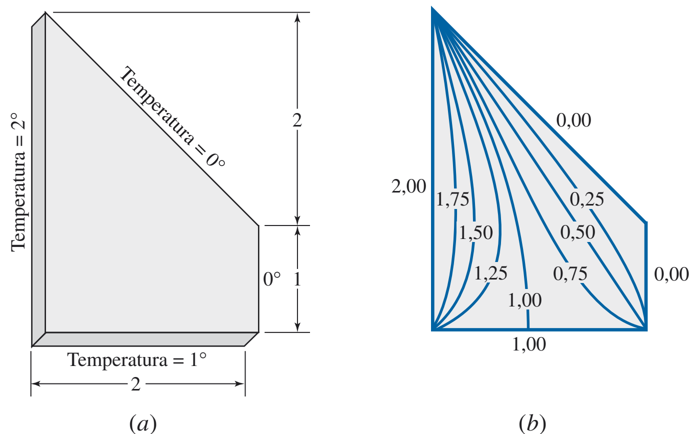
Nesta seção, mostramos como pode ser encontrada a distribuição de temperatura de equilíbrio numa placa trapezoidal se forem especificadas as temperaturas ao longo das arestas da placa. O problema se resume a resolver um sistema de equações lineares. Também são descritas uma técnica iterativa para resolver o problema e uma abordagem do tipo "caminho aleatório" para o problema.

PRÉ-REQUISITOS: Sistemas lineares
Matrizes
Compreensão intuitiva de limites

Dados de contorno

Suponha que as duas faces da placa trapezoidal fina mostrada na Figura 10.11.1*a* são isoladas do calor. Suponha também que tenham sido dadas as temperaturas ao longo das quatro arestas da placa. Por exemplo, suponha que as temperaturas em cada aresta sejam

constantes, com valores de 0°, 0°, 1° e 2°, como na figura. Depois de um certo período de tempo, a temperatura no interior da placa acaba estabilizando. Nosso objetivo nesta seção é determinar essa distribuição de temperatura de equilíbrio dos pontos dentro da placa. Como veremos, a temperatura de equilíbrio interior é completamente determinada pelos ***dados de contorno***, ou seja, pelas temperaturas ao longo das arestas da placa.



▶ **Figura 10.11.1**

A distribuição de temperatura de equilíbrio pode ser visualizada pelo uso de curvas que conectam os pontos com mesma temperatura. Essas curvas são denominadas ***isotérmicas*** da distribuição de temperatura. Na Figura 10.11.1*b*, esboçamos algumas isotérmicas usando informações que deduzimos mais adiante neste capítulo.

Embora nossas contas aqui sejam para a placa trapezoidal ilustrada, nossas técnicas generalizam facilmente para placas com qualquer formato prático. Essas técnicas também generalizam para o problema de encontrar a temperatura dentro de um corpo tridimensional. Na realidade, nossa "placa" poderia ser o corte transversal de algum objeto sólido se o fluxo de calor perpendicular ao corte for desprezível. Por exemplo, a Figura 10.11.1 poderia representar a seção transversal de uma longa represa. A represa está exposta a três temperaturas diferentes: a temperatura do solo em sua base, a temperatura da água de um lado e a do ar do outro. Para determinar as tensões termais às quais a represa está sujeita, é necessário conhecer a distribuição de temperatura dentro da represa.

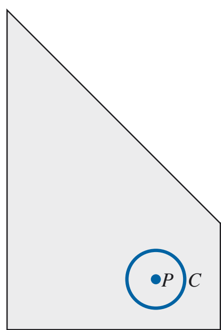
Em seguida, veremos um certo princípio termodinâmico que caracteriza a distribuição de temperatura que estamos procurando.

A propriedade do valor médio

Existem muitas maneiras diferentes de obter um modelo matemático para o nosso problema. A abordagem utilizada aqui tem por base a propriedade da distribuição de temperatura de equilíbrio que segue.

TEOREMA 10.11.1 A propriedade do valor médio

Seja P um ponto do interior de uma placa em equilíbrio térmico. Se C for um círculo qualquer completamente contido na placa e centrado em P, então a temperatura em P é o valor médio da temperatura no círculo (Figura 10.11.2).



▲ **Figura 10.11.2**

Essa propriedade é uma consequência de certas leis básicas do movimento molecular que não tentaremos deduzir. Basicamente, a propriedade afirma que a energia termal em equilíbrio tem a tendência de distribuir-se de modo tão uniforme quanto possível, consistentemente com as condições de contorno. Pode ser mostrado que a propriedade do valor médio determina de maneira única a distribuição de temperatura de equilíbrio de uma placa.

Infelizmente, não é uma tarefa fácil determinar a distribuição de temperatura de equilíbrio a partir da propriedade do valor médio. No entanto, podemos reduzir o problema à resolução de um sistema linear se nos restringimos a encontrar a temperatura somente num conjunto finito de pontos do interior da placa. É isso o que faremos a seguir.

A formulação discreta do problema

Podemos cobrir nossa placa trapezoidal com uma sucessão de malhas de quadrados, ou redes, cada vez mais finas (Figura 10.11.3). Em (*a*), temos uma malha bem grosseira; em (*b*), temos uma malha com a metade do espaçamento da de (*a*); e em (*c*), o espaçamento novamente foi reduzido à metade. Os pontos de interseção das linhas da malha são chamados *pontos de malha*. Esses pontos são classificados em ***pontos de malha de contorno*** se estiverem no contorno da placa e ***pontos de malha interiores*** se estiverem no interior da placa. Nas três malhas escolhidas na figura, existem 1, 9 e 49 pontos de malha interiores, respectivamente.

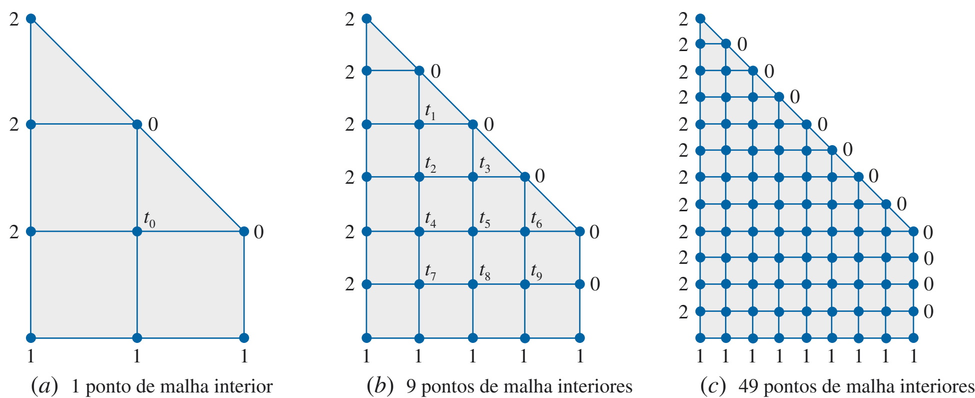


Figura 10.11.3

Na formulação discreta do problema, tentamos encontrar somente as temperaturas nos pontos de malha interiores de uma rede dada. Para uma malha razoavelmente fina, como em (*c*), isso já fornece uma excelente representação da verdadeira distribuição de temperatura na placa inteira.

A temperatura nos pontos de malha de contorno é fornecida pelos dados de contorno. (Na Figura 10.11.3, rotulamos todos os pontos de malha de contorno com suas temperaturas correspondentes.) Nos pontos de malha interiores, aplicamos a versão discreta da propriedade do valor médio que segue.

TEOREMA 10.11.2 A propriedade discreta do valor médio

Em cada ponto de malha interior, a temperatura é aproximadamente a média das temperaturas dos quatro pontos de malha vizinhos.

Essa versão discreta é uma aproximação razoável da verdadeira propriedade do valor médio, mas também fornece somente uma aproximação das verdadeiras temperaturas nos pontos de malha interiores por ser apenas uma aproximação. No entanto, a aproximação melhora à medida que diminuir o espaçamento da malha. De fato, se o espaçamento da malha tender a zero, as aproximações tendem à distribuição de temperatura exata, um fato que é provado em disciplinas avançadas de Análise Numérica. Ilustramos essa convergência calculando as temperaturas aproximadas nos pontos de malha dos três espaçamentos de malha da Figura 10.11.3.

O caso da malha (a) da Figura 10.11.3 é simples, pois só há um ponto de malha interior. Escrevendo t_0 para a temperatura nesse ponto de malha, a propriedade discreta do valor médio imediatamente fornece

$$t_0 = \tfrac{1}{4}(2 + 1 + 0 + 0) = 0{,}75$$

No caso (b), podemos denotar as temperaturas nos nove pontos de malha interiores por $t_1, t_2, \ldots, t_9$, como na Figura 10.11.3b. (A ordem escolhida para esses pontos não é importante.) Aplicando a propriedade do valor médio discreto sucessivamente a cada um desses nove pontos, obtemos as nove equações seguintes.

$$\begin{aligned}
t_1 &= \tfrac{1}{4}(t_2 + 2 + 0 + 0)\\
t_2 &= \tfrac{1}{4}(t_1 + t_3 + t_4 + 2)\\
t_3 &= \tfrac{1}{4}(t_2 + t_5 + 0 + 0)\\
t_4 &= \tfrac{1}{4}(t_2 + t_5 + t_7 + 2)\\
t_5 &= \tfrac{1}{4}(t_3 + t_4 + t_6 + t_8)\\
t_6 &= \tfrac{1}{4}(t_5 + t_9 + 0 + 0)\\
t_7 &= \tfrac{1}{4}(t_4 + t_8 + 1 + 2)\\
t_8 &= \tfrac{1}{4}(t_5 + t_7 + t_9 + 1)\\
t_9 &= \tfrac{1}{4}(t_6 + t_8 + 1 + 0)
\end{aligned} \tag{1}$$

Isso é um sistema de nove equações lineares em nove incógnitas que podemos reescrever em formato matricial como

$$\mathbf{t} = M\mathbf{t} + \mathbf{b} \tag{2}$$

em que

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1\\ t_2\\ t_3\\ t_4\\ t_5\\ t_6\\ t_7\\ t_8\\ t_9 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix}
0 & \frac14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac14 & 0 & \frac14 & \frac14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac14 & 0 & 0 & \frac14 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac14 & 0 & 0 & \frac14 & 0 & \frac14 & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac14 & \frac14 & 0 & \frac14 & 0 & \frac14 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac14 & 0 & 0 & 0 & \frac14\\
0 & 0 & 0 & \frac14 & 0 & 0 & 0 & \frac14 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac14 & 0 & \frac14 & 0 & \frac14\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac14 & 0 & \frac14 & 0
\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac12\\ \frac12\\ 0\\ \frac12\\ 0\\ 0\\ \frac34\\ \frac14\\ \frac14 \end{bmatrix}$$

Para resolver a Equação (2), reescrevemos essa equação como

$$(I - M)\mathbf{t} = \mathbf{b}$$

A solução em $\mathbf{t}$ é, portanto,

$$\mathbf{t} = (I - M)^{-1}\mathbf{b} \tag{3}$$

sempre que a matriz $(I - M)$ for invertível. Isso realmente ocorre e, calculando a solução em $\mathbf{t}$ por (3), obtemos

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0{,}7846 \\ 1{,}1383 \\ 0{,}4719 \\ 1{,}2967 \\ 0{,}7491 \\ 0{,}3265 \\ 1{,}2995 \\ 0{,}9014 \\ 0{,}5570 \end{bmatrix} \tag{4}$$

A Figura 10.11.4 é um diagrama da placa com os nove pontos de malha interiores mostrando sua temperatura de acordo com essa solução.

▶ **Figura 10.11.4**

Repetimos esse mesmo procedimento no caso (*c*) da Figura 10.11.3. Denotamos as temperaturas nos 49 pontos de malha interiores, em qualquer ordem, por $t_1, t_2, \ldots, t_{49}$. Por exemplo, podemos começar no topo da placa e continuar da esquerda para a direita ao longo de cada linha de pontos da malha. Aplicando a propriedade discreta do valor médio a cada um dos pontos de malha, obtemos um sistema de 49 equações lineares em 49 incógnitas, como segue.

$$\begin{aligned} t_1 &= \tfrac{1}{4}(t_2 + 2 + 0 + 0) \\ t_2 &= \tfrac{1}{4}(t_1 + t_3 + t_4 + 2) \\ &\vdots \\ t_{48} &= \tfrac{1}{4}(t_{41} + t_{47} + t_{49} + 1) \\ t_{49} &= \tfrac{1}{4}(t_{42} + t_{48} + 0 + 1) \end{aligned} \tag{5}$$

Em formato matricial, as Equações (5) são

$$\mathbf{t} = M\mathbf{t} + \mathbf{b}$$

em que **t** e **b** são vetores coluna de 49 entradas e M é uma matriz 49×49. Como em (3), a solução em **t** é

$$\mathbf{t} = (I - M)^{-1}\mathbf{b} \tag{6}$$

Na Figura 10.11.5, exibimos as temperaturas encontradas com a Equação (6) nos 49 pontos de malha. As nove temperaturas não sombreadas nessa figura caem nos pontos de malha da Figura 10.11.4. Na Tabela 1, comparamos as temperaturas nesses nove pontos de malha interiores que são comuns para os três espaçamentos de rede diferentes usados.

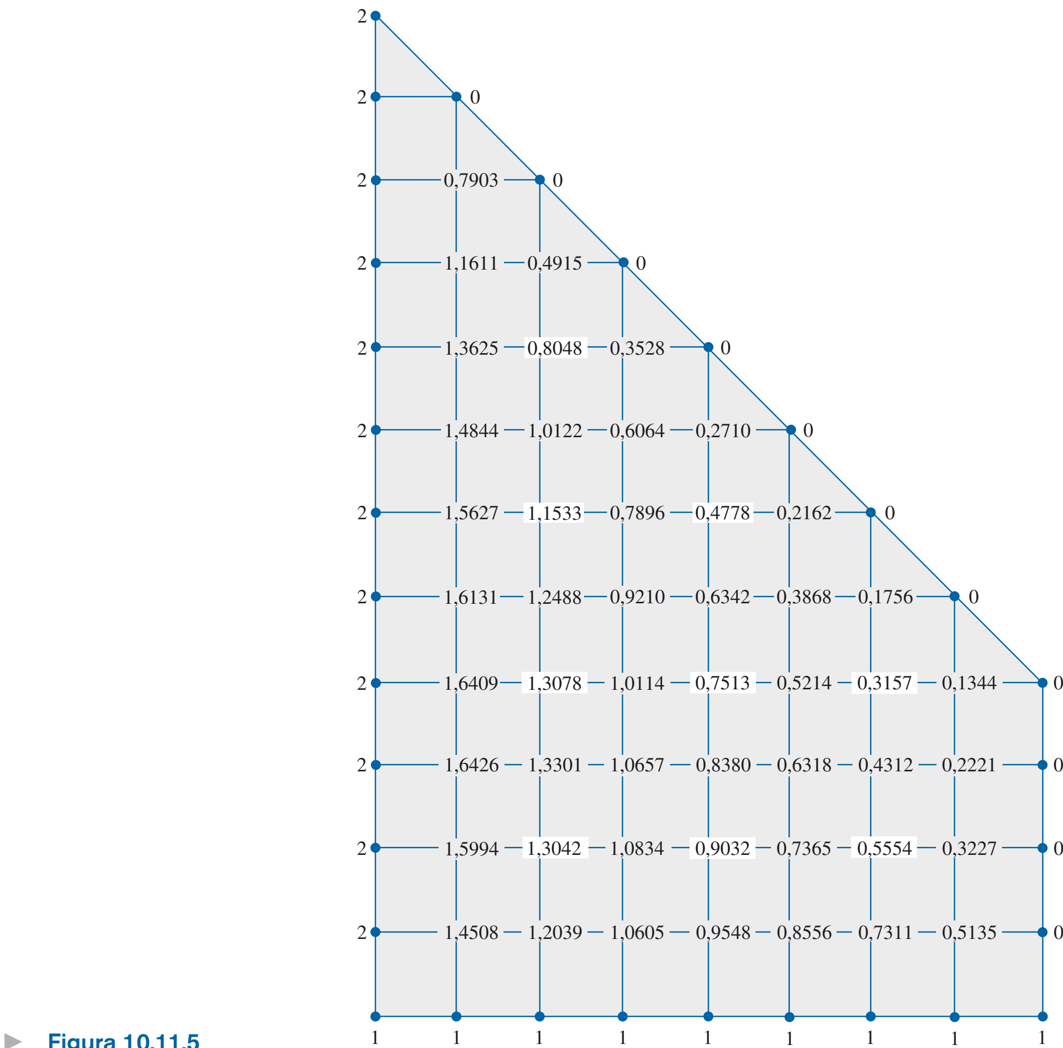


Figura 10.11.5

Tabela 1

	Temperaturas nos pontos de malha comuns		
	Caso (*a*)	Caso (*b*)	Caso (*c*)
t_1	—	0,7846	0,8048
t_2	—	1,1383	1,1533
t_3	—	0,4719	0,4778
t_4	—	1,2967	1,3078
t_5	0,7500	0,7491	0,7513
t_6	—	0,3265	0,3157
t_7	—	1,2995	1,3042
t_8	—	0,9014	0,9032
t_9	—	0,5570	0,5554

Sabendo que as temperaturas do problema discreto tendem às temperaturas exatas à medida que o espaçamento da malha diminui, podemos concluir que as nove temperaturas obtidas no caso (*c*) estão mais próximas dos valores exatos que as do caso (*b*).

Uma técnica numérica

Para obter as 49 temperaturas no caso (*c*) da Figura 10.11.3, foi necessário resolver um sistema linear em 49 incógnitas. Uma rede mais fina pode envolver um sistema linear com centenas ou até milhares de incógnitas. Algoritmos exatos para a solução de sistemas tão grandes são impraticáveis e, por essa razão, discutiremos agora uma técnica numérica para a solução prática desses sistemas.

Para descrever essa técnica, voltamos a olhar para a Equação (2),

$$\mathbf{t} = M\mathbf{t} + \mathbf{b} \tag{7}$$

O vetor **t** que estamos procurando aparece em ambos os lados dessa equação. Procuremos uma maneira de gerar aproximações melhores cada vez do vetor **t**. Com a aproximação inicial $\mathbf{t}^{(0)}$, podemos tomar $\mathbf{t}^{(0)} = \mathbf{0}$ se não tivermos uma escolha melhor. Substituindo $\mathbf{t}^{(0)}$ no lado direito de (7) e identificando o lado esquerdo resultante como $\mathbf{t}^{(1)}$, temos

$$\mathbf{t}^{(1)} = M\mathbf{t}^{(0)} + \mathbf{b} \tag{8}$$

Substituindo $\mathbf{t}^{(1)}$ no lado direito de (7), geramos uma nova aproximação, que identificamos como $\mathbf{t}^{(2)}$,

$$\mathbf{t}^{(2)} = M\mathbf{t}^{(1)} + \mathbf{b} \tag{9}$$

Continuando dessa maneira, geramos a sequência de aproximações seguinte.

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}^{(1)} &= M\mathbf{t}^{(0)} + \mathbf{b} \\
\mathbf{t}^{(2)} &= M\mathbf{t}^{(1)} + \mathbf{b} \\
\mathbf{t}^{(3)} &= M\mathbf{t}^{(2)} + \mathbf{b} \\
&\;\vdots \\
\mathbf{t}^{(n)} &= M\mathbf{t}^{(n-1)} + \mathbf{b} \\
&\;\vdots
\end{aligned} \tag{10}$$

É de se esperar que essa sequência de aproximações $\mathbf{t}^{(0)}, \mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}, \ldots$ convirja à solução exata de (7). Não poderemos tratar aqui das considerações teóricas necessárias para mostrar isso. Basta dizer que, para o problema sob consideração, a sequência converge à solução exata com qualquer tamanho de malha e para qualquer aproximação inicial $\mathbf{t}^{(0)}$.

A técnica de gerar aproximações sucessivas para a solução de (7) é uma variação de uma técnica denominada ***iteração de Jacobi***; cada aproximação é uma ***iterada***. Como um exemplo numérico, aplicamos a iteração de Jacobi ao cálculo das nove temperaturas dos pontos da rede do caso (*b*). Tomando $\mathbf{t}^{(0)} = \mathbf{0}$, a Equação (2) fornece

$$\mathbf{t}^{(1)} = M\mathbf{t}^{(0)} + \mathbf{b} = M\mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0{,}5000 \\ 0{,}5000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}5000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}7500 \\ 0{,}2500 \\ 0{,}2500 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t}^{(2)} = M\mathbf{t}^{(1)} + \mathbf{b}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5000 \\ 0{,}5000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}5000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}7500 \\ 0{,}2500 \\ 0{,}2500 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5000 \\ 0{,}5000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}5000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}7500 \\ 0{,}2500 \\ 0{,}2500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6250 \\ 0{,}7500 \\ 0{,}1250 \\ 0{,}8125 \\ 0{,}1875 \\ 0{,}0625 \\ 0{,}9375 \\ 0{,}5000 \\ 0{,}3125 \end{bmatrix}$$

Algumas iteradas adicionais são

$$\mathbf{t}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0{,}6875 \\ 0{,}8906 \\ 0{,}2344 \\ 0{,}9688 \\ 0{,}3750 \\ 0{,}1250 \\ 1{,}0781 \\ 0{,}6094 \\ 0{,}3906 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}^{(10)} = \begin{bmatrix} 0{,}7791 \\ 1{,}1230 \\ 0{,}4573 \\ 1{,}2770 \\ 0{,}7236 \\ 0{,}3131 \\ 1{,}2848 \\ 0{,}8827 \\ 0{,}5446 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}^{(20)} = \begin{bmatrix} 0{,}7845 \\ 1{,}1380 \\ 0{,}4716 \\ 1{,}2963 \\ 0{,}7486 \\ 0{,}3263 \\ 1{,}2992 \\ 0{,}9010 \\ 0{,}5567 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}^{(30)} = \begin{bmatrix} 0{,}7846 \\ 1{,}1383 \\ 0{,}4719 \\ 1{,}2967 \\ 0{,}7491 \\ 0{,}3265 \\ 1{,}2995 \\ 0{,}9014 \\ 0{,}5570 \end{bmatrix}$$

Todas as iteradas a partir da trigésima são iguais a $\mathbf{t}^{(30)}$ até quatro casas decimais. Consequentemente, $\mathbf{t}^{(30)}$ é a solução exata até quatro casas decimais. Isso confere com nosso resultado anterior, dado na Equação (4).

O esquema de iteração de Jacobi aplicado ao sistema linear (5) em 49 incógnitas produz iteradas que começam a repetir as quatro primeiras casas decimais a partir de 119 iterações. Assim, $\mathbf{t}^{(119)}$ daria as 49 temperaturas corretas até quatro casas decimais do caso (*c*).

Uma técnica de Monte Carlo

Nesta seção, descrevemos uma assim chamada ***técnica de Monte Carlo*** para calcular a temperatura num único ponto de malha interior do problema discreto que não requer o cálculo das temperaturas nos demais pontos de malha interiores. Inicialmente, definimos um ***passeio aleatório discreto*** na rede. Isso significa um caminho dirigido ao longo de linhas da rede (Figura 10.11.6) que liga uma sucessão de pontos de malha e que é tal que a direção e o sentido de partida de cada ponto de malha são escolhidos aleatoriamente. Cada uma das quatro possíveis direções e sentidos de partida de cada ponto de malha ao longo do caminho deve ser igualmente provável.

Utilizando a propriedade enunciada a seguir, podemos calcular a temperatura em um ponto de malha interior específico, usando passeios aleatórios.

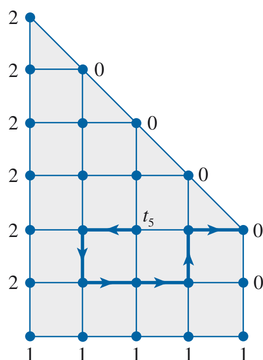


Figura 10.11.6

TEOREMA 10.11.3 Propriedade do passeio aleatório

Seja $W_1, W_2, \ldots, W_n$ uma sucessão de passeios aleatórios, todos começando num mesmo ponto de malha interior especificado. Sejam $t_1^*, t_2^*, \ldots, t_n^*$ as temperaturas nos primeiros pontos de malha de contorno encontrados ao longo de cada um desses passeios aleatórios. Então o valor médio $(t_1^* + t_2^* + \cdots + t_n^*)$ dessas temperaturas de contorno tende à temperatura no ponto de malha interior especificado quando o número n de passeios aleatórios cresce indefinidamente.

Essa propriedade é uma consequência da propriedade discreta do valor médio satisfeita pelas temperaturas dos pontos de malha. A prova da propriedade do passeio aleatório envolve conceitos elementares da Teoria de Probabilidade e não será dada aqui.

Na Tabela 2, exibimos os resultados de um grande número de passeios aleatórios gerados por computador para obter a temperatura t_5 do caso (*b*) da Figura 10.11.6 da malha de nove pontos. A primeira coluna lista o número n do passeio aleatório. A segunda coluna lista a temperatura t_n^* do primeiro ponto de malha de contorno encontrado ao longo do passeio aleatório correspondente. A última coluna dá a média acumulada das temperaturas de contorno encontradas ao longo dos n passeios aleatórios. Assim, depois de 1.000 passeios aleatórios, temos a aproximação $t_5 \simeq 0{,}7550$. Isso equivale ao valor exato $t_5 = 0{,}7491$, que calculamos anteriormente. Como pode ser visto, a convergência ao valor exato não é muito rápida.

Tabela 2

n	t_n^*	$(t_1^* + \cdots + t_n^*)/n$	n	t_n^*	$(t_1^* + \cdots + t_n^*)/n$
1	1	1,0000	20	1	0,9500
2	2	1,5000	30	0	0,8000
3	1	1,3333	40	0	0,8250
4	0	1,0000	50	2	0,8400
5	2	1,2000	100	0	0,8300
6	0	1,0000	150	1	0,8000
7	2	1,1429	200	0	0,8050
8	0	1,0000	250	1	0,8240
9	2	1,1111	500	1	0,7860
10	0	1,0000	1.000	0	0,7550

Conjunto de exercícios 10.11

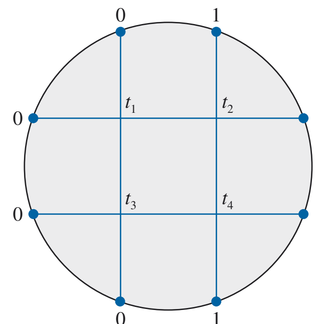
1. Uma placa no formato de um disco circular tem temperaturas de contorno de 0 na metade esquerda de sua circunferência e de 1° na metade direita de sua circunferência. Sobrepomos ao disco uma rede com quatro pontos de malha interiores (ver Figura Ex-1).

(a) Usando a propriedade discreta do valor médio, escreva o sistema linear $\mathbf{t} = M\mathbf{t} + \mathbf{b}$ de tamanho 4×4 que determina as temperaturas aproximadas nos quatro pontos de malha interiores.

(b) Resolva o sistema linear da parte (a).

(c) Use o esquema de iteração de Jacobi com $\mathbf{t}^{(0)} = \mathbf{0}$ para gerar as iteradas $\mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}, \mathbf{t}^{(3)}, \mathbf{t}^{(4)}$ e $\mathbf{t}^{(5)}$ do sistema linear da parte (a). Qual é o "vetor erro" $\mathbf{t}^{(5)} - \mathbf{t}$, em que $\mathbf{t}$ é a solução encontrada na parte (b)?

(d) Usando certos métodos avançados, pode ser mostrado que as temperaturas exatas nos quatro pontos de malha são $t_1 = t_3 = 0{,}2871$ e $t_2 = t_4 = 0{,}7129$. Quais são os erros percentuais nos valores encontrados na parte (b)?



◄ **Figura Ex-1**

2. Use o Teorema 10.11.1 para encontrar a temperatura de equilíbrio exata no centro do disco do Exercício 1.

3. Calcule as duas primeiras iteradas $\mathbf{t}^{(1)}$ e $\mathbf{t}^{(2)}$ no caso (*b*) da Figura 10.11.3 com nove pontos de malha interiores [Equação (2)] escolhendo a iterada inicial

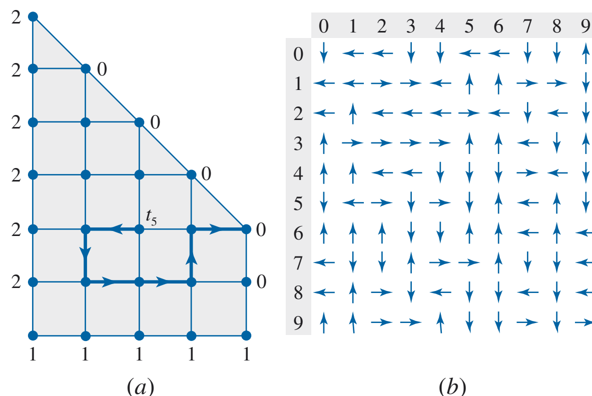
$$\mathbf{t}^{(0)} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$$

4. O passeio aleatório ilustrado na Figura Ex-4*a* pode ser descrito por seis flechas

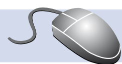
$$\leftarrow\downarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow$$

que especificam as direções e sentidos de partida dos sucessivos pontos de malha ao longo do passeio. A Figura Ex-4*b* é um agrupamento 10 × 10 de 100 flechas orientadas aleatoriamente, geradas por computador. Use essas flechas para determinar passeios aleatórios para aproximar a temperatura t_5, como aparece na Tabela 2. Proceda da seguinte maneira.

1. Tome os dois últimos dígitos do número do seu telefone. Use o último dígito para especificar a linha e o outro para especificar a coluna.
2. Vá à flecha do agrupamento que tem esse número de linha e coluna.
3. Usando essa flecha como um ponto de partida, siga pelo agrupamento de flechas como você faria para ler um livro (da esquerda para a direita e de cima para baixo). Começando no ponto rotulado t_5 na Figura Ex-4*a* e usando a sequência de flechas obtida para especificar uma sucessão de direções e sentidos, mova-se de ponto de malha para ponto de malha até alcançar um ponto de malha de contorno. Isso completa seu primeiro passeio aleatório. Registre a temperatura do ponto de malha de contorno. (Se você chegou ao fim do agrupamento de flechas, continue com a flecha do canto superior esquerdo.)
4. Retorne ao ponto de malha interior rotulado t_5 e comece onde você parou no agrupamento de flechas; gere seu próximo passeio aleatório. Repita esse processo até completar 10 passeios aleatórios e registrar 10 temperaturas de contorno.
5. Calcule a média das 10 temperaturas de contorno registradas. (O valor exato é $t_5 = 0{,}7491$.)



▲ **Figura Ex-4**



Seção 10.11 Exercícios com tecnologia

Os exercícios seguintes foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, esse recurso é MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser algum outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidades de Álgebra Linear. Em cada exercício, você deverá ler a documentação pertinente do recurso particular que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você estará capacitado a usar seu recurso computacional para resolver muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Suponha dada a região quadrada descrita por

$$\mathcal{R} = \{(x, y)\,|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

e suponha que a distribuição de temperatura de equilíbrio $u(x, y)$ ao longo do contorno seja dada por $u(x, 0) = T_B$, $u(x, 1) = T_T$, $u(0, y) = T_L$ e $u(1, y) = T_R$. Suponha, também, que essa região tenha sido particionada numa malha $(n + 1) \times (n + 1)$ usando

$$x_i = \frac{i}{n} \quad \text{e} \quad y_j = \frac{j}{n}$$

com $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ e $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. Se as temperaturas nos pontos de malha interiores forem denotadas por

$$u_{i,j} = u(x_i, y_i) = u(i/n, j/n)$$

mostre que

$$u_{i,j} = \tfrac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1})$$

com $i = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$ e $j = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$. Para tratar dos pontos de contorno, defina

$$u_{0,j} = T_L,\; u_{n,j} = T_R,\; u_{i,0} = T_B \text{ e } u_{i,n} = T_T$$

com $i = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$ e $j = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$. Agora defina

$$F_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

como a matriz $(n + 1) \times (n + 1)$ que tem a matriz identidade $n \times n$ no canto superior direito, um 1 no canto inferior esquerdo e zeros nas demais entradas. Por exemplo,

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e assim por diante. Definindo a matriz $(n + 1) \times (n + 1)$

$$M_{n+1} = F_{n+1} + F_{n+1}^T = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

mostre que se U_{n+1} for a matriz $(n + 1) \times (n + 1)$ com entradas u_{ij}, então o conjunto de equações

$$u_{i,j} = \tfrac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1})$$

com $i = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$ e $j = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$ pode ser escrito como a equação matricial

$$U_{n+1} = \tfrac{1}{4}(M_{n+1}U_{n+1} + U_{n+1}M_{n+1})$$

em que apenas consideramos aqueles elementos de U_{n+1} com $i = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$ e $j = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$.

T2. Os resultados do exercício precedente e a discussão no texto sugerem o algoritmo seguinte para resolver a temperatura de equilíbrio na região quadrada

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

dadas as condições de contorno

$$u(x, 0) = T_B, \quad u(x, 1) = T_T,$$
$$u(0, y) = T_L, \quad u(1, y) = T_R$$

1. Escolha um valor de n e um palpite inicial, digamos

$$U_{n+1}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & T_L & \cdots & T_L & 0 \\ T_B & 0 & \cdots & 0 & T_T \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ T_B & 0 & \cdots & 0 & T_T \\ 0 & T_R & \cdots & T_R & 0 \end{bmatrix}$$

2. Dado qualquer $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, calcule $U_{n+1}^{(k+1)}$ usando

$$U_{n+1}^{(k+1)} = \tfrac{1}{4}(M_{n+1}U_{n+1}^{(k)} + U_{n+1}^{(k)}M_{n+1})$$

em que M_{n+1} é a matriz definida no Exercício T1. Agora ajuste $U_{n+1}^{(k+1)}$ substituindo todas as entradas de esquina pelas entradas de esquina iniciais em $U_{n+1}^{(0)}$. [*Observação*: as entradas de esquina de uma matriz são as entradas nas primeira e última linhas e primeira e última colunas.]

3. Continue esse processo até que $U_{n+1}^{(k+1)} - U_{n+1}^{(k)}$ seja, aproximadamente, a matriz zero. Isso sugere que

$$U_{n+1} = \lim_{k\to\infty} U_{n+1}^{(k)}$$

Use um computador e esse algoritmo para resolver em $u(x, y)$, sabendo que

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 2$$

Escolha $n = 6$ e calcule até chegar a $U_{n+1}^{(30)}$. A solução exata pode ser expressa como

$$u(x, y) = \frac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{senh}[(2m-1)\pi x]\operatorname{sen}[(2m-1)\pi y]}{(2m-1)\operatorname{senh}[(2m-1)\pi]}$$

Use um computador para calcular $u(i/6, j/6)$ com $i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e, então, compare seus resultados com os valores de $u(i/6, j/6)$ em $U_{n+1}^{(30)}$.

T3. Usando a solução exata $u(x, y)$ da distribuição de temperatura descrita no Exercício T2, use um recurso gráfico para fazer o seguinte.

(a) Faça um esboço da superfície $z = u(x, y)$ no espaço tridimensional xyz em que z é a temperatura no ponto (x, y) da região quadrada.

(b) Esboce várias isotérmicas da distribuição de temperatura (que são as curvas do plano xy em que a temperatura é constante).

(c) Esboce várias curvas da temperatura como função de x com y mantido constante.

(d) Esboce várias curvas da temperatura como função de y com x mantido constante.

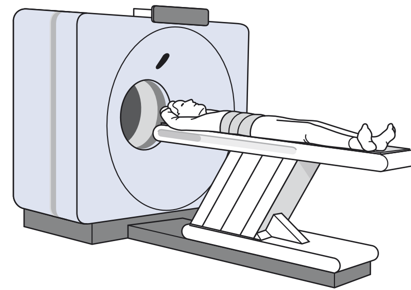
10.12 Tomografia computadorizada

Nesta seção, mostramos como a construção da imagem de um corte transversal de um corpo humano a partir da análise do escaneamento por raios X leva a um sistema linear inconsistente. Apresentamos uma técnica iterativa que fornece uma "solução aproximada" do sistema linear.

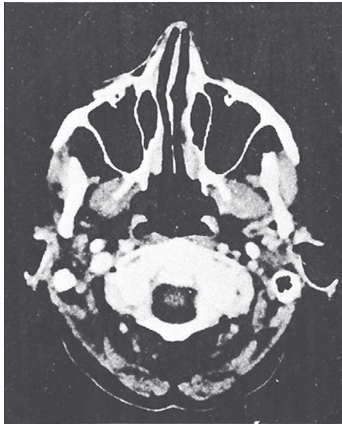
PRÉ-REQUISITOS: Sistemas lineares
Logaritmos naturais
Espaço euclidiano R^n

O problema básico da tomografia computadorizada é construir a imagem de uma seção transversal do corpo humano usando dados coletados por uma grande quantidade de feixes individuais de raios X que são emitidos ao longo da seção transversal. Esses dados são processados por um computador e a seção transversal computada é exibida num monitor de vídeo. A Figura 10.12.1 é um diagrama do sistema de tomografia computadorizada da

General Electric, mostrando um paciente preparado para ter uma seção transversal de sua cabeça escaneada por um feixe de raios X.



▶ Figura 10.12.1



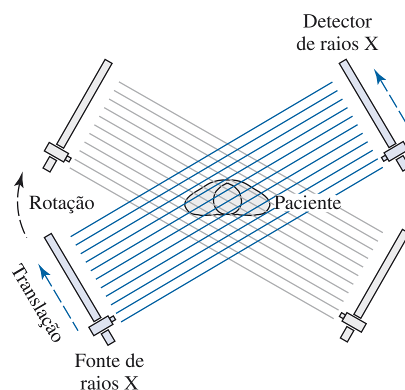
▲ Figura 10.12.2

Um sistema desses também é conhecido pelas inicias em inglês ***CAT***, de Tomografia Auxiliada por Computador. A Figura 10.12.2 mostra uma seção transversal típica de uma cabeça humana produzida por esse método.

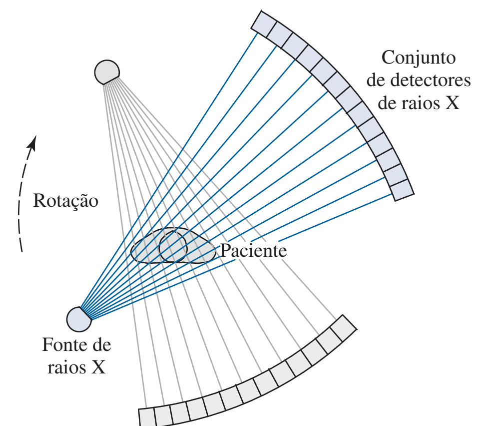
O primeiro sistema comercial de tomografia computadorizada para uso médico foi desenvolvido em 1971, por G. N. Hounsfield, da firma EMI, Ltd., na Inglaterra. Em 1979, Hounsfield e A. M. Cormack receberam o prêmio Nobel por seu trabalho pioneiro nessa área. Como veremos nesta seção, a construção de uma seção transversal ou uma tomografia requer a resolução de um sistema muito grande de equações lineares. Certos algoritmos, da classe de técnicas de reconstrução algébrica, podem ser usados para resolver esses sistemas lineares, cujas soluções produzem as seções transversais em formato digital.

Modos de escanear

Ao contrário de imagens de raios X convencionais, que são obtidas projetando os raios X *perpendicularmente* ao plano da imagem, os tomógrafos são construídos a partir de milhares de feixes finíssimos de raios X que *ficam no plano* da seção transversal. Depois de passar pela seção transversal, as intensidades desses feixes são medidas por um detector de raios X, e as mensurações são transmitidas a um computador para serem processadas. As Figuras 10.12.3 e 10.12.4 ilustram dois modos possíveis de escanear a seção transversal: o *modo paralelo* e o *modo de leque*. No modo paralelo, um único par de fonte e de detector de raios X é transladado através do campo de visão que contém a seção transversal e é registrada uma grande quantidade de feixes paralelos. Em seguida, o par fonte e detector é girado por um pequeno ângulo e é feito o registro de um novo conjunto de medidas. Esse processo é repetido até alcançar o número de medidas desejado. Na máquina original de 1971, por exemplo, eram tomadas 160 medidas paralelas ao longo de 180



▲ Figura 10.12.3 Modo paralelo.



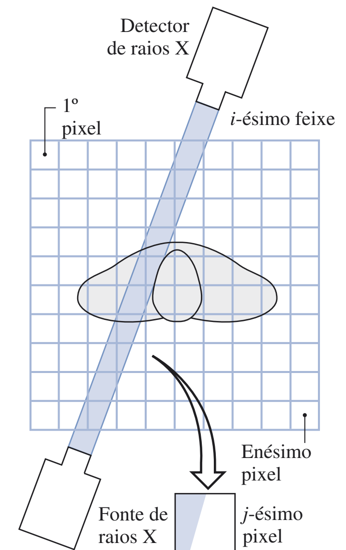
▲ Figura 10.12.4 Modo de leque.

ângulos espaçados de 1°, num total de 160 × 180 = 28.800 medidas de intensidade de feixe. Cada escaneamento desses levava cerca de cinco minutos e meio.

No modo de leque de escanear, uma única fonte de raios X gera um leque de raios colimados cujas intensidades são medidas simultaneamente por uma coleção de detectores do outro lado do campo de visão. A fonte e o conjunto de detectores são girados por muitos ângulos, e um conjunto de medidas é tomado em cada ângulo até completar o escaneamento. No sistema de tomografia computadorizada da General Electric, que usa o modo de leque, cada escaneamento leva um segundo.

Dedução das equações

Para ver como a seção transversal é reconstruída a partir das muitas medidas de feixes, considere a Figura 10.12.5. Aqui o campo de visão no qual está situada a seção transversal foi dividido em muitos *pixels* quadrados (um pixel é um elemento pictográfico da figura digitalizada) numerados de 1 a N, como indicado. O que queremos é determinar a densidade dos raios X de cada pixel. No sistema da EMI, foram usados 6.400 pixels dispostos num arranjo de 80 × 80. O sistema da General Electric usa 262.144 pixels dispostos num arranjo de 512 × 512, cada pixel medindo cerca de 1 mm da lado. Depois de determinar as densidades dos pixels pelo método que descrevemos a seguir, elas são reproduzidas num monitor de vídeo, cada pixel sendo sombreado com um nível de cinza proporcional à sua densidade de raios X. Como os diversos tecidos humanos têm densidades de raios X diferentes, a imagem no vídeo distingue claramente os diversos tecidos e órgãos na seção transversal.



▲ **Figura 10.12.5**

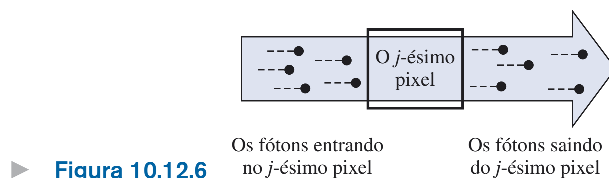
A Figura 10.12.6 mostra um único pixel sendo atravessado, num sentido paralelo aos lados, por um feixe de raios X de aproximadamente a mesma largura do pixel. Os fótons que constituem o feixe de raios X são absorvidos pelo tecido dentro do pixel numa taxa proporcional à densidade de raios X do tecido. Quantitativamente, a densidade de raios X do j-ésimo pixel é denotada por x_j e é definida por

$$x_j = \ln\left(\frac{\textit{número de fótons entrando no j-ésimo pixel}}{\textit{número de fótons saindo do j-ésimo pixel}}\right)$$

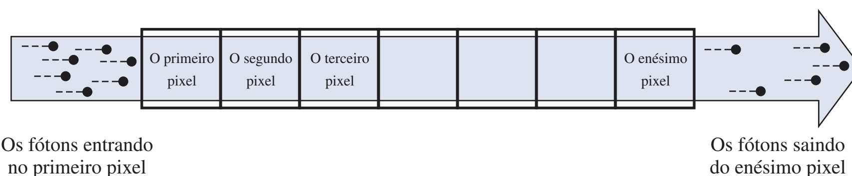
onde o "ln" denota a função logaritmo natural. Usando a propriedade logarítmica $\ln(a/b) = -\ln(b/a)$, também temos

$$x_j = -\ln\left(\begin{matrix}\textit{fração de fótons que passa pelo}\\ \textit{j-ésimo pixel sem ser absorvida}\end{matrix}\right)$$

Se o feixe de raios X passa por uma fileira inteira de pixels (Figura 10.12.7), então o número de fótons saindo de um pixel é igual ao número de fótons entrando no próximo pixel



► **Figura 10.12.6**



▲ **Figura 10.12.7**

na fileira. Se esses pixels são numerados 1, 2, . . . , n, então, pela propriedade aditiva da função logarítmica, temos

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \ln\left(\frac{\textit{número de fótons entrando no j-ésimo pixel}}{\textit{número de fótons saindo do enésimo pixel}}\right)$$

$$= -\ln\left(\begin{array}{c}\textit{fração de fótons que passa}\\ \textit{pela fileira de pixels sem}\\ \textit{ser absorvida}\end{array}\right) \tag{1}$$

Assim, para determinar a densidade de raios X total de uma fileira de pixels, simplesmente somamos as densidades dos pixels individuais.

Em seguida, considere o feixe de raios X da Figura 10.12.5. A ***densidade de feixe*** do i-ésimo feixe de um escaneamento é denotada por b_i e é dada por

$$b_i = \ln\left(\frac{\begin{array}{c}\textit{número de fótons do i-ésimo feixe entrando no detector}\\ \textit{sem ter a seção transversal no campo de visão}\end{array}}{\begin{array}{c}\textit{número de fótons do i-ésimo feixe entrando no}\\ \textit{detector com a seção transversal no campo de visão}\end{array}}\right)$$

$$= -\ln\left(\begin{array}{c}\textit{fração de fótons do i-ésimo feixe}\\ \textit{que passa pela seção transversal}\\ \textit{sem ser absorvida}\end{array}\right) \tag{2}$$

O numerador da primeira expressão de b_i é obtido executando um escaneamento de calibração sem ter a seção transversal no campo de visão. As medidas que resultam no detector são armazenadas na memória do computador. Depois é executado um escaneamento clínico com a seção transversal no campo de visão, sendo calculadas todas as densidades b_i e os valores armazenados para processamento adicional.

Para cada feixe que passa paralelo por dentro de uma fileira de pixels, devemos ter

$$\left(\begin{array}{c}\textit{fração de fótons do}\\ \textit{feixe que passa pela}\\ \textit{fileira de pixels sem}\\ \textit{ser absorvida}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\textit{fração de fótons do}\\ \textit{feixe que passa pela}\\ \textit{seção transversal}\\ \textit{sem ser detectada}\end{array}\right)$$

Assim, se o i-ésimo feixe passa paralelo por dentro de uma fileira de pixels, então, das Equações (1) e (2), segue que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = b_i$$

Nessa equação, a densidade b_i é conhecida pelas medidas de calibração e clínicas que são feitas, e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são densidades desconhecidas de pixel que devem ser determinadas.

Mais geralmente, se o i-ésimo feixe passa paralelo por dentro de cada pixel de uma linha ou coluna de pixels numerados $j_1, j_2, \ldots, j_i$, então temos

$$x_{j1} + x_{j2} + \cdots + x_{ji} = b_i$$

Definindo

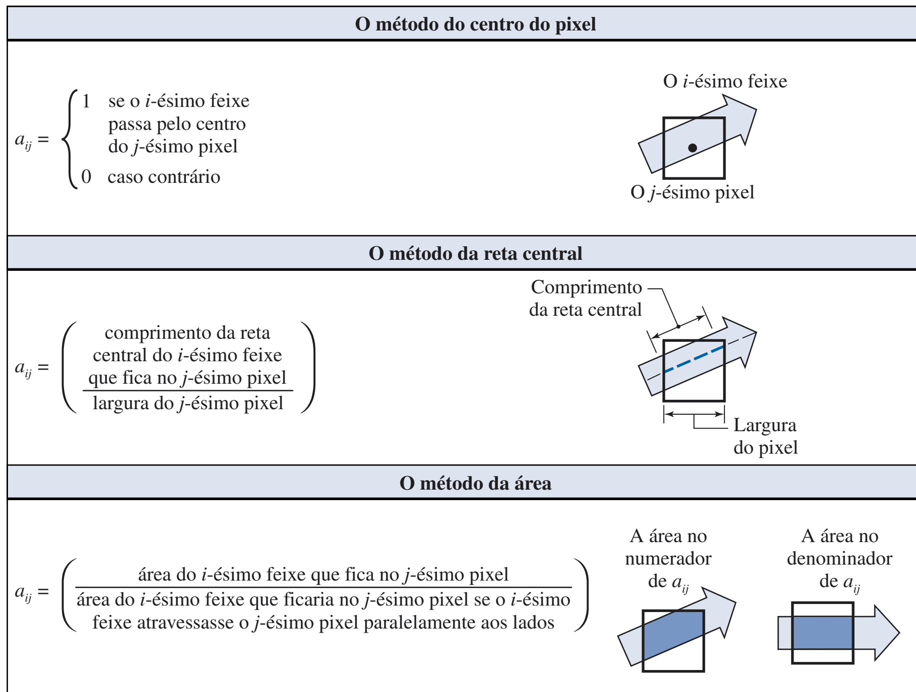
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = j_1, j_2, \ldots, j_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

podemos escrever essa equação como

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{iN}x_N = b_i \tag{3}$$

Vamos dizer que a Equação (3) é a ***i-ésima equação de feixe***.

Olhando para a Figura 10.12.5 vemos entretanto, que, os feixes de um escaneamento não necessariamente passam paralelos por dentro de cada pixel de uma linha ou coluna de pixels. Em vez disso, um feixe típico passa diagonalmente por cada pixel em seu caminho. Há muitas maneiras de lidar com isso. Na Figura 10.12.8 delineamos três métodos para definir as quantidades a_{ij} que aparecem na Equação (3), cada um dos quais reduz a quantidade a_{ij} à definição dada acima quando o feixe passa paralelamente por uma linha ou coluna de pixels. Lendo de cima para baixo, cada método é mais exato que o anterior, mas apresenta maior dificuldade computacional.



▲ **Figura 10.12.8**

Usando qualquer um dos três métodos para definir os a_{ij} na i-ésima equação de feixe, podemos escrever o conjunto de M equações de feixe de um escaneamento completo como

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1N}x_N &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2N}x_N &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\;\;\; \vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \cdots + a_{MN}x_N &= b_M \end{aligned} \tag{4}$$

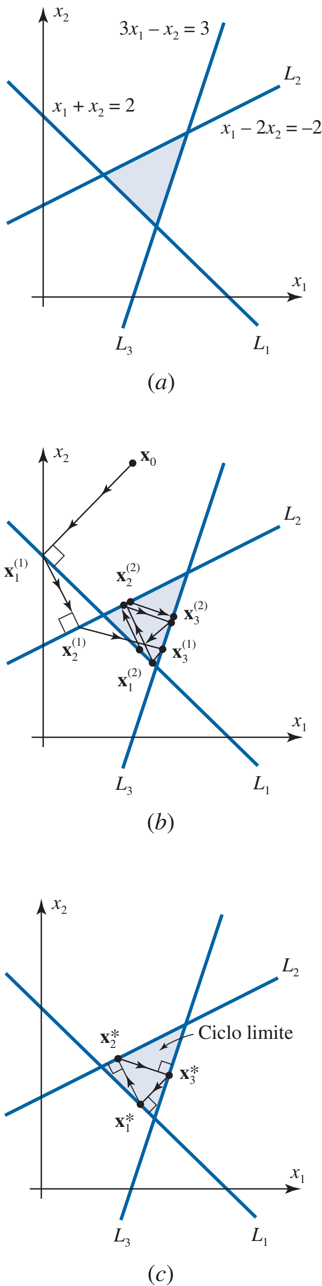
Desse modo, temos um sistema linear de M equações (as M equações de feixe) em N incógnitas (as N densidades de pixel).

Dependendo do número de feixes e de pixels usados, podemos ter $M > N$, $M = N$ ou $M < N$. Consideremos o assim chamado caso *sobredeterminado*, em que $M > N$, no qual há mais feixes no escaneamento do que pixels no campo de visão. Devido aos erros experimentais e de modelagem inerentes ao problema, não deveríamos esperar que o nosso sistema linear tivesse uma solução matemática exata para a densidade dos pixels. Na próxima seção, tentamos encontrar uma solução "aproximada" para esse sistema linear.

Técnicas de reconstrução algébrica

Muitos foram os algoritmos desenvolvidos para tratar o sistema sobredeterminado (4). O que iremos descrever pertence a uma assim chamada classe de ***Técnicas de Reconstrução Algébrica*** (TRA). Esse método, que pode ser visto como derivado de uma técnica iterativa introduzida originalmente por S. Kaczmarz, em 1937, foi o método utilizado na primeira máquina comercializada. Para introduzir essa técnica, considere o sistema de três equações em duas incógnitas seguinte.

$$\begin{aligned} L_1:&\quad x_1 + x_2 = 2 \\ L_2:&\quad x_1 - 2x_2 = -2 \\ L_3:&\quad 3x_1 - x_2 = 3 \end{aligned} \tag{5}$$



▲ **Figura 10.12.9**

As retas L_1, L_2, L_3 determinadas por essas três equações estão esboçadas no plano x_1x_2. Como indicamos na Figura 10.12.9*a*, as três retas não têm uma interseção comum, de modo que as três equações não têm um solução exata. Contudo, os pontos (x_1, x_2) do triângulo sombreado delimitado por essas três retas estão todos situados "perto" dessas três retas e podem ser considerados como sendo soluções "aproximadas" de nosso sistema. O procedimento iterativo seguinte descreve uma construção geométrica para gerar pontos na fronteira dessa região triangular (Figura 10.12.9*b*).

Algoritmo 1

Passo 0. Escolhemos algum ponto inicial $\mathbf{x}_0$ arbitrário.

Passo 1. Projetamos $\mathbf{x}_0$ ortogonalmente sobre a primeira reta L_1 e denotamos essa projeção por $\mathbf{x}_1^{(1)}$. O expoente (1) indica que essa é a primeira de uma sucessão de rodadas do algoritmo.

Passo 2. Projetamos $\mathbf{x}_1^{(1)}$ ortogonalmente sobre a segunda reta L_2 e denotamos essa projeção por $\mathbf{x}_2^{(1)}$.

Passo 3. Projetamos $\mathbf{x}_2^{(1)}$ ortogonalmente sobre a terceira reta L_3 e denotamos essa projeção por $\mathbf{x}_3^{(1)}$.

Passo 4. Tomamos $\mathbf{x}_3^{(1)}$ como o novo valor de $\mathbf{x}_0$ e repetimos a rodada de passos de 1 a 3. Na segunda rodada, denotamos os pontos projetados por $\mathbf{x}_1^{(2)}, \mathbf{x}_2^{(2)}, \mathbf{x}_3^{(2)}$; na terceira rodada, por $\mathbf{x}_1^{(3)}, \mathbf{x}_2^{(3)}, \mathbf{x}_3^{(3)}$, e assim por diante.

Esse algoritmo gera três sequências de pontos

$$\begin{aligned} L_1:&\quad \mathbf{x}_1^{(1)}, \mathbf{x}_1^{(2)}, \mathbf{x}_1^{(3)}, \ldots \\ L_2:&\quad \mathbf{x}_2^{(1)}, \mathbf{x}_2^{(2)}, \mathbf{x}_2^{(3)}, \ldots \\ L_3:&\quad \mathbf{x}_3^{(1)}, \mathbf{x}_3^{(2)}, \mathbf{x}_3^{(3)}, \ldots \end{aligned}$$

que estão nas três retas L_1, L_2 e L_3, respectivamente. Pode ser mostrado que, sempre que as três retas não forem paralelas, a primeira sequência converge a um ponto $\mathbf{x}_1^*$ de L_1, a segunda converge a um ponto $\mathbf{x}_2^*$ de L_2 e a terceira a um ponto $\mathbf{x}_3^*$ de L_3 (Figura 10.12.9*c*). Esses três pontos limite formam o que se denomina um ***ciclo limite*** do processo iterativo. Pode ser mostrado que o ciclo limite independe do ponto inicial $\mathbf{x}_0$.

A seguir, estudamos as fórmulas específicas necessárias para aplicar a projeção ortogonal do Algoritmo 1. Primeiro expressamos a equação

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

da reta no espaço x_1x_2 em forma vetorial por

$$\mathbf{a}^T\mathbf{x} = b$$

onde

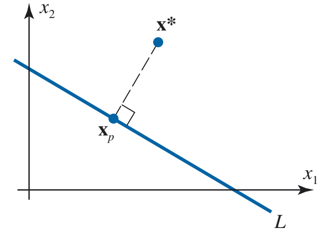
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

O teorema a seguir dá a fórmula necessária da projeção (Exercício 5).

TEOREMA 10.12.1 Fórmula da projeção ortogonal

Sejam L uma reta em R^2 de equação $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = b$ e $\mathbf{x}^*$ um ponto qualquer de R^2 (Figura 10.12.10). Então a projeção ortogonal $\mathbf{x}_p$ de $\mathbf{x}^*$ sobre L é dada por

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}^* + \frac{(b - \mathbf{a}^T\mathbf{x}^*)}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}$$



▲ **Figura 10.12.10**

▶ EXEMPLO 1 Usando o Algoritmo 1

Podemos utilizar o Algoritmo 1 para obter uma solução aproximada do sistema linear dado em (5) e ilustrado na Figura 10.12.9. Escrevendo as equações das três retas como

$$L_1: \quad \mathbf{a}_1^T\mathbf{x} = b_1$$
$$L_2: \quad \mathbf{a}_2^T\mathbf{x} = b_2$$
$$L_3: \quad \mathbf{a}_3^T\mathbf{x} = b_3$$

em que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$
$$b_1 = 2, \quad b_2 = -2, \quad b_3 = 3$$

então, usando o Teorema 10.12.1, podemos expressar o esquema iterativo do Algoritmo 1 como

$$\mathbf{x}_k^{(p)} = \mathbf{x}_{k-1}^{(p)} + \frac{(b_k - \mathbf{a}_k^T\mathbf{x}_{k-1}^{(p)})}{\mathbf{a}_k^T\mathbf{a}_k}\mathbf{a}_k, \qquad k = 1, 2, 3$$

onde $p = 1$ para a primeira rodada de iteração, $p = 2$ para a segunda rodada de iteração e assim por diante. Ao fim de cada ciclo de iterações, ou seja, depois de calcular $\mathbf{x}_3^{(p)}$, iniciamos o ciclo seguinte com $\mathbf{x}_0^{(p+1)}$ tomado como $\mathbf{x}_3^{(p)}$.

A Tabela 1 dá o resultado numérico de seis rodadas de iterações começando com o ponto inicial $\mathbf{x}_0 = (1, 3)$.

Usando certas técnicas que são impraticáveis para sistemas lineares muito grandes, podemos mostrar que os valores exatos dos pontos do ciclo limite desse exemplo são

$$\mathbf{x}_1^* = \left(\tfrac{12}{11}, \tfrac{10}{11}\right) = (1{,}09090\ldots, 0{,}90909\ldots)$$
$$\mathbf{x}_2^* = \left(\tfrac{46}{55}, \tfrac{78}{55}\right) = (0{,}83636\ldots, 1{,}41818\ldots)$$
$$\mathbf{x}_3^* = \left(\tfrac{31}{22}, \tfrac{27}{22}\right) = (1{,}40909\ldots, 1{,}22727\ldots)$$

Pode ser observado que, na sexta rodada do algoritmo, obtemos uma excelente aproximação do ciclo limite. Qualquer uma das três iteradas $\mathbf{x}_1^{(6)}$, $\mathbf{x}_2^{(6)}$ ou $\mathbf{x}_3^{(6)}$ pode ser usada como uma solução aproximada do sistema linear. (A grande discrepância nos valores de $\mathbf{x}_1^{(6)}$, $\mathbf{x}_2^{(6)}$ e $\mathbf{x}_3^{(6)}$ decorre da natureza artificial desse exemplo ilustrativo. Essas discrepâncias seriam muito menores em problemas práticos.) ◀

Tabela 1

	x_1	x_2
$\mathbf{x}_0$	1,00000	3,00000
$\mathbf{x}_1^{(1)}$	0,00000	2,00000
$\mathbf{x}_2^{(1)}$	0,40000	1,20000
$\mathbf{x}_3^{(1)}$	1,30000	0,90000
$\mathbf{x}_1^{(2)}$	1,20000	0,80000
$\mathbf{x}_2^{(2)}$	0,88000	1,44000
$\mathbf{x}_3^{(2)}$	1,42000	1,26000
$\mathbf{x}_1^{(3)}$	1,08000	0,92000
$\mathbf{x}_2^{(3)}$	0,83200	1,41600
$\mathbf{x}_3^{(3)}$	1,40800	1,22400
$\mathbf{x}_1^{(4)}$	1,09200	0,90800
$\mathbf{x}_2^{(4)}$	0,83680	1,41840
$\mathbf{x}_3^{(4)}$	1,40920	1,22760
$\mathbf{x}_1^{(5)}$	1,09080	0,90920
$\mathbf{x}_2^{(5)}$	0,83632	1,41816
$\mathbf{x}_3^{(5)}$	1,40908	1,22724
$\mathbf{x}_1^{(6)}$	1,09092	0,90908
$\mathbf{x}_2^{(6)}$	0,83637	1,41818
$\mathbf{x}_3^{(6)}$	1,40909	1,22728

Para generalizar o Algoritmo 1 de tal modo que possa ser aplicado a sistemas sobredeterminados

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1N}x_N & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2N}x_N & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{M1}x_1 & + & a_{M2}x_2 & + \cdots + & a_{MN}x_N & = & b_M \end{array} \tag{6}$$

de M equações em N incógnitas, introduzimos os vetores coluna $\mathbf{x}$ e $\mathbf{a}_i$ como segue.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{iN} \end{bmatrix}, \qquad i = 1, 2, \ldots, M$$

Com esses vetores, as M equações que constituem o sistema linear (6) podem ser escritas em formato vetorial como

$$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, M$$

Cada uma dessas M equações define o que é chamado um ***hiperplano*** no espaço euclidiano R^N de dimensão N. Em geral, esses hiperplanos não têm interseção comum e, portanto, procuramos um ponto que esteja "razoavelmente" próximo de todos. Um tal ponto será uma solução aproximada do sistema linear, e suas N entradas determinarão densidades de pixel aproximadas com as quais formamos a seção transversal procurada.

Como no caso bidimensional, introduzimos um processo iterativo que gera ciclos de sucessivas projeções ortogonais sobre os M hiperplanos a partir de um ponto inicial arbitrário em R^N. Denotamos essas sucessivas iteradas por

$$\mathbf{x}_k^{(p)} = \left(\begin{array}{c} \textit{a iterada pertencente ao k-ésimo hiperplano} \\ \textit{gerada durante o p-ésimo ciclo de iterações} \end{array}\right)$$

O algoritmo é o seguinte.

Algoritmo 2

Passo 0. Escolhemos algum ponto $\mathbf{x}_0$ arbitrário em R^N.

Passo 1. Para a primeira rodada, tomamos $p = 1$.

Passo 2. Com $k = 1, 2, \ldots, M$, calculamos

$$\mathbf{x}_k^{(p)} = \mathbf{x}_{k-1}^{(p)} + \frac{(b_k - \mathbf{a}_k^T\mathbf{x}_{k-1}^{(p)})}{\mathbf{a}_k^T\mathbf{a}_k}\mathbf{a}_k$$

Passo 3. Denotamos $\mathbf{x}_0^{(p+1)} = \mathbf{x}_M^{(p)}$.

Passo 4. Aumentamos o número da rodada p por 1 e retornamos ao Passo 2.

A iterada $\mathbf{x}_k^{(p)}$ no Passo 2 é denominada ***projeção ortogonal*** de $\mathbf{x}_{k-1}^{(p)}$ sobre o hiperplano $\mathbf{a}_k^T = b_k$. Consequentemente, como no caso bidimensional, esse algoritmo determina uma sequência de projeções ortogonais de um hiperplano sobre o seguinte até chegar ao último hiperplano quando, ao final de cada rodada, retornamos ao primeiro hiperplano.

Pode ser mostrado que, se os vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_M$ gerarem o R^N, então as iteradas $\mathbf{x}_M^{(1)}, \mathbf{x}_M^{(2)}, \mathbf{x}_M^{(3)}, \ldots$ no M-ésimo hiperplano convergem a um ponto $\mathbf{x}_M^*$ naquele hiperplano, que não depende da escolha do ponto inicial $\mathbf{x}_0$. Na tomografia computadorizada, é escolhida uma das iteradas $\mathbf{x}_M^{(p)}$, com p suficientemente grande, como uma solução aproximada do sistema linear para as densidades de pixel.

Observe que, para o método do centro de pixel, a quantidade escalar $\mathbf{a}_k^T\mathbf{a}_k$ que aparece na equação do Passo 2 do algoritmo é simplesmente o número de pixels nos quais o k--ésimo feixe passa pelo centro. Analogamente, note que a quantidade escalar

$$b_k - \mathbf{a}_k^T \mathbf{x}_{k-1}^{(p)}$$

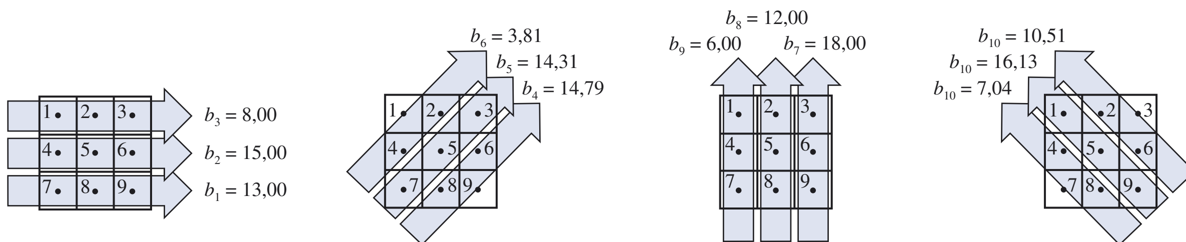
naquela mesma equação pode ser interpretada como o *excesso de densidade do k-ésimo feixe* que resulta se as densidades de pixel forem tomadas como sendo iguais às entradas de $\mathbf{x}_{k-1}^{(p)}$. Isso fornece a seguinte interpretação do nosso esquema de iteração do tipo TRA para o método do centro de pixel: *geramos a densidade de pixel de cada iterada distribuindo o excesso de densidade de feixe de sucessivos feixes do escaneamento de maneira uniforme entre aqueles pixels nos quais o feixe passa pelo centro. Quando for alcançado o último feixe do escaneamento, retornamos ao primeiro feixe e continuamos.*

▶ EXEMPLO 2 Usando o Algoritmo 2

Podemos usar o Algoritmo 2 para obter as densidades de pixel desconhecidas dos 9 pixels que estão dispostas na Figura 10.12.11. Esses 9 pixels são escaneados, usando o modo paralelo, com 12 feixes cujas densidades de feixe são medidas e indicadas na figura. Escolhemos o método do centro de pixel para montar as 12 equações. (Nos Exercícios 7 e 8, pedimos para o leitor montar as equações de feixe usando o método da reta central e o da área.) Como pode ser conferido, as equações de feixe são

$$\begin{aligned}
x_7 + x_8 + x_9 &= 13{,}00 & \qquad x_3 + x_6 + x_9 &= 18{,}00\\
x_4 + x_5 + x_6 &= 15{,}00 & x_2 + x_5 + x_8 &= 12{,}00\\
x_1 + x_2 + x_3 &= 8{,}00 & x_1 + x_4 + x_7 &= 6{,}00\\
x_6 + x_8 + x_9 &= 14{,}79 & x_2 + x_3 + x_6 &= 10{,}51\\
x_3 + x_5 + x_7 &= 14{,}31 & x_1 + x_5 + x_9 &= 16{,}13\\
x_1 + x_2 + x_4 &= 3{,}81 & x_4 + x_7 + x_8 &= 7{,}04
\end{aligned}$$

A Tabela 2 ilustra os resultados do esquema iterativo começando com uma iterada inicial $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. A tabela dá os valores de cada uma das iteradas da primeira rodada, $\mathbf{x}_1^{(1)}$ até $\mathbf{x}_{12}^{(1)}$, mas depois disso dá as iteradas somente de $\mathbf{x}_{12}^{(p)}$ com vários valores de p. As iteradas $\mathbf{x}_{12}^{(p)}$ começam a se repetir até duas casas decimais com $p \geq 45$, de modo que tomamos as entradas de $\mathbf{x}_{12}^{(45)}$ como um valor aproximado das 9 densidades de pixel. ◀



▲ **Figura 10.12.11**

Concluímos esta seção observando que a área de tomografia computadorizada é, atualmente, uma área de pesquisa bastante ativa. Na verdade, o esquema de TRA discutido aqui já foi substituído, nos sistemas comerciais, por técnicas mais sofisticadas, que são mais rápidas e fornecem uma visão mais acurada da seção transversal. Contudo, todas as novas técnicas remontam ao mesmo problema matemático básico: encontrar uma boa solução aproximada de um sistema sobredeterminado e inconsistente constituído de uma grande quantidade de equações lineares.

Tabela 2

Primeira rodada de iterações ($\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}_{12}^{(1)}$)

	Densidades de pixel								
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
$\mathbf{x}_0$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$\mathbf{x}_1^{(1)}$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	4,33	4,33	4,33
$\mathbf{x}_2^{(1)}$	0,00	0,00	0,00	5,00	5,00	5,00	4,33	4,33	4,33
$\mathbf{x}_3^{(1)}$	2,67	2,67	2,67	5,00	5,00	5,00	4,33	4,33	4,33
$\mathbf{x}_4^{(1)}$	2,67	2,67	2,67	5,00	5,00	5,37	4,33	4,71	4,71
$\mathbf{x}_5^{(1)}$	2,67	2,67	3,44	5,00	5,77	5,37	5,10	4,71	4,71
$\mathbf{x}_6^{(1)}$	0,49	0,49	3,44	2,83	5,77	5,37	5,10	4,71	4,71
$\mathbf{x}_7^{(1)}$	0,49	0,49	4,93	2,83	5,77	6,87	5,10	4,71	6,20
$\mathbf{x}_8^{(1)}$	0,49	0,84	4,93	2,83	6,11	6,87	5,10	5,05	6,20
$\mathbf{x}_9^{(1)}$	−0,31	0,84	4,93	2,02	6,11	6,87	4,30	5,05	6,20
$\mathbf{x}_{10}^{(1)}$	−0,31	0,13	4,22	2,02	6,11	6,16	4,30	5,05	6,20
$\mathbf{x}_{11}^{(1)}$	1,06	0,13	4,22	2,02	7,49	6,16	4,30	5,05	7,58
$\mathbf{x}_{12}^{(1)}$	1,06	0,13	4,22	0,58	7,49	6,16	2,85	3,61	7,58
$\mathbf{x}_{12}^{(2)}$	2,03	0,69	4,42	1,34	7,49	5,39	2,65	3,04	6,61
$\mathbf{x}_{12}^{(3)}$	1,78	0,51	4,52	1,26	7,49	5,48	2,56	3,22	6,86
$\mathbf{x}_{12}^{(4)}$	1,82	0,52	4,62	1,37	7,49	5,37	2,45	3,22	6,82
$\mathbf{x}_{12}^{(5)}$	1,79	0,49	4,71	1,43	7,49	5,31	2,37	3,25	6,85
$\mathbf{x}_{12}^{(10)}$	1,68	0,44	5,03	1,70	7,49	5,03	2,04	3,29	6,96
$\mathbf{x}_{12}^{(20)}$	1,49	0,48	5,29	2,00	7,49	4,73	1,79	3,25	7,15
$\mathbf{x}_{12}^{(30)}$	1,38	0,55	5,34	2,11	7,49	4,62	1,74	3,19	7,26
$\mathbf{x}_{12}^{(40)}$	1,33	0,59	5,33	2,14	7,49	4,59	1,75	3,15	7,31
$\mathbf{x}_{12}^{(45)}$	1,32	0,60	5,32	2,15	7,49	4,59	1,76	3,14	7,32

Conjunto de exercícios 10.12

1. (a) Escrevendo $\mathbf{x}_k^{(p)} = (\mathbf{x}_{k1}^{(p)}, \mathbf{x}_{k2}^{(p)})$, mostre que as três equações de projeção

$$\mathbf{x}_k^{(p)} = \mathbf{x}_{k-1}^{(p)} + \frac{(b_k - \mathbf{a}_k^T\mathbf{x}_{k-1}^{(p)})}{\mathbf{a}_k^T\mathbf{a}_k}\mathbf{a}_k, \qquad k = 1, 2, 3$$

das três retas da Equação (5) podem ser escritas como

$$k = 1: \quad \begin{aligned} x_{11}^{(p)} &= \tfrac{1}{2}[2 + x_{01}^{(p)} - x_{02}^{(p)}] \\ x_{12}^{(p)} &= \tfrac{1}{2}[2 - x_{01}^{(p)} + x_{02}^{(p)}] \end{aligned}$$

$$k = 2: \quad \begin{aligned} x_{21}^{(p)} &= \tfrac{1}{5}[-2 + 4x_{11}^{(p)} + 2x_{12}^{(p)}] \\ x_{22}^{(p)} &= \tfrac{1}{5}[4 + 2x_{11}^{(p)} + x_{12}^{(p)}] \end{aligned}$$

$$k = 3: \quad \begin{aligned} x_{31}^{(p)} &= \tfrac{1}{10}[9 + x_{21}^{(p)} + 3x_{22}^{(p)}] \\ x_{32}^{(p)} &= \tfrac{1}{10}[-3 + 3x_{21}^{(p)} + 9x_{22}^{(p)}] \end{aligned}$$

em que $(x_{01}^{(p+1)}, x_{02}^{(p+1)}) = (x_{31}^{(p)}, x_{32}^{(p)})$ com $p = 1, 2, \ldots$.

(b) Mostre que os três pares de equações na parte (a) podem ser combinados para produzir

$$\begin{aligned} x_{31}^{(p)} &= \tfrac{1}{20}[28 + x_{31}^{(p-1)} - x_{32}^{(p-1)}] \\ x_{32}^{(p)} &= \tfrac{1}{20}[24 + 3x_{31}^{(p-1)} - 3x_{32}^{(p-1)}] \end{aligned} \qquad p = 1, 2, \ldots$$

em que $(x_{31}^{(0)}, x_{32}^{(0)}) = (x_{01}^{(1)}, x_{02}^{(1)}) = \mathbf{x}_0^{(1)}$. [*Observação*: usando esse par de equações, podemos efetuar um ciclo completo de três projeções ortogonais num único passo.]

(c) Como $\mathbf{x}_3^{(p)}$ tende ao ponto limite $\mathbf{x}_3^*$ quando $p \to \infty$, as equações na parte (b) ficam

$$\begin{aligned} x_{31}^* &= \tfrac{1}{20}[28 + x_{31}^* - x_{32}^*] \\ x_{32}^* &= \tfrac{1}{20}[24 + 3x_{31}^* - 3x_{32}^*] \end{aligned}$$

quando $p \to \infty$. Resolva esse sistema linear em $\mathbf{x}_3^* = (x_{31}^*, x_{32}^*)$. [*Observação*: as simplificações das fórmulas da TRA descritas neste exercício são impraticáveis

para os sistemas lineares grandes que aparecem em problemas reais de tomografia computadorizada.]

2. Use o resultado do Exercício 1(b) para encontrar os vetores $\mathbf{x}_3^{(1)}, \mathbf{x}_3^{(2)}, \ldots \mathbf{x}_3^{(6)}$ do Exemplo 1 com até cinco casas decimais, usando os pontos iniciais seguintes.

(a) $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ (b) $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$

(c) $\mathbf{x}_0 = (148, -15)$

3. (a) Mostre diretamente que os pontos

$$\mathbf{x}_1^* = \left(\tfrac{12}{11}, \tfrac{10}{11}\right), \quad \mathbf{x}_2^* = \left(\tfrac{46}{55}, \tfrac{78}{55}\right), \quad \mathbf{x}_3^* = \left(\tfrac{31}{22}, \tfrac{27}{22}\right)$$

do ciclo limite do Exemplo 1 formam um triângulo cujos vértices estão nas retas L_1, L_2 e L_3 e cujos lados são perpendiculares a essas retas (Figura 10 12.9*c*).

(b) Usando as equações obtidas no Exercício 1(a), mostre que se $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_3^* = \left(\tfrac{31}{22}, \tfrac{27}{22}\right)$, então

$$\mathbf{x}_1^{(1)} = \mathbf{x}_1^* = \left(\tfrac{12}{11}, \tfrac{10}{11}\right)$$
$$\mathbf{x}_2^{(1)} = \mathbf{x}_2^* = \left(\tfrac{46}{55}, \tfrac{78}{55}\right)$$
$$\mathbf{x}_3^{(1)} = \mathbf{x}_3^* = \left(\tfrac{31}{22}, \tfrac{27}{22}\right)$$

[*Observação*: cada parte deste exercício mostra que as projeções ortogonais de qualquer ponto do ciclo limite ficam girando indefinidamente pelo ciclo limite.]

4. As retas

$$\begin{aligned} L_1: &\quad x_2 = 1 \\ L_2: &\quad x_1 - x_2 = 2 \\ L_3: &\quad x_1 - x_2 = 0 \end{aligned}$$

do plano x_1x_2 não têm uma interseção comum. Faça um desenho preciso das três retas e, graficamente, efetue várias rodadas da projeção ortogonal descrita no Algoritmo 1, começando com o ponto inicial $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$. Usando o desenho obtido, determine os três pontos do ciclo limite.

5. Prove o Teorema 10.12.1, mostrando que

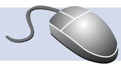
(a) o ponto $\mathbf{x}_p$ definido no teorema é um ponto da reta $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = b$ (ou seja, $\mathbf{a}^T\mathbf{x}_p = b$) e

(b) o vetor $\mathbf{x}_p - \mathbf{x}^*$ é ortogonal à reta $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = b$ (ou seja, $\mathbf{x}_p - \mathbf{x}^*$ é paralelo a $\mathbf{a}$).

6. Como foi afirmado no texto, as iteradas $\mathbf{x}_M^{(1)}, \mathbf{x}_M^{(2)}, \mathbf{x}_M^{(3)}, \ldots$ definidas no Algoritmo 2 convergem a um único ponto limite $\mathbf{x}_M^*$ se os vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_M$ gerarem o R^N. Mostre que, se isso acontecer e se for utilizado o método do centro do pixel, então o centro de cada um dos N pixels do campo de visão é atravessado pelo menos por um dos M feixes do escaneamento.

7. Construa as 12 equações de feixe do Exemplo 2 usando o método da reta central e supondo que a distância entre as retas centrais de feixes adjacentes seja igual à largura de um único pixel.

8. Construa as 12 equações de feixe do Exemplo 2 usando o método da área e supondo que tanto a largura de cada feixe quanto a distância entre as retas centrais de feixes adjacentes sejam iguais à largura de um único pixel.



Seção 10.12 Exercícios com tecnologia

Os exercícios seguintes foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, esse recurso é MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser algum outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidades de Álgebra Linear. Em cada exercício, você deverá ler a documentação pertinente do recurso particular que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você estará capacitado a usar seu recurso computacional para resolver muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Dado o conjunto de equações

$$a_kx + b_ky = c_k$$

com $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ (e $n > 2$), considere o algoritmo seguinte para obter uma solução aproximada do sistema.

1. Resolva todos os possíveis pares de equações

$$a_ix + b_iy = c_i \quad \text{e} \quad a_jx + b_jy = c_j$$

em $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$ e $i < j$ para obter soluções únicas. Isso leva a

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)$$

soluções, que denotamos por

$$(x_{ij}, y_{ij})$$

com $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$ e $i < j$.

2. Construa o centro geométrico desses pontos, dado por

$$(x_C, y_C) = \left(\frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_{ij}, \ \frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} y_{ij}\right)$$

e use-o como a solução aproximada do sistema original.

Utilize esse algoritmo para aproximar a solução do sistema

$$\begin{aligned} x + \ y &= \ \ 2 \\ x - 2y &= -2 \\ 3x - \ y &= \ \ 3 \end{aligned}$$

e compare o resultado com o obtido nesta seção.

T2. (***Requer cálculo***) Dado o conjunto de equações

$$a_k x + b_k y = c_k$$

com $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ (e $n > 2$), considere o algoritmo de mínimos quadrados seguinte para obter uma solução aproximada (x^*, y^*) do sistema. Dados um ponto (α, β) e a reta $a_i x + b_i y = c_i$, a distância desse ponto à reta é dada por

$$\frac{|a_i\alpha + b_i\beta - c_i|}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}$$

Definindo uma função $f(x, y)$ por

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i x + b_i y - c_i)^2}{a_i^2 + b_i^2}$$

e determinando o ponto (x^*, y^*) que minimiza essa função, obtemos o ponto que está *mais próximo* de cada uma dessas retas, no sentido de soma de mínimos quadrados. Mostre que x^* e y^* são soluções do sistema

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i^2+b_i^2}\right)x^* + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i^2+b_i^2}\right)y^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i c_i}{a_i^2+b_i^2}$$

e

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i^2+b_i^2}\right)x^* + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{a_i^2+b_i^2}\right)y^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i}{a_i^2+b_i^2}$$

Aplique esse algoritmo ao sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - 2y &= -2 \\ 3x - y &= 3 \end{aligned}$$

e compare o resultado com o obtido nesta seção.

10.13 Fractais

Nesta seção, utilizamos certas classes de transformações lineares para descrever e gerar conjuntos intrincados no plano euclidiano. Esses conjuntos, denominados fractais, são atualmente o foco de muita pesquisa matemática e científica.

PRÉ-REQUISITOS: Geometria de operadores lineares de R^2 (Seção 4.11)
Espaço euclidiano R^n
Logaritmos naturais
Compreensão intuitiva de limites

Fractais no plano euclidiano

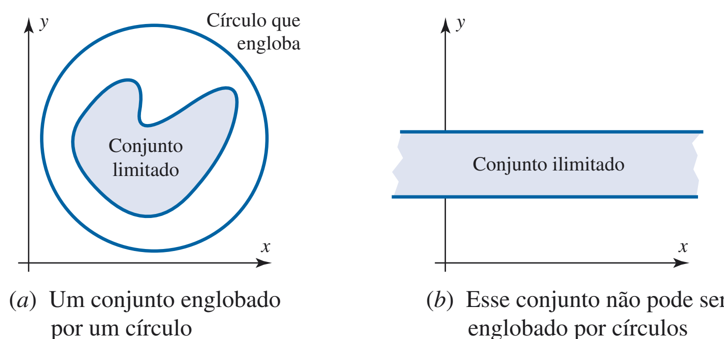
Na Matemática do final do século XIX e do início do século XX, começaram a aparecer vários conjuntos de pontos do plano euclidiano que eram bizarros e estranhos. Embora tenham sido considerados curiosidades matemáticas, esses conjuntos, denominados *fractais*, estão crescendo rapidamente em importância. Hoje, reconhecemos que eles revelam uma regularidade em fenômenos físicos e biológicos que anteriormente eram descartados como "aleatórios", "com ruído" ou "caóticos". Por exemplo, os fractais estão ao nosso redor nos formatos de nuvens, montanhas, litorais, árvores e samambaias.

Nesta seção, descrevemos brevemente certos tipos de fractais no plano euclidiano R^2. Muito dessa descrição é devido a dois matemáticos, Benoit B. Mandelbrot e Michael Barnsley, ambos pesquisadores ativos nessa área.

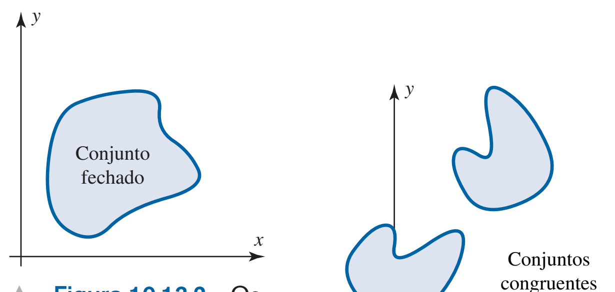
Conjuntos autossimilares

Para começar nosso estudo de fractais, precisamos introduzir alguma terminologia relativa a conjuntos em R^2. Dizemos que um conjunto em R^2 é ***limitado*** se puder ser englobado num círculo suficientemente grande (Figura 10.13.1), e dizemos que um conjunto é ***fechado*** se contiver todos os seus pontos de fronteira (Figura 10.13.2). Dois conjuntos em R^2 são ditos ***congruentes*** se pudermos fazê-los coincidir exatamente usando translações e rotações apropriadas do plano (Figura 10.13.3). Também vamos contar com a percepção intuitiva do leitor para distinguir entre conjuntos ***sobrepostos*** e ***não sobrepostos***, conforme ilustrado na Figura 10.13.4.

Se $T: R^2 \to R^2$ for o operador linear que modifica a escala pelo fator s (ver Tabela 7 da Seção 4.9) e Q for um conjunto em R^2, então o conjunto $T(Q)$, ou seja, o conjunto formado pelas imagens dos pontos de Q por T, é denominado uma ***dilatação*** do conjunto Q se $s > 1$ e uma ***contração*** de Q se $0 < s < 1$ (Figura 10.13.5). Em ambos os casos, dizemos que $T(Q)$ é uma ***homotetia*** de Q ***de fator*** s.

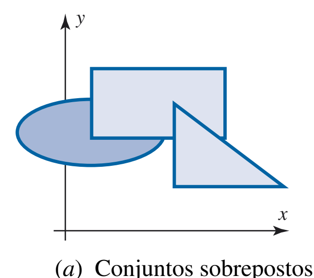


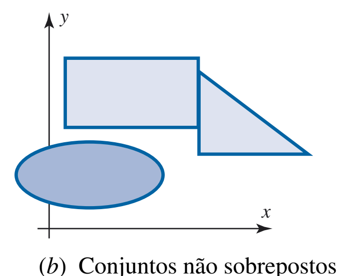
▶ **Figura 10.13.1**



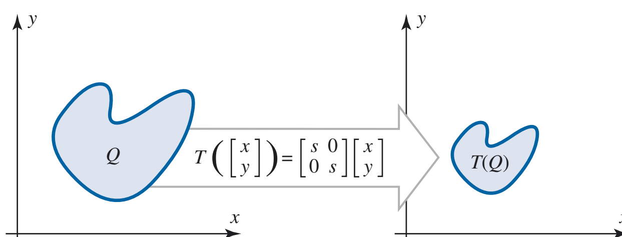
▲ **Figura 10.13.2** Os pontos de fronteira (linha mais forte) fazem parte do conjunto.

▲ **Figura 10.13.3**





▲ **Figura 10.13.4**



▶ **Figura 10.13.5** Uma contração de Q.

Os tipos de fractais que consideramos inicialmente são *autossimilares*. Em geral, definimos um conjunto autossimilar em R^2 como segue.

DEFINIÇÃO 1 Um subconjunto fechado e limitado do plano euclidiano R^2 é dito ***autossimilar*** se puder ser descrito da forma

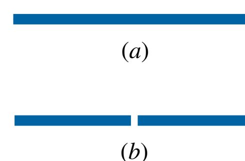
$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cdots \cup S_k \tag{1}$$

em que $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_k$ são conjuntos não sobrepostos, cada um dos quais é congruente à contração de S de mesmo fator s $(0 < s < 1)$.

Se S for um conjunto autossimilar, então dizemos que (1) é uma ***decomposição*** de S em conjuntos congruentes não sobrepostos.

▶ EXEMPLO 1 Segmento de reta

Um segmento de reta em R^2 (Figura 10.13.6*a*) pode ser expresso como a união de dois segmentos de reta congruentes e não sobrepostos (Figura 10.13.6*b*). Na Figura 10.13.6*b*, separamos ligeiramente os dois segmentos de reta para facilitar sua visualização. Cada um desses dois segmentos menores é congruente à contração do segmento original pelo fator $\frac{1}{2}$. Desse modo, um segmento de reta é um conjunto autossimilar com $k = 2$ e $\frac{1}{2}$.



▲ **Figura 10.13.6**


(*a*)


(*b*)

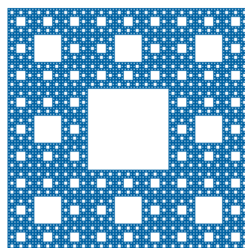
▲ **Figura 10.13.7**

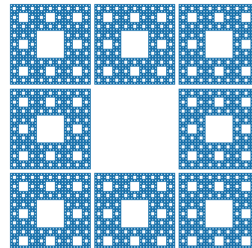
▶ **EXEMPLO 2 Quadrado**

Um quadrado (Figura 10.13.7*a*) pode ser expresso como a união de quatro quadrados congruentes e não sobrepostos (Figura 10.13.7*b*), onde de novo separamos ligeiramente os quatro quadrados. Cada um dos quatro quadrados é congruente à contração do quadrado original pelo fator $\frac{1}{2}$. Desse modo, um quadrado é um conjunto autossimilar com $k = 4$ e $\frac{1}{2}$.

▶ **EXEMPLO 3 Tapete de Sierpinski**

O conjunto sugerido na Figura 10.13.8*a* foi descrito primeiro pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882–1969). Esse conjunto pode ser expresso como a união de oito subconjuntos congruentes e não sobrepostos (Figura 10.13.8*b*), cada um dos quais é congruente à contração do conjunto original pelo fator $\frac{1}{3}$. Desse modo, esse conjunto é um conjunto autossimilar com $k = 8$ e $\frac{1}{3}$. Note que o padrão intrincado de quadrados dentro de quadrados continua para sempre em escala cada vez menor (embora isso somente possa ser sugerido por uma figura como a dada).

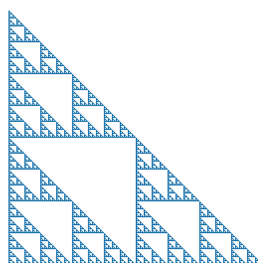

(*a*)

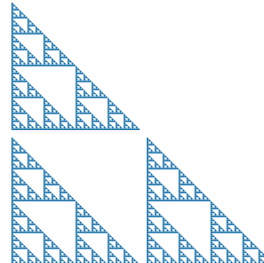

(*b*)

▲ **Figura 10.13.8**

▶ **EXEMPLO 4 Triângulo de Sierpinski**

A Figura 10.13.9*a* ilustra um outro conjunto devido a Sierpinski. Esse conjunto é um conjunto autossimilar com $k = 3$ e $\frac{1}{2}$ (Figura 10.13.9*b*). Como ocorre com o tapete de Sierpinski, o padrão intrincado de triângulos dentro de triângulos continua para sempre em escala cada vez menor. ◀


(*a*)


(*b*)

▲ **Figura 10.13.9**

O tapete e o triângulo de Sierpinski têm uma estrutura mais complexa que o segmento de reta e o quadrado, pois exibem um padrão repetido indefinidamente. Essa diferença será explorada mais adiante.

Dimensão topológica de um conjunto

Na Seção 4.5, definimos a dimensão de um *subespaço* de um espaço vetorial como o número de vetores de uma base e descobrimos que essa definição coincide com nossa

ideia intuitiva de dimensão. Por exemplo, a origem em R^2 tem dimensão zero, as retas pela origem são unidimensionais e o espaço R^2 todo é bidimensional. Essa definição de dimensão é um caso especial de um conceito mais geral denominado ***dimensão topológica***, que é aplicável a subconjuntos de R^n que não necessariamente são subespaços. Uma definição precisa desse conceito é estudada numa área da Matemática denominada *Topologia*. Embora essa definição fuja do escopo deste texto, podemos enunciar informalmente que

- um ponto em R^2 tem dimensão topológica zero;
- uma curva em R^2 tem dimensão topológica um;
- uma região em R^2 tem dimensão topológica dois.

Pode ser provado que a dimensão topológica de um conjunto em R^n é um número inteiro entre 0 e n, inclusive. Neste texto, denotamos a dimensão topológica de um conjunto S por $d_T(S)$.

Tabela 1

Conjunto S	$d_T(S)$
Segmento de reta 1	1
Quadrado 2	2
Tapete de Sierpinski 1	1
Triângulo de Sierpinski 1	1

▶ EXEMPLO 5 Dimensão topológica de conjuntos

A Tabela 1 dá a dimensão topológica de cada um dos conjuntos estudados nos exemplos anteriores. Os primeiros dois resultados dessa tabela são intuitivamente evidentes, mas não os dois últimos. Enunciado informalmente, ambos o tapete e o triângulo de Sierpinski têm tantos "buracos" que mais parecem estruturas de redes de segmentos de retas do que regiões do plano e, portanto, têm dimensão topológica igual a um. A prova disso não é nada fácil. ◀

Dimensão de Hausdorff de um conjunto autossimilar

Em 1919, o matemático alemão Felix Hausdorff (1868–1942) deu uma definição alternativa para a dimensão de conjuntos arbitrários de R^n. Sua definição é bastante complicada, mas, para conjuntos autossimilares, reduz-se a algo bem simples.

DEFINIÇÃO 2 A ***dimensão de Hausdorff*** de um conjunto autossimilar S do formato (1) é denotada por $d_H(S)$ e é definida por

$$d_H(S) = \frac{\ln k}{\ln(1/s)} \tag{2}$$

Nesta definição, "ln" denota a função logaritmo natural. A Equação (2) também pode ser escrita como

$$s^{d_H(S)} = \frac{1}{k} \tag{3}$$

na qual a dimensão de Hausdorff $d_H(S)$ aparece como um expoente. A Fórmula (3) é mais útil para interpretar o conceito de dimensão de Hausdorff; essa fórmula diz, por exemplo, que, se contrairmos um conjunto autossimilar pelo fator $s = \frac{1}{2}$, então sua área (ou, mais corretamente, sua *medida*) decresce por um fator $\left(\frac{1}{2}\right)^{d_H(S)}$. Assim, contraindo um segmento de reta pelo fator $\frac{1}{2}$, sua medida (comprimento) diminuirá por um fator $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$, e contraindo uma região quadrada pelo fator $\frac{1}{2}$, sua medida (área) diminuirá pelo fator $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Antes de passar aos exemplos, devemos apresentar alguns fatos sobre a dimensão de Hausdorff de um conjunto, como segue.

- As dimensões topológica e de Hausdorff de um conjunto não precisam coincidir.
- A dimensão de Hausdorff de um conjunto não precisa ser um número inteiro.
- A dimensão topológica de um conjunto é menor do que ou igual a sua dimensão de Hausdorff, ou seja, $d_T(S) \leq d_H(S)$.

▶ EXEMPLO 6 Dimensão de Hausdorff de conjuntos

A Tabela 2 dá a dimensão de Hausdorff de cada um dos conjuntos estudados nos exemplos anteriores.

Tabela 2

Conjunto S	s	k	$d_H(S) = \dfrac{\ln k}{\ln(1/s)}$
Segmento de reta	$\frac{1}{2}$	2	$\ln 2/\ln 2 = 1$
Quadrado	$\frac{1}{2}$	4	$\ln 4/\ln 2 = 2$
Tapete de Sierpinski	$\frac{1}{3}$	8	$\ln 8/\ln 3 = 1{,}892\ldots$
Triângulo de Sierpinski	$\frac{1}{2}$	3	$\ln 3/\ln 2 = 1{,}584\ldots$

◀

Fractais

Comparando as Tabelas 1 e 2, vemos que as dimensões de Hausdorff e topológica coincidem no segmento de reta e no quadrado, mas são desiguais no tapete e no triângulo de Sierpinski. Em 1977, Benoit B. Mandelbrot indicou que conjuntos nos quais a dimensão topológica e a de Hausdorff diferem devem ser bem complicados (como Hausdorff já havia sugerido antes, em 1919). Mandelbrot propôs denominar tais conjuntos de ***fractais*** e ofereceu a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 3 Um ***fractal*** é um subconjunto de um espaço euclidiano cujas dimensões de Hausdorff e topológica não são iguais.

De acordo com essa definição, o tapete e o triângulo de Sierpinski são fractais, enquanto o segmento de reta e o quadrado não são fractais.

Segue da definição precedente que um conjunto cuja dimensão de Hausdorff não for um número inteiro deve ser um fractal (por quê?). Contudo, veremos adiante que a recíproca não é verdadeira, ou seja, é possível um fractal ter dimensão de Hausdorff inteira.

Semelhanças

Vejamos, agora, como algumas técnicas de Álgebra Linear podem ser usadas para gerar fractais. Essa abordagem também conduz a algoritmos que podem ser explorados para desenhar fractais com computadores. Começamos com uma definição.

DEFINIÇÃO 4 Uma ***semelhança*** de fator (de escala) s é uma aplicação de R^2 em R^2 da forma

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = s\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

em que s, θ, e e f são escalares.

Geometricamente, uma semelhança é composta de três aplicações mais simples: uma mudança de escala de fator s, uma rotação em torno da origem pelo ângulo θ e uma translação (com e unidades na direção x e f unidades na direção y). A Figura 10.13.10 ilustra o efeito de uma semelhança sobre o quadrado unitário U.

Nas nossas aplicações a fractais, somente utilizamos semelhanças ***contrativas***, com o que queremos dizer que o fator s da mudança de escala está restrita ao intervalo $0 < s < 1$. Consequentemente, quando nos referirmos a semelhanças, sempre estaremos pensando em semelhanças sujeitas a essa restrição.

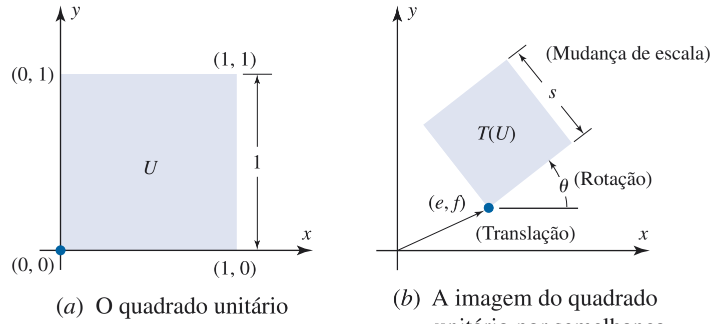


Figura 10.13.10 (a) O quadrado unitário (b) A imagem do quadrado unitário por semelhança

As semelhanças são importantes no estudo de fractais por causa do seguinte fato.

Se $T: R^2 \to R^2$ for uma semelhança de fator s e se S for um conjunto fechado e limitado em R^2, então a imagem $T(S)$ do conjunto S por T é congruente à contração de S de fator s.

Pela definição de conjuntos autossimilares em R^2, sabemos que um conjunto fechado e limitado S em R^2 é autossimilar se puder ser dado da forma

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cdots \cup S_k$$

em que $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_k$ são conjuntos não sobrepostos, cada um dos quais é congruente à contração de S de mesmo fator s $(0 < s < 1)$ [ver (1)]. Nos exemplos seguintes, vamos obter as semelhanças que produzem os conjuntos $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_k$ a partir de S para o segmento de reta, o quadrado, o tapete e o triângulo de Sierpinski.

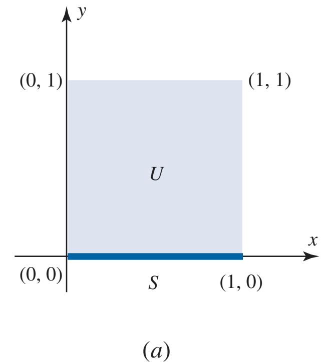
EXEMPLO 7 Segmento de reta

O nosso segmento de reta em R^2 será o segmento de reta S ligando os pontos (0, 0) e (1, 0) do plano xy (Figura 10.13.11a). Considere as duas semelhanças

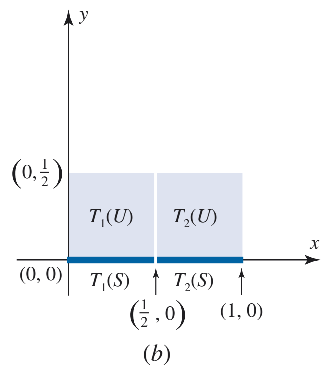
$$T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

ambas com $s = \frac{1}{2}$ e $\theta = 0$. Na Figura 10.13.11b, mostramos o efeito dessas duas semelhanças sobre o quadrado unitário U. A semelhança T_1 transforma U no quadrado menor $T_1(U)$ e a semelhança T_2 transforma U no quadrado menor $T_2(U)$. Simultaneamente, T_1 transforma o segmento de reta S no segmento menor $T_1(S)$ e T_2 transforma o segmento de reta S no segmento menor e não sobreposto $T_2(S)$. A união desses dois segmentos de reta menores e não sobrepostos é precisamente o segmento de reta original S, ou seja,

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \tag{5}$$



(a)



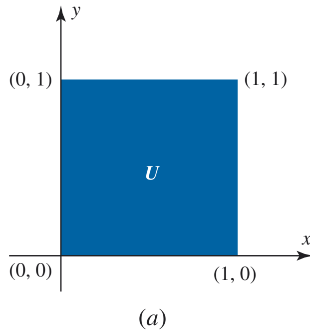
(b)

Figura 10.13.11

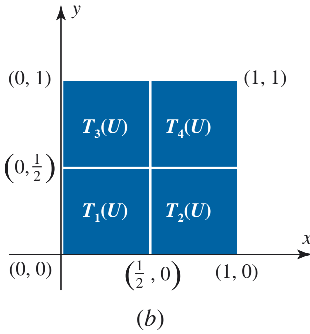
EXEMPLO 8 Quadrado

Consideremos o quadrado unitário U do plano xy (Figura 10.13.12a) e as quatro semelhanças a seguir, todas com $s = \frac{1}{2}$ e $\theta = 0$.

$$T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$T_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad T_4\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{6}$$



(a)



(b)

▲ **Figura 10.13.12**

As imagens do quadrado unitário U por essas quatro semelhanças são os quatro quadrados mostrados na Figura 10.13.12*b*. Assim,

$$U = T_1(U) \cup T_2(U) \cup T_3(U) \cup T_4(U) \tag{7}$$

é uma decomposição de U em quatro quadrados não sobrepostos que são congruentes à contração de U pelo mesmo fator ($s = \frac{1}{2}$).

▶ EXEMPLO 9 Tapete de Sierpinski

Consideremos um tapete de Sierpinski S sobre o quadrado unitário U do plano xy (Figura 10.13.13*a*) e as oito semelhanças a seguir, todas com $s = \frac{1}{3}$ e $\theta = 0$.

$$T_i\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, 8 \tag{8}$$

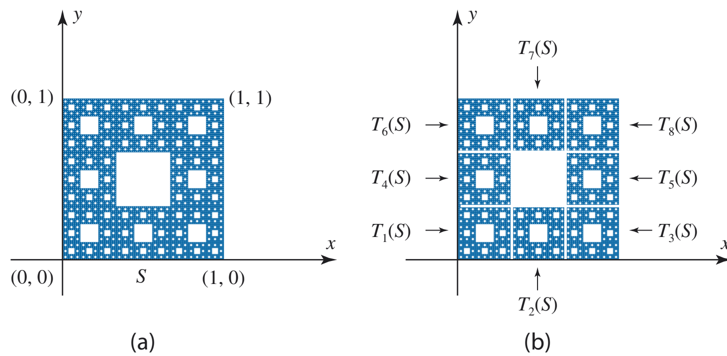
em que os oito valores de $\begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}$ são

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

As imagens de S por essas oito semelhanças são os oito conjuntos mostrados na Figura 10.13.13*b*. Assim,

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S) \cup \cdots \cup T_8(S) \tag{9}$$

é uma decomposição de S em oito conjuntos não sobrepostos que são congruentes à contração de S pelo mesmo fator ($s = \frac{1}{3}$).



▶ **Figura 10.13.13**

▶ EXEMPLO 10 Triângulo de Sierpinski

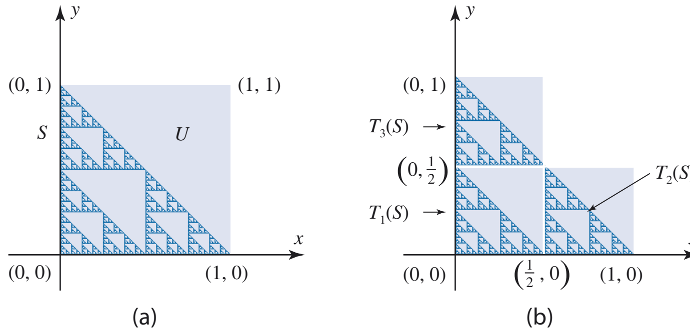
Consideremos o triângulo de Sierpinski S encaixado no quadrado unitário U do plano xy, conforme Figura 10.13.14*a* e as três semelhanças a seguir, todas com $s = \frac{1}{2}$ e $\theta = 0$.

$$\begin{aligned} T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ T_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

As imagens de S por essas três semelhanças são os três conjuntos na Figura 10.13.14*b*. Assim,

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S) \tag{11}$$

é uma decomposição de S em três conjuntos não sobrepostos que são congruentes à contração de S pelo mesmo fator ($s = \frac{1}{2}$). ◀



◀ **Figura 10.13.14**

Nesses exemplos, começamos com um conjunto específico S e mostramos sua autossimilaridade encontrando semelhanças $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_k$ de mesmo fator e tais que $T_1(S)$, $T_2(S), T_3(S), \ldots, T_k(S)$ são conjuntos não sobrepostos com

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S) \cup \cdots \cup T_k(S) \tag{12}$$

O teorema seguinte ataca o problema recíproco de determinar um conjunto autossimilar a partir de uma coleção de semelhanças.

TEOREMA 10.13.1 *Se $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_k$ forem semelhanças contrativas de mesmo fator, então existe um único conjunto não vazio, fechado e limitado S do plano euclidiano tal que*

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S) \cup \cdots \cup T_k(S)$$

Além disso, se os conjuntos $T_1(S), T_2(S), T_3(S), \ldots, T_k(S)$ forem não sobrepostos, então S é autossimilar.

Algoritmos para gerar fractais

Em geral, não existe uma maneira simples de obter diretamente o conjunto S do teorema precedente. Descrevemos, agora, um procedimento iterativo que determina S a partir das semelhanças que o definem. Primeiro damos um exemplo do procedimento e depois damos o algoritmo para o caso geral.

▶ EXEMPLO 11 Tapete de Sierpinski

A Figura 10.13.15 mostra o quadrado unitário S_0 do plano xy que serve de conjunto "inicial" de um procedimento iterativo para a construção do tapete de Sierpinski. O conjunto S_1 na figura é o resultado de aplicar a S_0 as oito semelhanças T_i ($i = 1, 2, \ldots, 8$) de (8) que determinam um tapete de Sierpinski. Esse conjunto S_1 consiste nas oito regiões quadradas, cada uma de lado com comprimento $\frac{1}{3}$, circundando um quadrado central vazio. Em seguida, aplicamos as oito semelhanças a S_1 e obtemos o conjunto S_2. Analogamente, aplicando as oito semelhanças a S_2, temos o conjunto S_3. Continuando esse processo indefinidamente, a sequência de conjuntos $S_1, S_2, S_3, \ldots$ "convergirá" a um conjunto S que é um tapete de Sierpinski. ◀

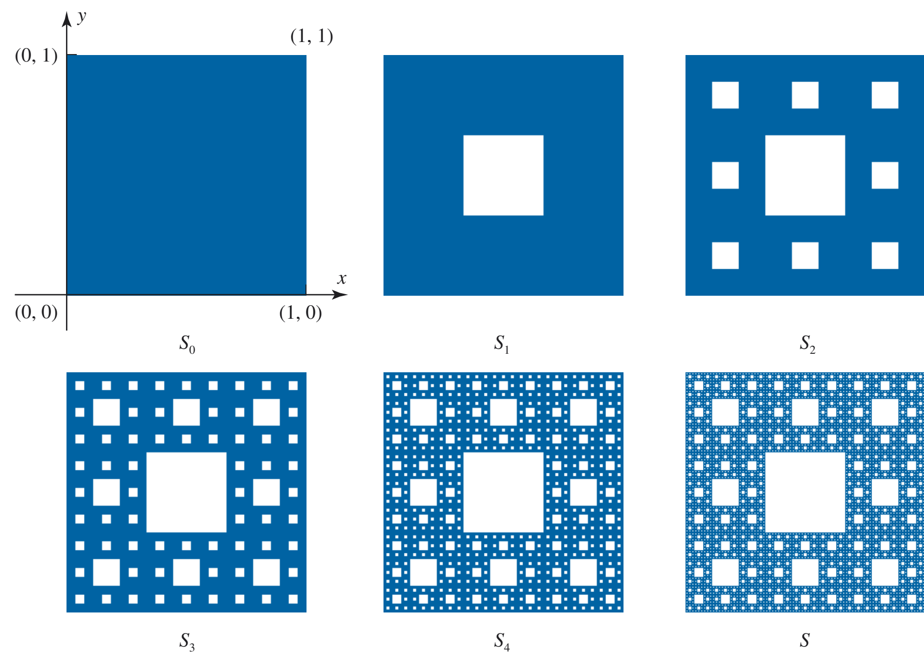


Figura 10.13.15

Observação Embora devêssemos dar uma definição formal do que significa uma sequência de conjuntos "convergir" a um conjunto, uma interpretação intuitiva é suficiente para o nosso tratamento introdutório.

Embora na Figura 10.13.15 tenhamos começado com o quadrado unitário para chegar a um tapete de Sierpinski, poderíamos ter começado com qualquer conjunto não vazio S_0. A única restrição sobre o conjunto S_0 é que ele seja fechado e limitado. Por exemplo, começando com o conjunto S_0 específico mostrado na Figura 10.13.16, então o conjunto S_1 na figura é o conjunto obtido aplicando cada uma das oito semelhanças de (8). Aplicando as oito semelhanças a S_1, obtemos o conjunto S_2. Como antes, a aplicação indefinida das oito semelhanças produz um tapete de Sierpinski como conjunto limite.

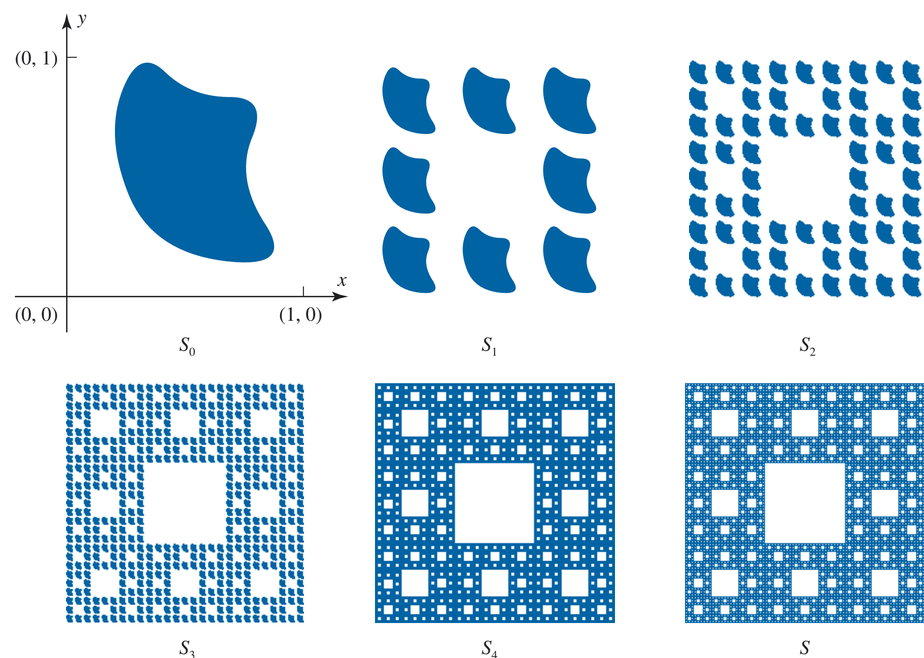


Figura 10.13.16

O algoritmo geral ilustrado no exemplo precedente é o seguinte. Dadas semelhanças contrativas $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_k$ de mesmo fator, e dado um conjunto Q qualquer em R^2, definimos o conjunto $\mathfrak{J}(Q)$ por

$$\mathfrak{J}(Q) = T_1(Q) \cup T_2(Q) \cup T_3(Q) \cup \cdots \cup T_k(Q)$$

O algoritmo a seguir gera uma sequência de conjuntos $S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$ que converge ao conjunto S do Teorema 10.13.1.

Algoritmo 1

Passo 0. Escolha um conjunto não vazio, fechado e limitado S_0 qualquer em R^2.

Passo 1. Calcule $S_1 = \mathfrak{J}(S_0)$.

Passo 2. Calcule $S_2 = \mathfrak{J}(S_1)$.

Passo 3. Calcule $S_3 = \mathfrak{J}(S_2)$.

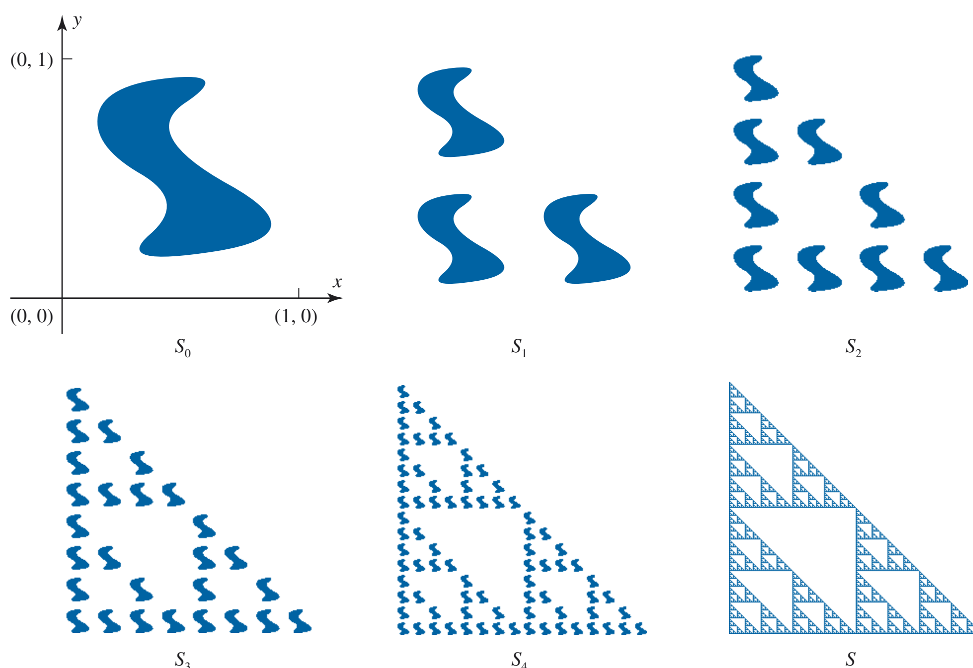
⋮

Passo n. Calcule $S_n = \mathfrak{J}(S_{n-1})$.

⋮

▶ EXEMPLO 12 Triângulo de Sierpinski

Vamos construir o triângulo de Sierpinski determinado pelas três semelhanças dadas em (10). A aplicação de conjuntos correspondente é $\mathfrak{J}(Q) = T_1(Q) \cup T_2(Q) \cup T_3(Q)$. A Figura 10.13.17 mostra um conjunto arbitrário S_0 não vazio, fechado e limitado, as quatro primeiras iteradas S_1, S_2, S_3, S_4 e o conjunto limite S (o triângulo de Sierpinski).



▲ **Figura 10.13.17**

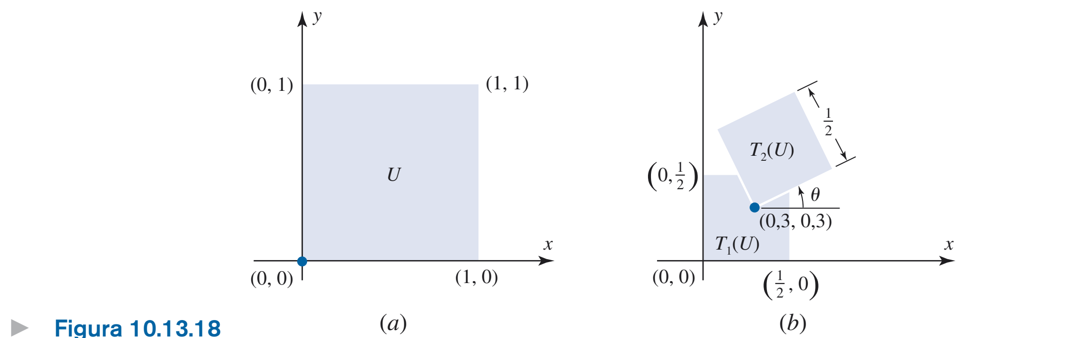
▶ **EXEMPLO 13 Usando o Algoritmo 1**

Consideremos as duas semelhanças seguintes.

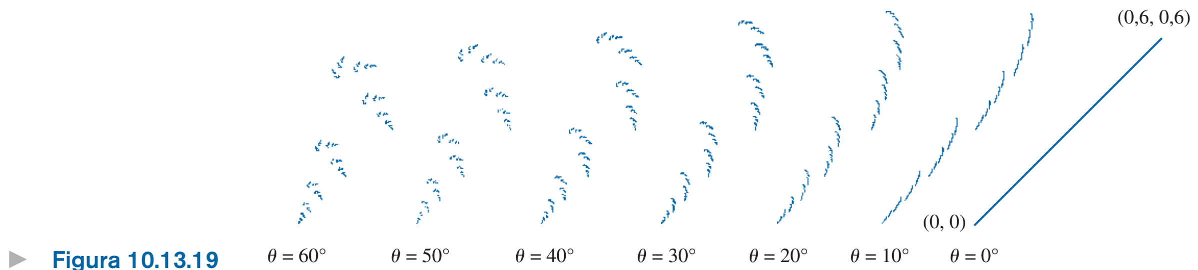
$$T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}3 \end{bmatrix}$$

A ação dessas duas semelhanças no quadrado unitário U está ilustrada na Figura 10.13.18. Aqui, o ângulo de rotação θ é um parâmetro que variamos para gerar diferentes conjuntos autossimilares. Os conjuntos autossimilares gerados por essas duas semelhanças aparecem na Figura 10.13.19 com vários valores de θ. Por simplicidade, deixamos de desenhar os eixos x e y, mas a origem é sempre o ponto mais abaixo e à esquerda do conjunto. Esses conjuntos foram gerados em computador usando o Algoritmo 1 para os valores de θ indicados. Como $k = 2$ e $s = \frac{1}{2}$, segue de (2) que a dimensão de Hausdorff desses conjuntos é 1, qualquer que seja o valor de θ. Pode ser mostrado que a dimensão topológica desses conjuntos é 1 no caso $\theta = 0$ e é 0 em todos os demais valores de θ. Segue-se que o conjunto autossimilar com $\theta = 0$ não é um fractal [é o segmento de reta de (0, 0) a (0,6; 0,6)], enquanto os conjuntos autossimilares com todos os demais valores de θ são fractais. Em particular, são exemplos de fractais com dimensão de Hausdorff inteira. ◀



▶ **Figura 10.13.18**



▶ **Figura 10.13.19**

Uma abordagem Monte Carlo

A abordagem descrita no Algoritmo 1 para construir conjuntos autossimilares usando funções de conjuntos consome muito tempo de computador, pois as semelhanças envolvidas devem ser aplicadas a cada um dos muitos pixels de uma tela de monitor em cada iteração. Em 1985, Michael Barnsley descreveu um método alternativo e mais prático para gerar um conjunto autossimilar por meio de suas semelhanças. É um assim chamado ***método de Monte Carlo*** que utiliza probabilidades e Barnsley se refere a ele como o ***Algoritmo da Iteração Aleatória***.

Sejam $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_k$ semelhanças contrativas de mesmo fator. O próximo algoritmo gera uma sequência de pontos

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \ldots, \quad \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \ldots$$

que converge coletivamente ao conjunto S do Teorema 10.13.1.

Algoritmo 2

Passo 0. Escolha um ponto arbitrário $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ em S.

Passo 1. Escolha aleatoriamente uma das k semelhanças, digamos T_{k_1}, e calcule

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = T_{k_1}\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}\right)$$

Passo 2. Escolha aleatoriamente uma das k semelhanças, digamos T_{k_2}, e calcule

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = T_{k_2}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right)$$

⋮

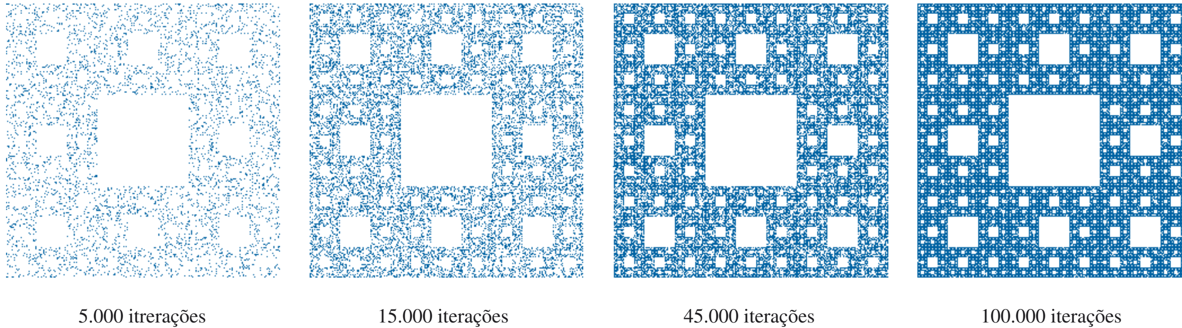
Passo n. Escolha aleatoriamente uma das k semelhanças, digamos T_{k_n}, e calcule

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = T_{k_n}\left(\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}\right)$$

⋮

Os pixels correspondentes aos pontos gerados por esse algoritmo preenchem os pixels que representam o conjunto limite S numa tela de monitor.

A Figura 10.13.20 mostra quatro estágios do algoritmo de iteração aleatória que gera o tapete de Sierpinski, começando com o ponto inicial $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.



5.000 itrerações 15.000 iterações 45.000 iterações 100.000 iterações

▲ **Figura 10.13.20**

Observação Embora o Passo 0 requeira a escolha de um ponto do conjunto S que pode até nem ser conhecido antes, isso não é um problema sério. Na prática, podemos geralmente começar com qualquer ponto em R^2 e, depois de algumas poucas iterações (digamos, umas 10 iterações), o ponto gerado estará tão próximo de S que o algoritmo funcionará corretamente daí em diante.

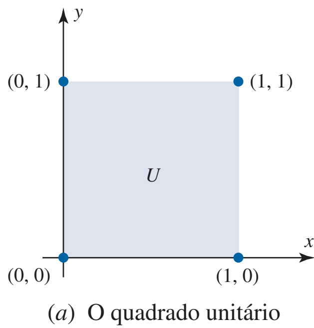
Fractais mais gerais

Até aqui, discutimos fractais que são conjuntos autossimilares de acordo com a definição dada. No entanto, o Teorema 10.13.1 permanece válido se as semelhanças $T_1, T_2, \ldots, T_k$ forem substituídas por transformações mais gerais, denominadas *transformações afins contrativas*, definidas como segue.

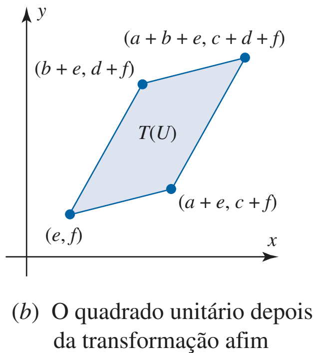
DEFINIÇÃO 5 Uma ***transformação afim*** é uma aplicação de R^2 em R^2 da forma

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

em que a, b, c, d, e e f são escalares.



(*a*) O quadrado unitário



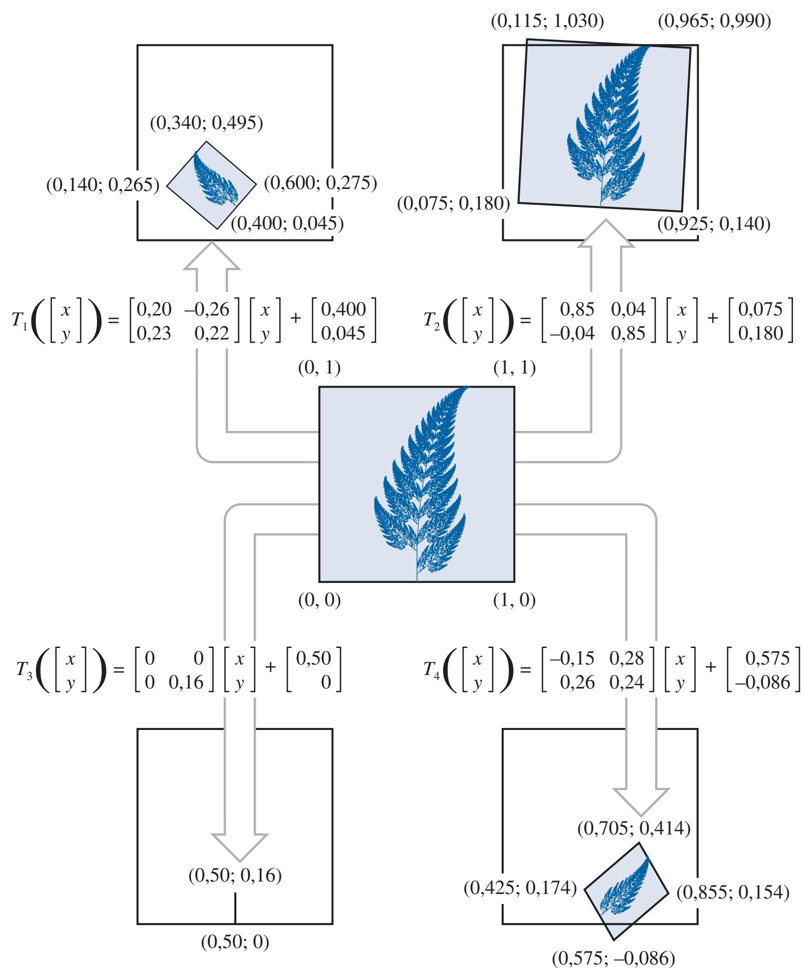
(*b*) O quadrado unitário depois da transformação afim

▲ **Figura 10.13.21**

A Figura 10.13.21 mostra como uma transformação afim transforma o quadrado unitário U num paralelogramo $T(U)$. Uma transformação afim é dita ***contrativa*** se a distância euclidiana entre a imagem de dois pontos quaisquer do plano pela transformação é estritamente menor do que a distância euclidiana original entre esses pontos. Pode ser mostrado que quaisquer k transformações afins contrativas $T_1, T_2, \ldots, T_k$ determinam um único conjunto fechado e limitado S satisfazendo a equação

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S) \cup \cdots \cup T_k(S) \tag{13}$$

A Equação (13) tem o mesmo formato da Equação (12), que utilizamos para definir conjuntos autossimilares. Embora a Equação (13), que usa transformações afins contrativas, não determine um conjunto autossimilar, o conjunto S formado tem muitas das características de conjuntos autossimilares. Por exemplo, a Figura 10.13.22 mostra como um conjunto do plano que parece uma samambaia (um exemplo tornado famoso por Barnsley) pode ser gerado por quatro transformações afins contrativas. Observe como a samambaia central é a união das quatro samambaias menores que a cercam, que são imagens afins ligeiramente sobrepostas. Também note como T_3, por ter determinante da parte matricial nulo, transforma a samambaia inteira no pequeno segmento de reta que liga os pontos (0,50; 0) e (0,50; 0,16). A Figura 10.13.22 contém muita riqueza de informação e deveria ser estudada cuidadosamente.



▶ **Figura 10.13.22**

Michael Barnsley aplicou essa teoria à área de compressão e transmissão de dados. A samambaia, por exemplo, fica completamente determinada pelas quatro transformações afins T_1, T_2, T_3, T_4. Essas quatro transformações, por sua vez, ficam completamente de-

terminadas pelos 24 números dados na Figura 10.13.22 que definem seus valores de a, b, c, d, e e f. Dito de outra maneira, esses 24 números *codificam* completamente a imagem da samambaia. Armazenar esses 24 números num computador requer consideravelmente menos espaço de memória que armazenar uma descrição pixel por pixel da samambaia. Em princípio, qualquer imagem digitalizada numa tela de monitor pode ser descrita por um número finito de transformações afins, embora não seja fácil determinar quais transformações devemos usar. Mesmo assim, uma vez codificadas, as transformações afins em geral requerem várias ordens de grandeza menos memória de computador que uma descrição pixel por pixel da imagem digitalizada.

Leitura recomendada

Os leitores interessados em aprender mais sobre fractais podem consultar os livros seguintes, o primeiro dos quais elabora a abordagem por transformações lineares apresentada nesta seção.

1. MICHAEL BARNSLEY, *Fractals Everywhere* (Nova York: Academic Press, 1993)

2. BENOIT B. MANDELBROT, *The Fractal Geometry of Nature* (Nova York: W. H. Freeman, 1982)

3. HEINZ-OTTO PEITGEN e P. H. RICHTER, *The Beauty of Fractals* (Nova York: Springer--Verlag, 1986)

4. HEINZ-OTTO PEITGEN e DIETMAR SAUPE, *The Science of Fractal Images* (Nova York: Springer-Verlag, 1988)

Conjunto de exercícios 10.13

1. O conjunto autossimilar da Figura Ex-1 tem os tamanhos indicados. Sabendo que o canto inferior esquerdo está situado na origem do plano xy, encontre as semelhanças que determinam esse conjunto. Qual é sua dimensão de Hausdorff? Esse conjunto é um fractal?

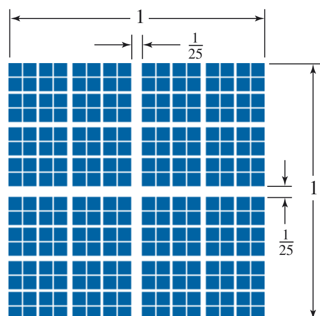


Figura Ex-1

2. Encontre a dimensão de Hausdorff do conjunto autossimilar da Figura Ex-2. Use uma régua para medir a figura e determine um valor aproximado do fator de escala s desse conjunto. Quais são os ângulos de rotação das semelhanças que determinam esse conjunto?



Figura Ex-2

3. Cada um dos 12 conjuntos autossimilares da Figura Ex-3 resulta de três semelhanças de fator de escala $\frac{1}{2}$, de modo que todos têm dimensão de Hausdorff igual a $\ln 3 / \ln 2 = 1{,}584\ldots$. Os ângulos de rotação de todas as três semelhanças são múltiplos de 90°. Encontre os ângulos de rotação de cada conjunto e expresse-os como ternos ordenados (n_1, n_2, n_3) de inteiros, em que n_i é o múltiplo inteiro de 90° correspondente usando a ordem superior direita, inferior esquerda e inferior direita. Por exemplo, o primeiro conjunto (o triângulo de Sierpinski) gera o terno (0, 0, 0).

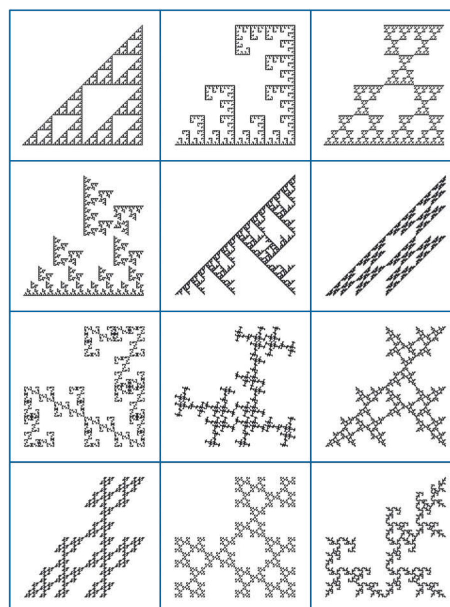
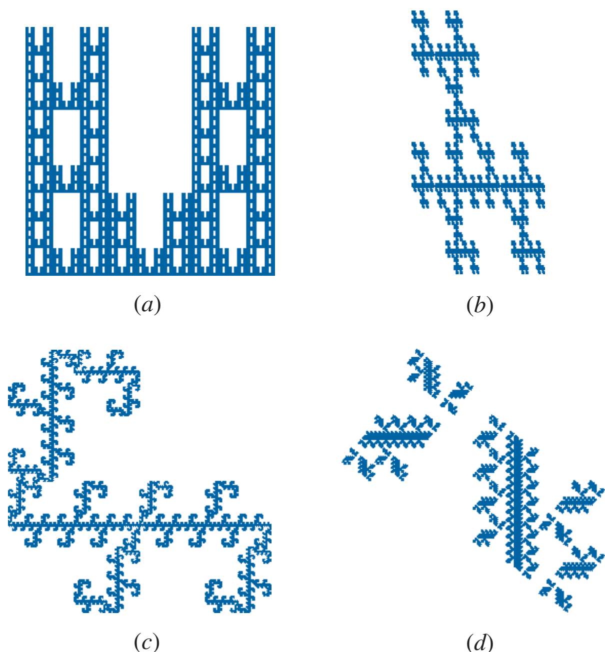


Figura Ex-3

4. Em cada parte da Figura Ex-4, encontre: (i) o fator de escala s das semelhanças que descrevem o conjunto autossimilar dado; (ii) os ângulos de rotação θ de todas as semelhanças que descrevem o conjunto (todos os ângulos de rotação são múltiplos de 90°); e (iii) a dimensão de Hausdorff do conjunto. Quais desses conjuntos são fractais e por quê?



▲ **Figura Ex-4**

5. Mostre que, das quatro transformações afins mostradas na Figura 10.13.22, somente a transformação T_2 é uma semelhança. Encontre seu fator de escala s e o ângulo de rotação θ.

6. Encontre as coordenadas da pontinha da samambaia da Figura 10.13.22. [*Sugestão*: a transformação T_2 aplica a ponta da samambaia nela mesma.]

7. O quadrado na Figura 10.13.7*a* foi expresso como a união de quatro quadrados não sobrepostos indicados na Figura 10.13.7*b*. Suponha agora que o quadrado seja expresso como a união de 16 quadrados não sobrepostos. Verifique se sua dimensão de Hausdorff continua sendo 2, conforme determina a Equação (2).

8. Mostre que as quatro semelhanças

$$T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{3}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

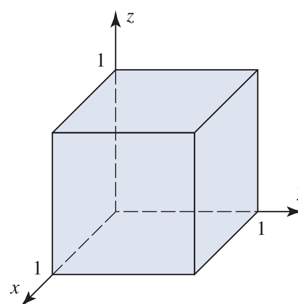
$$T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{3}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{3}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$T_4\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{3}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

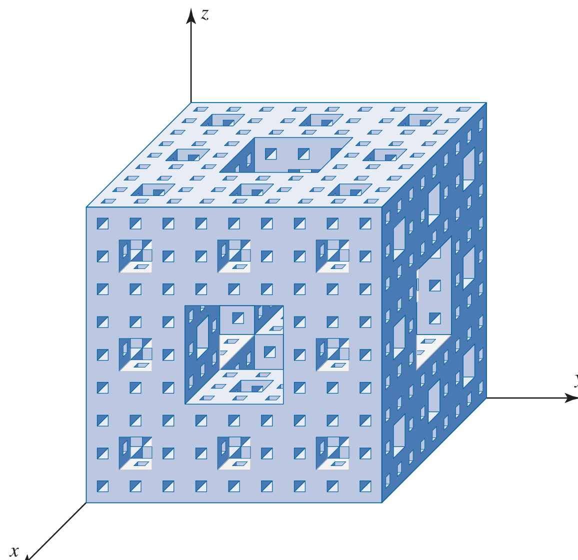
expressam o quadrado unitário como a união de quatro quadrados *sobrepostos*. Calcule o lado direito da Equação (2) para os valores de k e s determinados por essas semelhanças e mostre que o resultado não é o valor correto da dimensão de Hausdorff do quadrado. [*Observação*: este exercício mostra a necessidade da exigir que os conjuntos sejam não sobrepostos na definição de conjuntos autossimilares e suas dimensões de Hausdorff.]

9. Todos os resultados desta seção podem ser estendidos ao R^n. Calcule a dimensão de Hausdorff do cubo unitário em R^3 (ver Figura Ex-9). Sabendo que a dimensão topológica do cubo é 3, decida se esse cubo é um fractal. [*Sugestão*: expresse o cubo unitário como a união de 8 cubos menores congruentes e não sobrepostos.]



◄ **Figura Ex-9**

10. O conjunto em R^3 da Figura Ex-10 é um conjunto autossimilar denominado ***esponja de Menger*** obtido pela remoção de certos buracos cúbicos do cubo unitário. Observe que cada face da esponja de Menger é um tapete de Sierpinski e que os buracos do tapete de Sierpinski agora atravessam toda a esponja de Menger. Determine os valores de k e s para a esponja de Menger e obtenha sua dimensão de Hausdorff. A esponja de Menger é um fractal?



▲ **Figura Ex-10**

11. As duas semelhanças

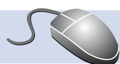
$$T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e

$$T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

determinam um fractal conhecido como ***conjunto de Cantor***. Começando com o quadrado unitário U como conjunto inicial, esboce os quatro primeiros conjuntos determinados pelo Algoritmo 1. Em seguida, obtenha a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor. (Esse conjunto famoso foi o primeiro exemplo que Hausdorff forneceu, em seu artigo de 1919, de um conjunto cuja dimensão de Hausdorff não coincide com sua dimensão topológica.)

12. Calcule as áreas dos conjuntos S_0, S_1, S_2, S_3 e S_4 da Figura 10.13.15.



Seção 10.13 Exercícios com tecnologia

Os exercícios seguintes foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, esse recurso é MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser algum outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidades de Álgebra Linear. Em cada exercício, você deverá ler a documentação pertinente do recurso particular que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você estará capacitado a usar seu recurso computacional para resolver muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Use semelhanças da forma

$$T_i\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}$$

para mostrar que a esponja de Menger (Exercício 10) é o conjunto S dado por

$$S = \bigcup_{i=1}^{20} T_i(S)$$

com semelhanças T_i (e $i = 1, 2, 3, \ldots, 20$) convenientemente escolhidas. Determine essas semelhanças determinando a coleção de matrizes 3×1

$$\left\{\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} \middle| \text{ com } i = 1, 2, 3, \ldots, 20\right\}$$

T2. Generalize ao R^n as ideias envolvidas no conjunto de Cantor (em R^1), no tapete de Sierpinski (em R^2) e na esponja de Menger (em R^3), considerando o conjunto S dado por

$$S = \bigcup_{i=1}^{m_n} T_i(S)$$

com

$$T_i\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

e cada constante a igual a 0, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$, mas nunca duas delas iguais a $\frac{1}{3}$ ao mesmo tempo. Use um computador para construir o conjunto

$$\left\{\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} \middle| \text{ com } i = 1, 2, 3, \ldots, m_n\right\}$$

e, com isso, determinar o valor de m_n com $n = 2, 3, 4$. Em seguida, obtenha uma expressão para m_n.

10.14 Caos

Nesta seção, usamos uma transformação do quadrado unitário do plano xy sobre si mesmo para descrever o conceito de aplicação caótica.

PRÉ-REQUISITO: Geometria de operadores lineares em R^2 (Seção 4.11)
Autovetores e autovalores
Compreensão intuitiva de limites e continuidade

Caos

A palavra ***caos*** apareceu pela primeira vez na literatura matemática em 1975, num artigo (em inglês) de Tien-Yien Li e James Yorke, intitulado “Período Três Implica Caos”. Hoje, o termo é utilizado para descrever certas transformações na Matemática e certos fenômenos físicos

que, à primeira vista, parecem ter um comportamento aleatório e desordenado, mas que, na verdade, têm um elemento subjacente de ordem bem determinado (como, por exemplo, geração aleatória de números, embaralhar as cartas de um baralho, arritmia cardíaca, vibração das asas de um avião em voo, mudanças na mancha vermelha de Júpiter e aberrações da órbita de Plutão). Nesta seção, estudamos uma transformação caótica específica, conhecida como a ***transformação do gato de Arnold***, em referência ao matemático russo Vladimir I. Arnold, que foi o primeiro a usar o esboço de um gato para a sua descrição.

A transformação do gato de Arnold

Para descrever a transformação do gato de Arnold, precisamos de algumas técnicas da ***aritmética modular***. Se x for um número real, então a notação x mod 1 denota o único número no intervalo $[0, 1)$ que difere de x por um número inteiro. Por exemplo,

$$2{,}3 \bmod 1 = 0{,}3; \quad 0{,}9 \bmod 1 = 0{,}9; \quad -3{,}7 \bmod 1 = 0{,}3; \quad 2{,}0 \bmod 1 = 0$$

Observe que, se x for um número real não negativo, então x mod 1 é simplesmente a parte fracionária de x. Se (x, y) for um par ordenado de números reais, então a notação (x, y) mod 1 denota o par (x mod 1, y mod 1). Por exemplo,

$$(2{,}3; -7{,}9) \bmod 1 = (0{,}3; 0{,}1)$$

Observe que o ponto x mod 1 é um ponto do intervalo $[0, 1)$, qualquer que seja o número real x, e que o ponto (x, y) mod 1 é um ponto do quadrado unitário

$$S = \{(x, y) \mid 0 \le x < 1, 0 \le y < 1\}$$

qualquer que seja o par ordenado (x, y). Note que as arestas superior e da direita do quadrado não estão incluídas em S.

A transformação do gato de Arnold é a aplicação $\Gamma : R^2 \to R^2$ definida pela fórmula

$$\Gamma : (x, y) \to (x + y, x + 2y) \bmod 1$$

ou, em notação matricial, por

$$\Gamma\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \bmod 1 \tag{1}$$

Para entender a geometria da transformação do gato de Arnold, é conveniente escrever (1) na forma fatorada

$$\Gamma\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \bmod 1$$

que expressa a transformação do gato de Arnold como a composição de um cisalhamento na direção x de fator 1 seguido de um cisalhamento na direção y de fator 1. Como as contas são feitas mod 1, a aplicação Γ transforma cada ponto de R^2 num ponto do quadrado unitário S.

Ilustramos o efeito da transformação do gato de Arnold no quadrado unitário S que, na Figura 10.14.1*a*, aparece sombreado e contendo a imagem de um gato. Pode ser mostrado que não importa quando é feita a conta mod 1, se depois de cada cisalhamento ou somente no final das contas. Vejamos ambos os métodos, começando com a conta mod 1 somente no fim. Os passos são os seguintes.

Passo 1. Cisalhamento na direção x de fator 1 (Figura 10.14.1*b*):

$$(x, y) \to (x + y, y)$$

ou, em notação matricial,

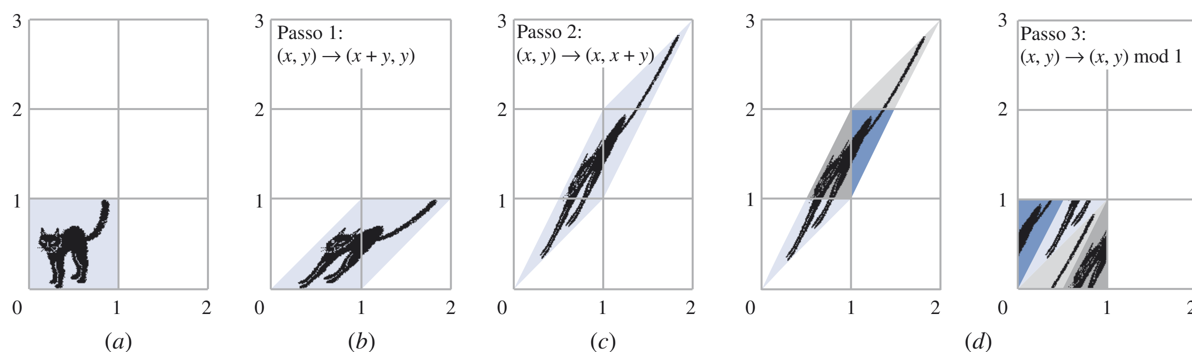
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ y \end{bmatrix}$$

Passo 2. Cisalhamento na direção y de fator 1 (Figura 10.14.1*c*):

$$(x, y) \to (x, x + y)$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x + y \end{bmatrix}$$



▲ **Figura 10.14.1**

Passo 3. Reagrupar no quadrado S (Figura 10.14.1*d*):

$$(x, y) \to (x, y) \bmod 1$$

O efeito geométrico da aritmética mod 1 é o de quebrar o paralelogramo da Figura 10.14.1*c* e reagrupar os pedaços de S conforme indicado na Figura 10.14.1*d*.

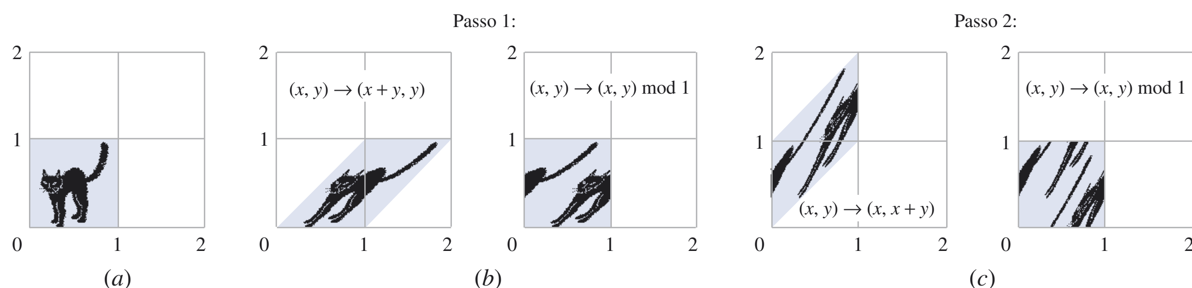
Para implementação em computador, é mais conveniente efetuar a aritmética mod 1 em cada passo, em vez de somente no final. Dessa maneira, obtemos um reagrupamento em cada passo, mas o efeito final é o mesmo. Os passos são os seguintes.

Passo 1. Cisalhamento na direção x de fator 1, seguido de um reagrupamento em S (Figura 10.14.2*b*):

$$(x, y) \to (x + y, y) \bmod 1$$

Passo 2. Cisalhamento na direção y de fator 1, seguido de um reagrupamento em S (Figura 10.14.2*c*):

$$(x, y) \to (x, x + y) \bmod 1$$



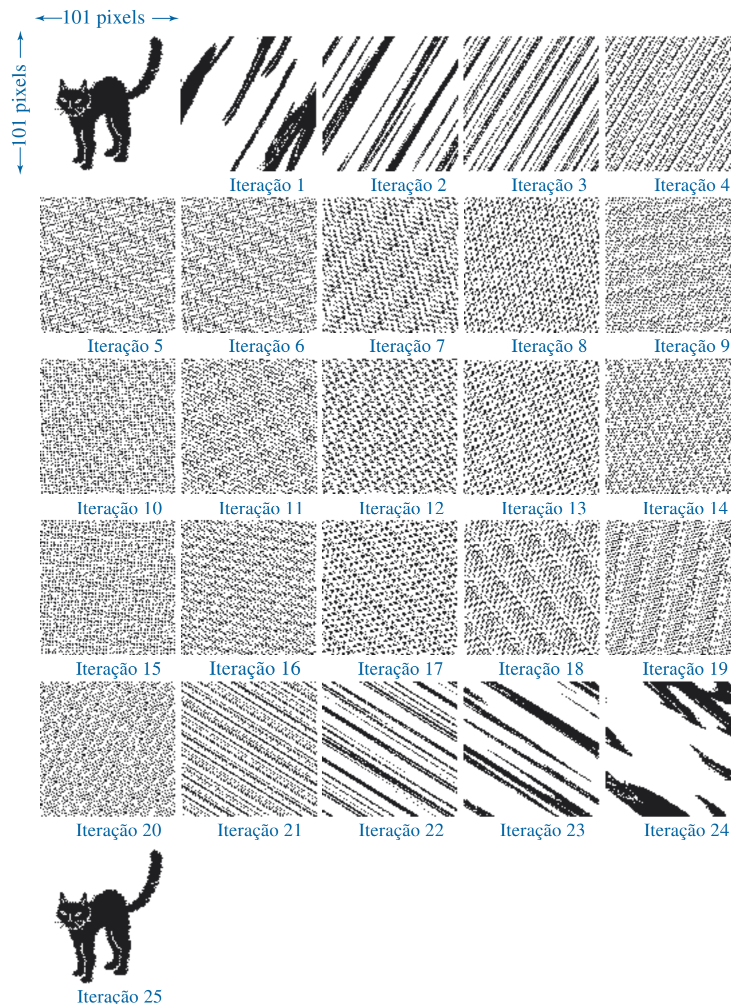
▲ **Figura 10.14.2**

Aplicações repetidas

Aplicações caóticas como a transformação do gato de Arnold em geral surgem em modelos físicos em que uma certa operação é executada repetidamente. Por exemplo, as cartas de um baralho são misturadas por embaralhamento repetido, uma tinta é misturada por movimentos rotatórios repetidos de, por exemplo, uma colher, a água numa baía é misturada por mudanças repetidas da maré, e assim por diante. Desse modo, estamos interessados em examinar o efeito de aplicações repetidas, ou ***iterações***, da transformação do gato de Arnold. A Figura 10.14.3, que foi gerada em computador, mostra o efeito de 25 iterações da transformação do gato de Arnold sobre o quadrado unitário S. Ocorrem dois fenômenos interessantes, como segue.

- O gato retorna à sua posição original na 25ª iteração.
- Em algumas das iterações intermediárias, o gato está decomposto em faixas que parecem ter uma direção específica.

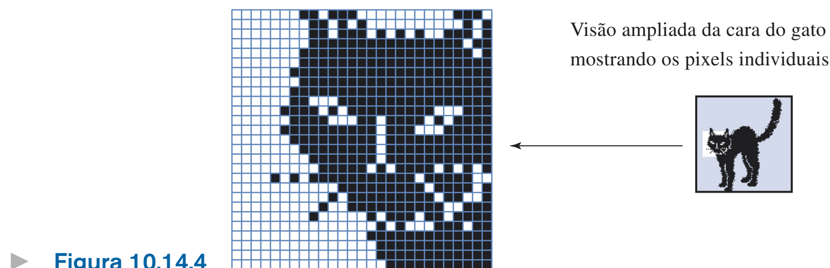
Muito do restante desta seção é dedicado a explicar esses fenômenos.



▲ **Figura 10.14.3**

Pontos periódicos

Nosso primeiro objetivo é explicar por que o gato na Figura 10.14.3 retorna à sua configuração original na 25ª iterada. Para isso, convém pensar numa ***imagem*** no plano *xy* como sendo uma associação de cores aos pontos do plano. Para a geração de imagens numa tela de monitor, ou em qualquer outra digitalização, as limitações impostas pelo *hardware* exigem que a imagem seja repartida em quadrados discretos denominados ***pixels***. Por exemplo, nas imagens geradas por computador da Figura 10.14.3, o quadrado unitário foi dividido num reticulado de 101 pixels por lado, num total de 10.201 pixels, cada um dos quais é preto ou branco (Figura 10.14.4). Uma ***aplicação de pixels*** é uma associação de cores a pixels para criar uma imagem.



▶ **Figura 10.14.4**

Como mostra a Figura 10.14.5, a cada pixel em S podemos associar um único par de coordenadas da forma $(m/101, n/101)$ que identifica o canto inferior à esquerda, e em que m e n são números inteiros do intervalo $0, 1, 2, \ldots, 100$. Dizemos que esses pontos são os ***pontos de pixel***, pois cada um identifica exatamente um único pixel. Em vez de restringir o estudo ao caso em que S foi subdividido num reticulado de 101 pixels em cada lado, vamos considerar o caso mais geral de p pixels em cada lado. Assim, cada aplicação de pixels de S consiste em p^2 pixels uniformemente espaçados a cada $1/p$ unidades em ambas direções x e y. Os pontos de pixel em S têm coordenadas da forma $(m/p, n/p)$, em que m e n são números inteiros de 0 a $p - 1$.

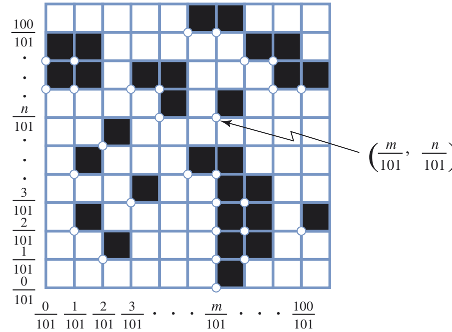


Figura 10.14.5

Sob a ação da transformação do gato de Arnold, cada ponto de pixel de S é transformado num outro ponto de pixel de S. Para ver por que isso acontece, observe que a imagem por $(m/p, n/p)$ do ponto de pixel Γ é dada, em formato matricial, por

$$\Gamma\left(\begin{bmatrix} \dfrac{m}{p} \\ \dfrac{n}{p} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{m}{p} \\ \dfrac{n}{p} \end{bmatrix} \bmod 1 = \begin{bmatrix} \dfrac{m+n}{p} \\ \dfrac{m+2n}{p} \end{bmatrix} \bmod 1 \qquad (2)$$

O par ordenado $((m + n)/p, (m + 2n)/p)$ é da forma $(m'/p, n'/p)$, em que m' e n' estão no intervalo $0, 1, 2, \ldots, p - 1$. Mais especificamente, m' e n' são o resto da divisão de $m + n$ e $m + 2n$ por p, respectivamente. Consequentemente, cada ponto de S da forma $(m/p, n/p)$ é transformado num outro ponto dessa forma.

Como a transformação do gato de Arnold transforma cada ponto de pixel de S num outro ponto de pixel de S, e como existem somente p^2 pontos de pixel distintos em S, segue que um ponto de pixel arbitrário deve retornar à sua posição original depois de, no máximo, p^2 iterações da transformação do gato de Arnold.

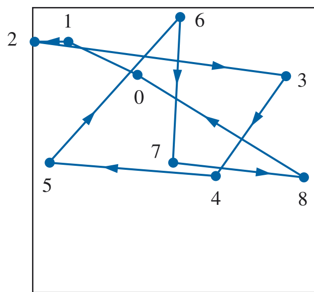
▶ EXEMPLO 1 Usando a Fórmula (2)

Se $p = 76$, então (2) é dada por

$$\Gamma\left(\begin{bmatrix} \dfrac{m}{76} \\ \dfrac{n}{76} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{m+n}{76} \\ \dfrac{m+2n}{76} \end{bmatrix} \bmod 1$$

Nesse caso, as iterações sucessivas do ponto $\left(\frac{27}{76}, \frac{58}{76}\right)$ são

$$\underset{0}{\begin{bmatrix} \frac{27}{76} \\ \frac{58}{76} \end{bmatrix}} \to \underset{1}{\begin{bmatrix} \frac{9}{76} \\ \frac{67}{76} \end{bmatrix}} \to \underset{2}{\begin{bmatrix} \frac{0}{76} \\ \frac{67}{76} \end{bmatrix}} \to \underset{3}{\begin{bmatrix} \frac{67}{76} \\ \frac{58}{76} \end{bmatrix}} \to \underset{4}{\begin{bmatrix} \frac{49}{76} \\ \frac{31}{76} \end{bmatrix}} \to \underset{5}{\begin{bmatrix} \frac{4}{76} \\ \frac{35}{76} \end{bmatrix}} \to \underset{6}{\begin{bmatrix} \frac{39}{76} \\ \frac{74}{76} \end{bmatrix}} \to \underset{7}{\begin{bmatrix} \frac{37}{76} \\ \frac{35}{76} \end{bmatrix}} \to \underset{8}{\begin{bmatrix} \frac{72}{76} \\ \frac{31}{76} \end{bmatrix}}$$



▲ **Figura 10.14.6**

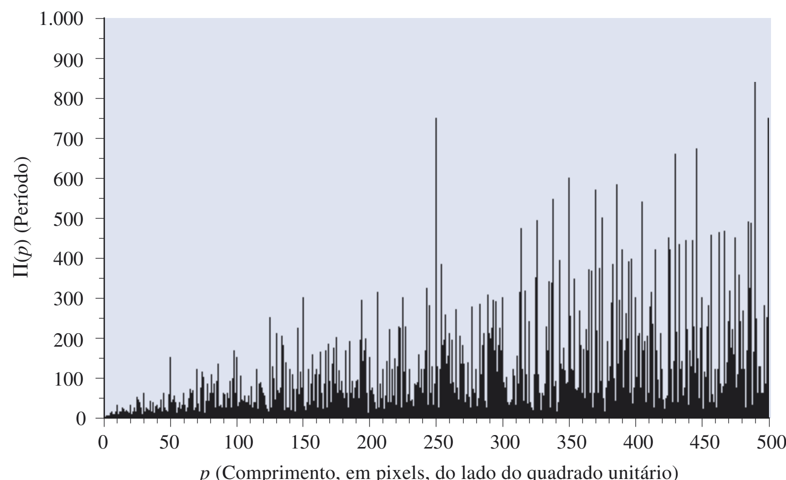
(verifique). Como o ponto retorna à sua posição inicial na nona aplicação da transformação do gato de Arnold (mas não antes), dizemos que o ponto tem período 9 e que o conjunto de nove iteradas distintas é um ciclo de período 9. A Figura 10.14.6 mostra a localização desse ciclo com o ponto inicial denotado por 0 e as sucessivas iteradas numeradas de acordo. ◀

Em geral, se um ponto retornar à sua posição inicial depois de n aplicações da transformação do gato de Arnold, mas não retornar com menos de n aplicações, dizemos que o ponto tem ***período n*** e que o conjunto de n iteradas distintas é um ***ciclo de período n***. A transformação do gato de Arnold transforma (0, 0) em (0, 0), de modo que esse ponto tem período 1. Pontos com período 1 também são denominados ***pontos fixos*** da transformação. Deixamos para o leitor mostrar (Exercício 11) que (0, 0) é o único ponto fixo da transformação do gato de Arnold.

Período versus *largura de pixel*

Se P_1 e P_2 forem pontos de períodos q_1 e q_2, respectivamente, então P_1 retorna à sua posição inicial em q_1 iterações (mas não antes) e P_2 retorna à sua posição inicial em q_2 iterações (mas não antes); assim, ambos os pontos retornam às suas posições iniciais em qualquer número de iterações que seja um múltiplo tanto de q_1 quanto de q_2. Em geral, para uma aplicação de pixels de p^2 pontos de pixel da forma $(m/p, n/p)$, denotamos por $\Pi(p)$ o menor número inteiro que for um múltiplo comum de todos os períodos de todos os pontos de pixel da aplicação [ou seja, $\Pi(p)$ é o menor inteiro divisível por todos os períodos]. Segue que a aplicação de pixels retorna à sua posição inicial em $\Pi(p)$ iterações da transformação do gato de Arnold (mas não antes). Por esse motivo, dizemos que $\Pi(p)$ é o ***período da aplicação de pixels***. No Exercício 4, pedimos para o leitor mostrar que, se $p = 101$, então todos os pontos de pixel têm períodos 1, 5 ou 25, de modo que $\Pi(101) = 25$. Isso explica por que o gato na Figura 10.14.3 voltou à sua configuração inicial em 25 iterações.

A Figura 10.14.7 mostra como o período de uma aplicação de pixels varia com p. Enquanto a tendência geral do período é crescer com p crescente, há uma quantidade surpreendente de irregularidades nesse gráfico. De fato, não há nenhuma função elementar que especifica esse relacionamento de p com o período (ver Exercício 1).



▶ **Figura 10.14.7**

Embora uma aplicação de pixels com p pixels por lado não retorne à sua configuração inicial até que tenham ocorrido $\Pi(p)$ iterações, várias coisas inesperadas podem ocorrer em iterações intermediárias. Por exemplo, a Figura 10.14.8 mostra o famoso matemático húngaro-norte-americano John von Neumann digitalizado numa aplicação de pixels com

$p = 250$. Pode ser mostrado que $\Pi(250) = 750$, de modo a aplicação desses pixels retorna à sua configuração inicial depois de 750 iterações da transformação do gato de Arnold (mas não antes). Contudo, depois de 375 iterações, a aplicação de pixels aparece de cabeça para baixo e, depois de outras 375 iterações (para um total de 750), a aplicação de pixels retorna à sua configuração inicial. Além disso, há tantos pontos de pixel com períodos que dividem 750 que múltiplas imagens fantasmas do original ocorrem em iterações intermediárias; com 195 iterações, por exemplo, aparecem várias miniaturas do original em filas diagonais.

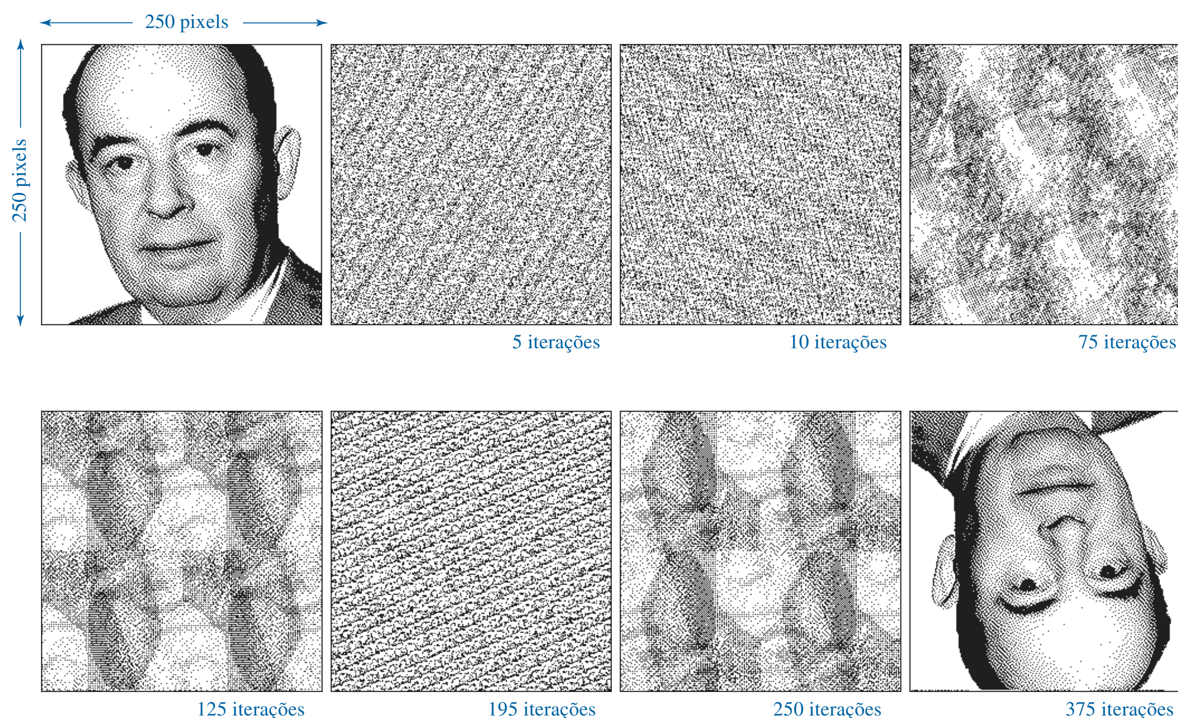
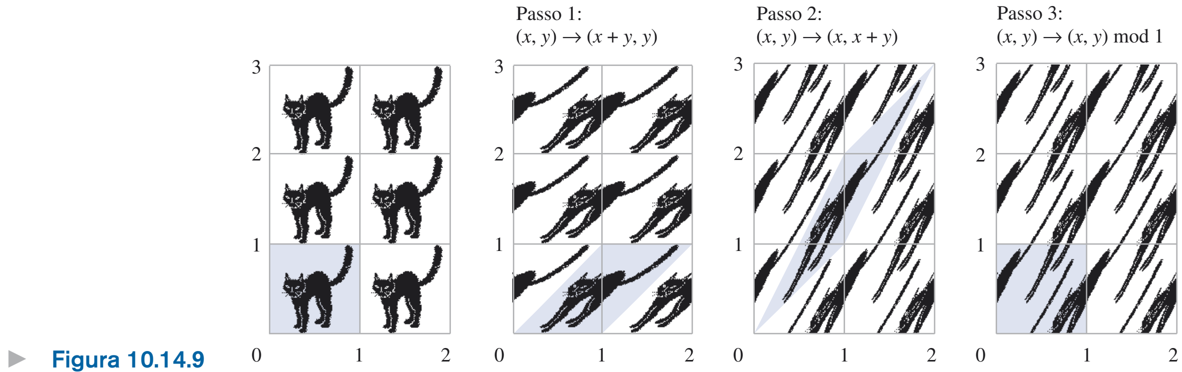


Figura 10.14.8

O plano ladrilhado

Nosso próximo objetivo é explicar a causa das faixas retas que aparecem na Figura 10.14.3. Para isso, convém ver a transformação do gato de Arnold de uma maneira diferente. Da maneira como foi definida, a transformação do gato de Arnold não é uma transformação linear, por causa da aritmética mod 1. Contudo, existe uma maneira alternativa de definir a transformação do gato de Arnold que evita a aritmética mod 1 e que resulta numa transformação linear. Para ver isso, imagine que o quadrado unitário S com sua imagem de gato é um ladrilho e suponha que o plano inteiro esteja coberto com tais ladrilhos, como na Figura 10.14.9. Dizemos que o plano foi ***ladrilhado*** com o quadrado unitário. Se aplicarmos a transformação matricial de (1) ao plano inteiro ladrilhado, sem efetuar a aritmética mod 1, então pode ser mostrado que a porção da imagem em S é idêntica à obtida usando a aritmética mod 1 (Figura 10.14.9). Resumindo, o ladrilhamento fornece a mesma aplicação de pixels de S que a aritmética mod 1, mas, no caso de ladrilhamento, a transformação do gato de Arnold é uma transformação linear.

É importante entender, contudo, que o ladrilhamento e a aritmética mod 1 veem a periodicidade de maneira diferente. Se uma aplicação de pixels de S tem período n, então, no caso de aritmética mod 1, cada ponto retorna à sua posição original no fim das n iterações. No caso de ladrilhamento, os pontos não precisam retornar à sua posição original; em vez disso, cada ponto é substituído por um ponto da mesma cor ao final de n iterações.



▶ **Figura 10.14.9**

Propriedades da transformação do gato de Arnold

Para entender a causa das faixas na Figura 10.14.3, pense na transformação do gato de Arnold como uma transformação linear do plano ladrilhado. Observe que a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

que define a transformação do gato de Arnold é simétrica e tem determinante 1. Por ser 1 esse determinante, a multiplicação por essa matriz preserva áreas; ou seja, a área de qualquer figura no plano e a área de sua imagem são iguais. Isso também vale para figuras em S no caso da aritmética mod 1, pois o efeito da aritmética mod 1 é a de recortar a figura e reagrupar os pedaços sem sobreposição, como mostra a Figura 10.14.1*d*. Assim, na Figura 10.14.3, a área do gato (seja lá o que for) é a mesma que a área total das manchas que são sua imagem em cada iteração.

A simetria da matriz significa que seus autovalores são reais e que os autovetores correspondentes são perpendiculares. Deixamos para o leitor conferir que os autovalores e autovetores correspondentes de C são

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2{,}6180\ldots, \qquad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0{,}3819\ldots,$$

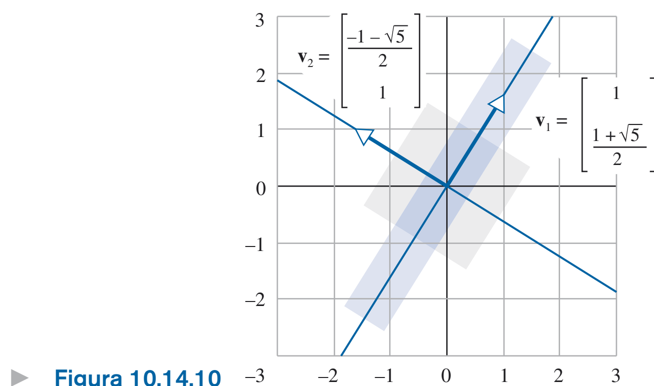
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}6180\ldots \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}6180\ldots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em cada aplicação da transformação do gato de Arnold, o autovalor λ_1 causa uma dilatação na direção do autovetor $\mathbf{v}_1$ de fator 2,6180. . . e o autovalor λ_2 causa uma contração na direção do autovetor $\mathbf{v}_2$ de fator 0,3819. . . . A Figura 10.14.10 mostra um quadrado centrado na origem e de lados paralelos às direções dadas pelos autovetores. Sob a ação da transformação dada, o quadrado é deformado no retângulo de lados ainda paralelos às direções dos autovetores. As áreas do quadrado e do retângulo são iguais.

Para explicar a causa das faixas na Figura 10.14.3, considere S como uma parte do plano ladrilhado e seja $\mathbf{p}$ um ponto de S de período n. Por estarmos considerando um ladrilhamento, existe um ponto $\mathbf{q}$ com a mesma cor de $\mathbf{p}$ e que, com sucessivas iterações, dirige-se à posição inicialmente ocupada por $\mathbf{p}$, alcançando essa posição exatamente na enésima iterada. Esse ponto é $\mathbf{q} = (C^{-1})^n\,\mathbf{p} = C^{-n}\,\mathbf{p}$, pois

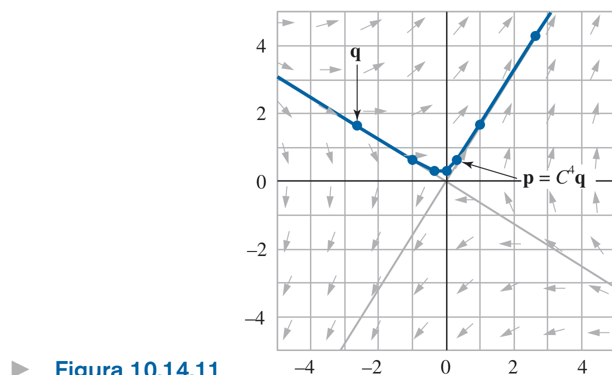
$$C^n\,\mathbf{q} = C^n\,(C^{-n}\,\mathbf{p}) = \mathbf{p}$$

Assim, com iterações sucessivas, os pontos de S fluem para longe de suas posições iniciais, enquanto, ao mesmo tempo, outros pontos do plano (com cores correspondentes) fluem em direção daquelas posições iniciais, completando sua viagem na iteração final do ciclo. A Figura 10.14.11 ilustra isso no caso de $n = 4$, $\mathbf{q} = \left(-\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$ e $\mathbf{p} = C^4\,\mathbf{q} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Observe que $\mathbf{p}$ mod 1 $= \mathbf{q}$ mod 1 $= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, de modo que ambos os pontos ocupam a mes-



▶ **Figura 10.14.10**

ma posição em seus respectivos ladrilhos. O ponto que se afasta flui na direção aproximada do autovetor $\mathbf{v}_2$, como indicado pelas flechas na Figura 10.14.11, e o ponto que se aproxima flui na direção aproximada do autovetor $\mathbf{v}_2$. São essas "linhas de fluxo" nas direções aproximadas dos autovetores que formam as faixas na Figura 10.14.3.



▶ **Figura 10.14.11**

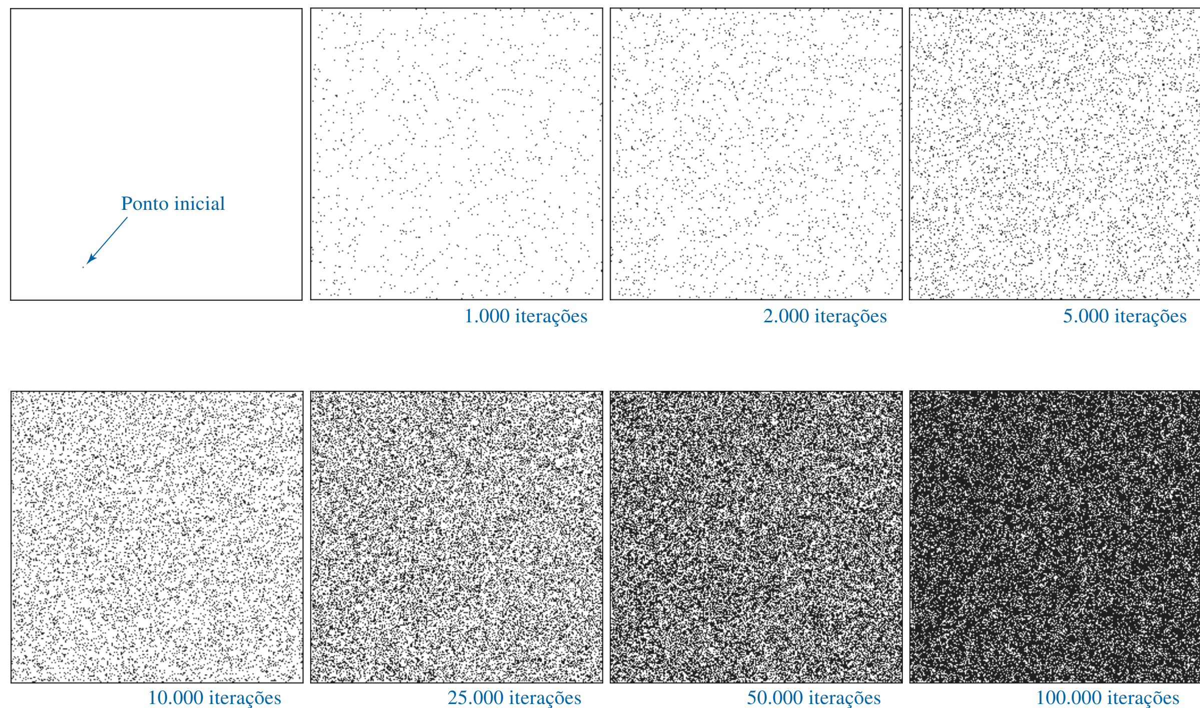
Pontos não periódicos

Até aqui, somente consideramos a ação da transformação do gato de Arnold em pixels da forma $(m/p, n/p)$ com um número inteiro positivo p arbitrário. Sabemos que todos esses pontos são periódicos. Agora vamos considerar o efeito da transformação do gato de Arnold num ponto arbitrário (a, b) de S. Classificamos esses pontos como racionais se as coordenadas a e b forem ambas números racionais e irracionais se pelo menos uma das coordenadas for irracional. Cada ponto racional é periódico, pois é um ponto de pixel com p convenientemente escolhido. Por exemplo, o ponto racional $(r_1/s_1, r_2/s_2)$ pode ser escrito como $(r_1s_2/s_1s_2, r_2s_1/s_1s_2)$ e, portanto, é um ponto de pixel com $p = s_1s_2$. Pode ser mostrado (Exercício 13) que a recíproca também vale, ou seja, todos os pontos periódicos são pontos racionais.

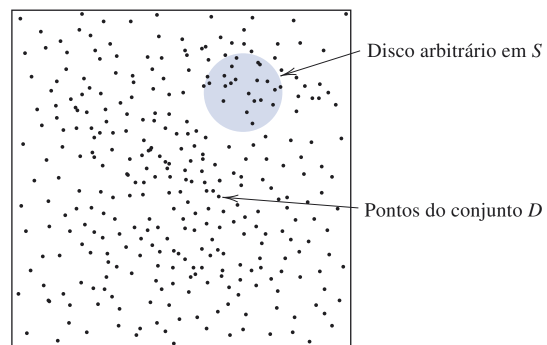
Segue dessa discussão que os pontos irracionais de S são não periódicos, de modo que, iterando sucessivamente um ponto irracional (x_0, y_0) em S, devemos sempre obter pontos distintos em S. A Figura 10.14.12, que foi gerada em computador, mostra um ponto irracional e algumas iteradas selecionadas até 100.000. Para o ponto irracional particular que selecionamos, as iteradas não parecem se acumular em nenhuma região específica de S; em vez disso, parece que elas se espalham por todo S, tornando-se cada vez mais densas com sucessivas iterações.

O comportamento das iteradas na Figura 10.14.12 é suficientemente importante para ter sua própria terminologia. Dizemos que um conjunto D de pontos de S é ***denso em S*** se cada disco centrado em qualquer ponto de S contiver pontos de D, por menor que seja

o raio do disco (Figura 10.14.13). Pode ser mostrado que os pontos racionais são densos em S e que o conjunto das iteradas da maioria dos (mas não de todos) pontos irracionais é denso em S.



▲ **Figura 10.14.12**



▶ **Figura 10.14.13**

Definição de caos

Sabemos que, para a transformação do gato de Arnold, os pontos racionais de S são periódicos e densos em S e que muitos, mas não todos, pontos irracionais têm iteradas densas em S. Esses são os ingredientes básicos do caos. Existem várias definições de caos atualmente em uso, mas a seguinte, que deriva de uma definição introduzida por Robert L. Devaney em seu livro *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc), de 1986, é a mais relacionada com nosso trabalho.

DEFINIÇÃO 1 Uma aplicação T de um conjunto S sobre si mesmo é dita ***caótica*** se

(i) S contiver algum conjunto denso de pontos periódicos de T

(ii) e existir algum ponto em S cujas iteradas por T são densas em S.

Assim, a transformação do gato de Arnold satisfaz a definição de aplicação caótica. O que é notável sobre essa definição é que uma aplicação caótica exibe um elemento de ordem e um elemento de desordem, pois os pontos periódicos se movem regularmente em ciclos, mas os pontos com iteradas densas se movem irregularmente, muitas vezes obscurecendo a regularidade dos pontos periódicos. Essa fusão de ordem e desordem caracteriza as aplicações caóticas.

Sistemas dinâmicos

Aplicações caóticas surgem no estudo de ***sistemas dinâmicos***. Dito informalmente, um sistema dinâmico pode ser visto como um sistema que tem uma configuração ou estado específico em cada instante de tempo, mas que muda seu estado com o tempo. Dessa maneira podem ser entendidos sistemas químicos, ecológicos, elétricos, biológicos, econômicos, etc. Num ***sistema dinâmico discreto***, o estado muda em pontos discretos do tempo em vez de mudar a cada instante. Num ***sistema dinâmico discreto caótico***, cada estado resulta de uma aplicação caótica do estado precedente. Por exemplo, considerando a transformação do gato de Arnold aplicada em instantes discretos do tempo, as aplicações de pixels da Figura 10.14.3 podem ser vistas como a evolução de um sistema dinâmico discreto caótico a partir de um conjunto de estados iniciais (cada ponto do gato é um estado inicial isolado) para conjuntos de estados sucessivos.

Um dos problemas fundamentais no estudo de sistemas dinâmicos é prever estados futuros do sistema a partir de um estado inicial conhecido. Na prática, contudo, o estado inicial exato é raramente conhecido por causa de erros nos instrumentos utilizados na medição do estado inicial. Acreditava-se, há algum tempo, que se os instrumentos de medição fossem suficientemente precisos e os computadores usados para efetuar as iterações fossem suficientemente poderosos, então o estado futuro de um sistema poderia ser predito com qualquer grau de precisão. No entanto, a descoberta de sistemas caóticos estraçalhou essa crença, pois foi mostrado que, com tais sistemas, por menor que seja o erro de medição no estado inicial ou no cálculo das iteradas, esse erro inicial é ampliado exponencialmente, impedindo, com isso, uma predição precisa de estados futuros. Vamos demonstrar essa ***sensitividade a condições iniciais*** com a transformação do gato de Arnold.

Suponha que P_0 seja um ponto do plano xy cujas coordenadas exatas são (0,77837; 0,70904). Fazemos um erro de medição de 0,00001 na coordenada y, de modo que pensamos que o ponto está localizado em (0,77837; 0,70905), que denotamos por Q_0. P_0 e Q_0 são pontos de pixel com $p = 100.000$ (por quê?) e, portanto, ambos retornam à sua posição inicial depois de 75.000 iteradas, já que Π (100.000) = 75.000. Na Figura 10.14.14, indicamos as primeiras 50 iterações de P_0 pela transformação do gato de Arnold por cruzes e as de Q_0 por círculos. Mesmo estando tão próximos inicialmente que seus símbolos se sobreponham, os pontos P_0 e Q_0 somente têm símbolos sobrepostos até a oitava iterada; a partir da nona iterada, suas iteradas seguem caminhos divergentes.

É possível quantificar o crescimento do erro a partir dos autovalores e autovetores da transformação do gato de Arnold. Para isso, pensamos na transformação do gato de Arnold como uma transformação linear do plano ladrilhado. Lembre da Figura 10.14.10 e da discussão pertinente, em que vimos que a distância entre dois pontos de S, projetada na direção do autovetor $\mathbf{v}_1$, cresce pelo fator 2,6180. . . $(= \lambda_1)$ com cada iteração (Figura 10.14.15). Depois de nove iteradas, essa distância projetada aumenta pelo fator $(2{,}6180\ldots)^9 = 5.777{,}99\ldots$ e, com um erro inicial de aproximadamente 1 / 100.000 na direção de $\mathbf{v}_1$, essa distância é 0,0577. . . , ou seja, aproximadamente $\frac{1}{17}$ da largura do quadrado unitário S. Depois de doze iterações, esse pequeno erro cresce a $(2{,}6180\ldots)^{12}$ / 100.000 = 1,0368. . . , que é maior que a largura de S. Assim, devido ao crescimento exponencial do erro inicial, depois de 12 iterações perdemos completamente o controle sobre as verdadeiras posições das iteradas dentro de S.

Embora a sensitividade a condições iniciais limite a possibilidade de predizer a evolução futura de sistemas dinâmicos, novas técnicas estão atualmente sendo investigadas para descrever a evolução futura de maneiras alternativas.

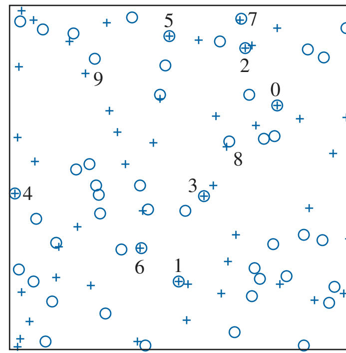


Figura 10.14.14

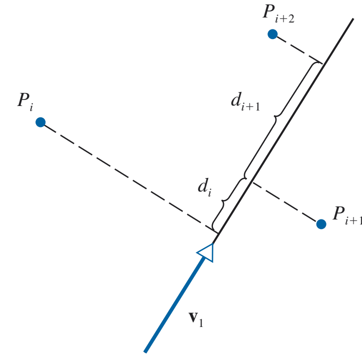


Figura 10.14.15

Conjunto de exercícios 10.14

1. Os resultados seguintes sobre a natureza da função $\Pi(p)$ foram estabelecidos num artigo de uma revista periódica matemática norte-americana [F. J. Dyson e H. Falk, "Period of a Discrete Cat Mapping," *The American Mathematical Monthly*, Vol. 99, agosto-setembro de 1992, páginas 603–614]:

(i) $\Pi(p) = 3p$ se, e só se, $p = 2 \cdot 5^k$ com $k = 1, 2, \ldots$

(ii) $\Pi(p) = 2p$ se, e só se, $p = 5^k$ com $k = 1, 2, \ldots$, ou $p = 6 \cdot 5^k$ com $k = 0, 1, 2, \ldots$

(iii) $\Pi(p) \leq 12p/7$ qualquer que seja a escolha de p.

Encontre $\Pi(250)$, $\Pi(25)$, $\Pi(125)$, $\Pi(30)$, $\Pi(10)$, $\Pi(50)$, $\Pi(3.750)$, $\Pi(6)$ e $\Pi(5)$.

2. Encontre todos os ciclos de período n que sejam subconjuntos dos 36 pontos de S da forma $(m/6, n/6)$ com m e n no intervalo 0, 1, 2, 3, 4, 5. Em seguida, encontre $\Pi(6)$.

3. (***Gerador de Fibonacci de números aleatórios***) Um método bem conhecido de gerar números inteiros "pseudoaleatórios" $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ no intervalo de 0 a $p - 1$ tem por base o algoritmo seguinte.

(i) Escolha quaisquer dois números inteiros x_0 e x_1 no intervalo $0, 1, 2, \ldots p - 1$.

(ii) Tome $x_{n+1} = (x_n + x_{n-1}) \bmod p$ com $n = 1, 2, \ldots$.

Aqui, $x \bmod p$ denota o número no intervalo de 0 a $p - 1$ que difere de x por um múltiplo de p. Por exemplo, $35 \bmod 9 = 8$ (pois $8 = 35 - 3 \cdot 9$); $36 \bmod 9 = 0$ (pois $0 = 36 - 4 \cdot 9$) e $-3 \bmod 9 = 6$ (pois $6 = -3 + 1 \cdot 9$).

(a) Gere a sequência de números pseudoaleatórios que resulta das escolhas $p = 15$, $x_0 = 3$ e $x_1 = 7$ até a sequência começar a repetir.

(b) Mostre que a fórmula a seguir é equivalente ao passo (ii) do algoritmo.

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \bmod p \qquad \text{com } n = 1, 2, 3, \ldots$$

(c) Use a fórmula da parte (b) para gerar a sequência de vetores para a escolha $p = 21$, $x_0 = 5$ e $x_1 = 5$ até a sequência começar a repetir.

Observação Tomando $p = 1$ e escolhendo x_0 e x_1 no intervalo $[0, 1)$, esse gerador de números aleatórios produz números pseudoaleatórios no intervalo $[0, 1)$. O esquema resultante é precisamente o da transformação do gato de Arnold. Além disso, se esquecermos a aritmética modular do algoritmo e tomarmos $x_1 = 1$, então a sequência de inteiros resultante é a famosa sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, . . . de Fibonacci, em que cada número depois dos dois primeiros é a soma dos dois números precedentes.

4. Tomando $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, pode ser verificado que

$$C^{25} = \begin{bmatrix} 7.778.742.049 & 12.586.269.025 \\ 12.586.269.025 & 20.365.011.074 \end{bmatrix}$$

Também pode ser verificado que 12.586.269.025 é divisível por 101 e que o resto da divisão de 7.778.742.049 e de 20.365.011.074 por 101 é 1.

(a) Mostre que cada ponto em S da forma $(m/101, n/101)$ retorna à sua posição inicial depois de 25 iterações da transformação do gato de Arnold.

(b) Mostre que cada ponto em S da forma $(m/101, n/101)$ tem período 1, 5 ou 25.

(c) Mostre que o ponto $\left(\frac{1}{101}, 0\right)$ tem período maior do que 5 iterando-o cinco vezes.

(d) Mostre que $\Pi(101) = 25$.

5. Mostre que cada ponto de S é um ponto periódico da aplicação $T: S \to S$ definida por $T(x, y) = \left(x + \frac{5}{12}, y\right)$. Por que isso mostra que essa aplicação não é caótica?

6. Um ***automorfismo de Anosov*** em R^2 é uma aplicação do quadrado unitário S sobre S da forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \bmod 1$$

em que (i) a, b, c e d são números inteiros, (ii) o determinante da matriz é ± 1e (iii) os autovalores da matriz não têm magnitude 1. Pode ser mostrado que todos os automorfismos de Anosov são caóticos.

(a) Mostre que a transformação do gato de Arnold é um automorfismo de Anosov.

(b) Quais das seguintes são matrizes de automorfismos de Anosov?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) Mostre que a aplicação de S sobre S dada a seguir não é um automorfismo de Anosov.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ mod } 1$$

Qual é o efeito geométrico dessa transformação sobre S? Use sua resposta para mostrar que essa aplicação não é caótica mostrando que todos os pontos de S são periódicos.

7. Mostre que a transformação do gato de Arnold é injetora no quadrado unitário S e que sua imagem é S.

8. Mostre que a inversa da transformação do gato de Arnold é dada por

$$\Gamma^{-1}(x, y) = (2x - y, -x + y) \text{ mod } 1$$

9. Mostre que o quadrado unitário S pode ser particionado em quatro regiões triangulares tais que em cada uma delas a transformação do gato de Arnold é uma aplicação da forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

onde a e b não são necessariamente os mesmos para cada região. [*Sugestão*: encontre as regiões de S que são aplicadas nas quatro regiões sombreadas do paralelogramo da Figura 10.14.1*d*.]

10. Se (x_0, y_0) for um ponto em S e (x_n, y_n) sua enésima iterada pela transformação do gato de Arnold, mostre que

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ mod } 1$$

Esse resultado implica que a aritmética modular não precisa ser efetuada após cada iteração, bastando aplicá-la uma vez ao final da iteração.

11. Mostre que (0, 0) é o único ponto fixo da transformação do gato de Arnold mostrando que a única solução da equação

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ mod } 1$$

com $0 \geq x_0 < 1$ e $0 \leq y_0 < 1$ é $x_0 = y_0 = 0$. [*Sugestão*: com inteiros não negativos r e s convenientes, essa equação pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$$

12. Encontre todos os ciclos de período 2 da transformação do gato de Arnold encontrando todas as soluções da equação

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ mod } 1$$

com $0 \leq x_0 < 1$ e $0 \leq y_0 < 1$. [*Sugestão*: com inteiros não negativos r e s convenientes, essa equação pode ser escrita como

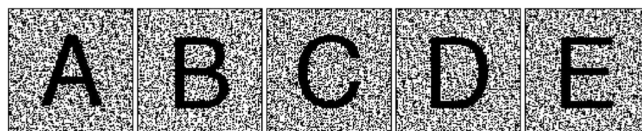
$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$$

13. Mostre que cada ponto periódico da transformação do gato de Arnold deve ser um ponto racional mostrando que em todas as soluções da equação

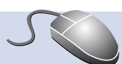
$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ mod } 1$$

os números x_0 e y_0 são quocientes de números inteiros.

14. Seja T a aplicação do gato de Arnold aplicada cinco vezes consecutivas, ou seja, $T = \Gamma^5$. A Figura Ex-14 representa quatro aplicações sucessivas de T na primeira imagem, cada imagem tendo uma resolução de 101×101 pixels. A quinta aplicação retorna à primeira imagem porque essa aplicação de gato tem período 25. Explique como pode ser gerada essa sequência particular de imagens.



▲ **Figura Ex-14**



Seção 10.14 Exercícios com tecnologia

Os exercícios seguintes foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, esse recurso é MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser algum outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidades de Álgebra Linear. Em cada exercício, você deverá ler a documentação pertinente do recurso particular que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você estará capacitado a usar seu recurso computacional para resolver muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Os métodos do Exercício 4 mostram que, para a transformação do gato de Arnold, o número $\Pi(p)$ é o menor número inteiro satisfazendo a equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{\Pi(p)} \bmod p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Isso sugere que uma maneira de determinar $\Pi(p)$ é calcular

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{n} \bmod p$$

começando com $n = 1$ e parando quando esse procedimento der a matriz identidade. Use essa ideia para calcular $\Pi(p)$ com $p = 2, 3, \ldots, 10$. Compare seus resultados com as fórmulas dadas no Exercício 1, se aplicável. O que você pode conjeturar sobre

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}\Pi(p)} \bmod p$$

quando $\Pi(p)$ for um número par?

T2. Os autovalores e autovetores da matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

da transformação do gato de Arnold são

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

Usando esses autovalores e autovetores, podemos definir

$$D = \begin{bmatrix} \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

e escrever $C = PDP^{-1}$ e, portanto, $C^n = PD^nP^{-1}$. Use um computador para mostrar que

$$C^n = \begin{bmatrix} c_{11}^{(n)} & c_{12}^{(n)} \\ c_{21}^{(n)} & c_{22}^{(n)} \end{bmatrix}$$

onde

$$c_{11}^{(n)} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$c_{22}^{(n)} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

e

$$c_{12}^{(n)} = c_{21}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

De que maneira você pode usar esses resultados e suas conclusões no Exercício T1 para simplificar o método de calcular $\Pi(p)$?

10.15 Criptografia

Nesta seção, apresentamos um método para codificar e decodificar mensagens. Também examinamos a aritmética modular e mostramos como a eliminação gaussiana pode ser utilizada, às vezes, para quebrar o código de um oponente.

PRÉ-REQUISITOS: Matrizes
Eliminação gaussiana
Operações matriciais
Independência linear
Transformações matriciais (Seção 4.9)

Cifras

O estudo da codificação e decodificação de mensagens secretas é denominado ***criptografia***. Embora os códigos secretos remontem aos primórdios da comunicação escrita, tem havido um aumento recente de interesse no assunto devido à necessidade de manter a privacidade da informação transmitida ao longo de linhas públicas de comunicação. Na linguagem da criptografia, os códigos são denominados ***cifras***, as mensagens não codificadas são ***textos comuns*** e as mensagens codificadas são ***textos cifrados*** ou ***criptogramas***. O processo de converter um texto comum num cifrado é denominado ***cifrar*** ou ***criptografar***, e o processo inverso de converter um texto cifrado num comum é denominado ***decifrar***.

As cifras mais simples, denominadas ***cifras de substituição***, são as que substituem cada letra do alfabeto por alguma outra letra. Por exemplo, na cifra de substituição

Comum	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*W*	*X*	*Y*	*Z*
Cifra	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*W*	*X*	*Y*	*Z*	*A*	*B*	*C*

a letra de texto comum *A* é substituída por *D*, a letra de texto comum *B* por *E* e assim por diante. Com essa cifra, a mensagem de texto comum

ROMA NAO FOI CONSTRUIDA EM UM DIA

fica

URPD QDR IRL FRQVWUXLGD HP XP GLD

Cifras de Hill

Uma desvantagem de cifras de substituição é que elas preservam as frequências de letras individuais, tornando relativamente fácil quebrar o código por métodos estatísticos. Uma maneira de superar esse problema é dividir o texto em grupos de letras e criptografar o texto comum grupo a grupo, em vez de uma letra de cada vez. Um ***sistema poligráfico*** é um sistema de criptografia no qual o texto comum é dividido em conjuntos de *n* letras, cada um dos quais é substituído por um conjunto de *n* letras cifradas. Nesta seção, estudamos uma classe de sistemas poligráficos conhecidos como ***cifras de Hill***, que têm por base transformações matriciais. (O nome é em referência a Lester S. Hill, que introduziu esses sistemas em dois trabalhos, “Cryptography in an Algebraic Alphabet,” *American Mathematical Monthly*, Vol. 36, junho-julho de 1929, páginas 306–312 e “Concerning Certain Linear Transformation Apparatus of Cryptography,” *American Mathematical Monthly*, Vol. 38, março de 1931, páginas 135–154.)

Daqui em diante, vamos supor que cada letra de texto comum e de texto cifrado, excetuando o *Z*, tem um valor numérico que especifica sua posição no alfabeto padrão (Tabela 1). Por motivos que ficarão claros adiante, damos a *Z* o valor de 0.

Tabela 1

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*W*	*X*	*Y*	*Z*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	0

Nos casos mais simples de cifras de Hill, transformamos *pares* sucessivos de texto comum em texto cifrado segundo o procedimento seguinte.

Passo 1. Escolha uma matriz 2×2 com entradas inteiras

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

para efetuar a codificação. Condições adicionais sobre *A* serão impostas adiante.

Passo 2. Agrupe letras sucessivas de texto comum em pares, adicionando uma letra adicional fictícia para completar o último par se o texto comum tiver um número ímpar de letras e substitua cada letra de texto comum por seu valor numérico.

Passo 3. Converta cada par $p_1\, p_2$ de letras de texto comum sucessivamente num vetor coluna

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

e forme o produto $A\mathbf{p}$. Dizemos que $\mathbf{p}$ é o ***vetor comum*** e $A\mathbf{p}$, o correspondente ***vetor cifrado***.

Passo 4. Converta cada vetor cifrado em seu equivalente alfabético.

▶ EXEMPLO 1 Cifra de Hill de uma mensagem

Use a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

para obter a cifra de Hill da mensagem de texto comum (em inglês)

I AM HIDING

Solução Agrupando o texto comum em pares de letras e adicionando a letra fictícia *G* para completar o último par, obtemos

IA MH ID IN GG

ou, equivalentemente, usando a Tabela 1,

9 1 13 8 9 4 9 14 7 7

Para codificar o par *IA*, efetuamos o produto matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \end{bmatrix}$$

que fornece o texto cifrado *KC* pela Tabela 1.

Para codificar o par *MH*, efetuamos o produto matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 24 \end{bmatrix} \tag{1}$$

No entanto, aqui temos um problema, pois o número 29 não possui equivalente alfabético (Tabela 1). Para resolver esse problema, fazemos o seguinte acordo.

Sempre que ocorrer um inteiro maior do que 25, *ele será substituído pelo resto da divisão desse inteiro por* 26.

Como o resto da divisão por 26 é um dos inteiros 0, 1, 2, . . . , 25, esse procedimento sempre fornece um inteiro com equivalente alfabético.

Assim, substituímos 29 por 3 em (1), pois 3 é o resto da divisão de 29 por 26. Segue da Tabela 1 que o texto cifrado do par *MH* é *CX*.

As contas para os demais vetores cifrados são

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 42 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 11 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Esses vetores correspondem aos pares de texto cifrado *QL*, *KP* e *UU*, respectivamente. Coletando os pares, obtemos a mensagem cifrada completa

KC CX QL KP UU

que, normalmente, seria transmitida como uma única cadeia sem espaços,

KCCXQLKPUU ◀

Como o texto comum foi agrupado em pares e criptografado por uma matriz 2 × 2, dizemos que a cifra de Hill do Exemplo 1 é uma ***cifra de Hill de ordem* 2**. Evidentemente,

também é possível agrupar o texto comum em ternos e criptografar com uma matriz 3×3 de entradas inteiras, obtendo uma ***cifra de Hill de ordem* 3**. Em geral, para uma ***cifra de Hill de ordem n***, agrupamos o texto comum em conjuntos de n letras e codificamos com uma ***matriz codificadora*** $n \times n$ de entradas inteiras.

Aritmética modular

No Exemplo 1, substituímos os inteiros maiores do que 25 pelo seu resto pela divisão por 25. Essa técnica de trabalhar com os restos é a base de uma parte da Matemática denominada *aritmética modular*. Tendo em vista sua importância em criptografia, vamos digredir por um momento para elaborar algumas das principais ideias dessa área.

Na aritmética modular, supomos dado um inteiro positivo m, denominado ***módulo***, e consideramos "iguais" ou "equivalentes" em relação ao módulo quaisquer dois inteiros cuja diferença seja um múltiplo inteiro do módulo. Mais precisamente, temos a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 1 Dados um número inteiro positivo m e dois inteiros a e b quaisquer, dizemos que a é ***equivalente*** a b módulo m, e escrevemos

$$a = b \pmod{m}$$

se $a - b$ for um múltiplo inteiro de m.

▶ EXEMPLO 2 Várias equivalências

$$\begin{aligned} 7 &= 2 \pmod{5} \\ 19 &= 3 \pmod{2} \\ -1 &= 25 \pmod{26} \\ 12 &= 0 \pmod{4} \end{aligned}$$ ◀

Dado um módulo m arbitrário, pode ser provado que qualquer inteiro a é equivalente, módulo m, a exatamente um dos inteiros

$$0, 1, 2, \ldots, m - 1$$

Esse inteiro é denominado ***resíduo*** de a módulo m e escrevemos

$$Z_m = \{0, 1, 2, \ldots, m - 1\}$$

para denotar o conjunto dos resíduos módulo m.

Se a for um inteiro *não negativo*, então seu resíduo módulo m é simplesmente o resto da divisão de a por m. Para um inteiro a arbitrário, o resíduo pode ser encontrado usando o teorema seguinte.

TEOREMA 10.15.1 *Dados um inteiro a e um módulo m quaisquer, seja*

$$R = \text{resto de } \frac{|a|}{m}$$

Então o resíduo r de a módulo m é dado por

$$r = \begin{cases} R & \text{se } a \geq 0 \\ m - R & \text{se } a < 0 \quad \text{e} \quad R \neq 0 \\ 0 & \text{se } a < 0 \quad \text{e} \quad R = 0 \end{cases}$$

▶ EXEMPLO 3 Resíduos mod 26

Encontre os resíduos módulo 26 de (a) 87, (b) −38 e (c) −26.

Solução (a) Dividindo $|87| = 87$ por 26, temos um resto de $R = 9$, ou seja, $r = 9$. Assim,

$$87 = 9 \pmod{26}$$

Solução (b) Dividindo $|-38| = 38$ por 26, dá um resto de $R = 12$, ou seja, $r = 26 - 12 = 14$. Assim,

$$-38 = 14 \pmod{26}$$

Solução (c) Dividindo $|-26| = 26$ por 26, temos um resto de $R = 0$. Assim,

$$-26 = 0 \pmod{26}$$ ◀

Na aritmética usual, cada número não nulo a tem um *recíproco*, ou *inverso multiplicativo*, denotado por a^{-1}, tal que

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

Na aritmética modular, temos o conceito correspondente definido a seguir.

DEFINIÇÃO 2 Dado um número a em Z_m, dizemos que um número a^{-1} em Z_m é um ***recíproco***, ou ***inverso multiplicativo***, de a módulo m se $aa^{-1} = a^{-1}a = 1 \pmod{m}$.

Pode ser provado que se a e m não têm fatores primos comuns, então a tem um único recíproco módulo m; reciprocamente, se a e m têm um fator primo comum, então a não tem recíproco módulo m.

▶ EXEMPLO 4 Recíproco de 3 mod 26

O número 3 tem um recíproco módulo 26, pois 3 e 26 não têm fatores primos em comum. Esse recíproco pode ser obtido encontrado o número x em Z_{26} que satisfaz a equação modular

$$3x = 1 \pmod{26}$$

Embora existam métodos gerais para resolver tais equações modulares, isso não será abordado, pois nos levaria para muito longe do nosso objetivo. Contudo, como 26 é relativamente pequeno, essa equação pode ser resolvida experimentando, uma por uma, cada solução possível de 0 a 25. Dessa maneira, encontramos que $x = 9$ é a solução, pois

$$3 \cdot 9 = 27 = 1 \pmod{26}$$

Assim,

$$3^{-1} = 9 \pmod{26}$$

▶ EXEMPLO 5 Um número sem recíproco mod 26

O número 4 não possui recíproco mod 26, pois 4 e 26 têm 2 como fator primo comum (ver Exercício 8). ◀

Para referência futura, a Tabela 2 que segue dá os recíprocos módulo 26.

Tabela 2 Recíprocos módulo 26

a	1	3	5	7	9	11	15	17	19	21	23	25
a^{-1}	1	9	21	15	3	19	7	23	11	5	17	25

Decifrando

Cada cifra útil deve possuir um procedimento para decifrar. Para decifrar as cifras de Hill, usamos a inversa (mod 26) da matriz codificadora. Para ser preciso, se m for um inteiro positivo, dizemos que uma matriz A com entradas em Z_m é ***invertível módulo m*** se existir uma matriz B com entradas em Z_m tal que

$$AB = BA = I \pmod{m}$$

Suponha, agora, que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

seja invertível módulo 26 e que essa matriz seja usada numa cifra de Hill de ordem 2. Se

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

é um vetor comum, então

$$\mathbf{c} = A\mathbf{p} \pmod{26}$$

é o correspondente vetor cifrado e

$$\mathbf{p} = A^{-1}\mathbf{c} \pmod{26}$$

Assim, cada vetor comum pode ser recuperado do correspondente vetor cifrado pela multiplicação à esquerda por A^{-1} (mod 26).

Na criptografia, é importante saber quais matrizes são invertíveis módulo 26 e como obter suas inversas. Passamos a investigar essas questões.

Na aritmética comum, uma matriz quadrada A é invertível se, e só se, $\det(A) \neq 0$ ou, equivalentemente, $\det(A)$ tem um recíproco. O teorema seguinte é o análogo desse resultado em aritmética modular.

TEOREMA 10.15.2 *Uma matriz quadrada A com entradas em Z_m é invertível módulo m se, e só se, o resíduo de* det(*A*) *módulo m tem um recíproco módulo m.*

Como o resíduo de $\det(A)$ módulo m tem um recíproco módulo m se, e só se, esse resíduo e m não têm fator primo comum, obtemos o corolário seguinte.

COROLÁRIO 10.15.3 *Uma matriz quadrada A com entradas em Z_m é invertível módulo m se, e só se, m e o resíduo de* det(*A*) *módulo m não têm fatores primos comuns.*

Como os únicos fatores primos de $m = 26$ são 2 e 13, obtemos o corolário seguinte, que é útil em criptografia.

COROLÁRIO 10.15.4 *Uma matriz quadrada A com entradas em Z_{26} é invertível módulo 26 se, e só se, o resíduo de* det(*A*) *módulo 26 não é divisível por 2 ou 13.*

Deixamos para o leitor verificar que se

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tiver entradas em Z_{26} e se o resíduo de $\det(A) = ad - bc$ módulo 26 não for divisível por 2 ou 13, então a inversa de A (mod 26) é dada por

$$A^{-1} = (ad - bc)^{-1} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \pmod{26} \tag{2}$$

onde $(ad - bc)^{-1}$ é o recíproco do resíduo de $ad - bc$ (mod 26).

▶ EXEMPLO 6 Inversa de uma matriz mod 26

Encontre a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

módulo 26.

Solução

$$\det(A) = ad - bc = 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 3$$

de modo que, pela Tabela 2,

$$(ad - bc)^{-1} = 3^{-1} = 9 \pmod{26}$$

Assim, por (2),

$$A^{-1} = 9\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & -54 \\ -18 & 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

Conferindo,

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 & 234 \\ 26 & 105 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

Analogamente, $A^{-1}A = I \pmod{26}$ ◀

▶ EXEMPLO 7 Decifrando uma cifra de Hill de ordem 2

Decifre a cifra de Hill de ordem 2 dada, que foi criptografada pela matriz do Exemplo 6.

GTNKGKDUSK

Solução Pela Tabela 1, o equivalente numérico do texto cifrado é

7 20 14 11 7 11 4 21 19 11

Para obter os pares de texto comum, multiplicamos cada vetor cifrado pela inversa de A (obtida no Exemplo 6), como segue.

$$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 487 \\ 436 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 20 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 278 \\ 321 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 9 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 271 \\ 265 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 508 \\ 431 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 283 \\ 361 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 23 \end{bmatrix} \pmod{26}$$

Pela Tabela 1, os equivalentes alfabéticos desses vetores são

ST RI KE NO WW

que fornecem a mensagem

STRIKE NOW ◀

Decifrando uma cifra de Hill

Como o objetivo de criptografar mensagens e informações é impedir que "oponentes" descubram seu conteúdo, os criptógrafos têm uma preocupação com a *segurança* de suas cifras, ou seja, quão facilmente podem ser decifradas pelos oponentes (ou quebradas). Concluímos esta seção discutindo uma técnica para quebrar cifras de Hill.

Suponha que consigamos algum texto comum e o cifrado correspondente de uma mensagem de nosso oponente. Por exemplo, digamos que, examinando algum texto cifrado interceptado, fomos capazes de deduzir que a mensagem é uma carta que começa com *DEAR SIR*. Mostremos que, com alguns poucos desses dados, pode ser possível determinar a matriz decodificadora de um cifra de Hill e, consequentemente, ter acesso ao resto da mensagem.

É um resultado básico em Álgebra Linear que uma transformação fica completamente determinada por seus valores numa base. Esse princípio sugere que, se tivermos uma cifra de Hill de ordem n e se

$$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$$

forem vetores comuns linearmente independentes cujos correspondentes vetores cifrados

$$A\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2, \ldots, A\mathbf{p}_n$$

sejam conhecidos, então disporemos de informação suficiente para determinar a matriz A e, portanto, sua inversa A^{-1} (mod m).

O próximo teorema, cuja prova é discutida nos exercícios, fornece uma maneira de fazer isso.

TEOREMA 10.15.5 Determinando a matriz decodificadora

Sejam $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ vetores comuns linearmente independentes e sejam $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ os correspondentes vetores cifrados de uma cifra de Hill de ordem n. Se

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \end{bmatrix}$$

for a matriz $n \times n$ de vetores coluna $\mathbf{p}_1^T, \mathbf{p}_2^T, \ldots \mathbf{p}_n^T$ e se

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{c}_n^T \end{bmatrix}$$

for a matriz $n \times n$ de vetores linha $\mathbf{c}_1^T, \mathbf{c}_2^T, \ldots \mathbf{c}_n^T$, então a sequência de operações elementares com as linhas que reduz C a I transforma P em $(A^{-1})^T$.

Esse teorema nos diz que, para encontrar a transposta da matriz decodificadora A^{-1}, devemos encontrar uma sequência de operações elementares com as linhas que reduza C a I e então aplicar essas mesmas operações com as linhas de P. O próximo exemplo ilustra um algoritmo simples para fazer isso.

► EXEMPLO 8 Usando o Teorema 10.15.5

Foi interceptada a cifra de Hill de ordem 2

IOSBTGXESPXHOPDE

Decifre essa mensagem, sabendo que ela começa com a palavra *DEAR*.

Solução Pela Tabela 1, o equivalente numérico do texto comum conhecido é

DE	AR
4 5	1 18

e o equivalente numérico do texto cifrado correspondente é

IO	SB
9 15	19 2

de modo que os vetores comuns e correspondentes vetores cifrados são

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \leftrightarrow \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 18 \end{bmatrix} \leftrightarrow \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 19 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Queremos reduzir

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 19 & 2 \end{bmatrix}$$

a I por operações elementares com as linhas e, simultaneamente, aplicar essas operações a

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 18 \end{bmatrix}$$

para obter $(A^{-1})^T$ (a transposta da matriz decodificadora). Isso pode ser obtido adjuntando P à direita de C e aplicando as operações com as linhas à matriz resultante $[C \mid P]$ até que o lado esquerdo esteja reduzido a I. A matriz final, então, terá o formato $[I \mid (A^{-1})^T]$. As contas podem ser feitas como segue.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 9 & 15 & 4 & 5 \\ 19 & 2 & 1 & 18 \end{array}\right]$$ ← Formamos a matriz $[C \mid P]$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 45 & 12 & 15 \\ 19 & 2 & 1 & 18 \end{array}\right]$$ ← Multiplicamos a primeira linha por $9^{-1} = 3$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 19 & 12 & 15 \\ 19 & 2 & 1 & 18 \end{array}\right]$$ ← Substituímos 45 pelo seu resíduo módulo 26.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 19 & 12 & 15 \\ 0 & -359 & -227 & -267 \end{array}\right]$$ ← Somamos -19 vezes a primeira linha à segunda.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 19 & 12 & 15 \\ 0 & 5 & 7 & 19 \end{array}\right]$$ ← Substituímos as entradas da segunda linha pelos seus resíduos módulo 26.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 19 & 12 & 15 \\ 0 & 1 & 147 & 399 \end{array}\right]$$ ← Multiplicamos a segunda linha por $5^{-1} = 21$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 19 & 12 & 15 \\ 0 & 1 & 17 & 9 \end{array}\right]$$ ← Substituímos as entradas da segunda linha pelos seus resíduos módulo 26.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -311 & -156 \\ 0 & 1 & 17 & 9 \end{array}\right]$$ ← Somamos -19 vezes a segunda linha à primeira.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 17 & 9 \end{array}\right]$$ ← Substituímos as entradas da primeira linha pelos seus resíduos módulo 26.

Assim,

$$(A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 17 & 9 \end{bmatrix}$$

e, portanto, a matriz decodificadora é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Para decifrar a mensagem, agrupamos primeiro o texto cifrado em pares e encontramos os equivalentes numéricos de cada letra, como segue.

IO	*SB*	*TG*	*XE*	*SP*	*XH*	*OP*	*DE*
9 15	19 2	20 7	24 5	19 16	24 8	15 16	4 5

Em seguida, multiplicamos os vetores cifrados sucessivamente pela esquerda por A^{-1} e encontramos os equivalentes alfabéticos dos pares de texto comum resultantes.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} & \begin{matrix} D \\ E \end{matrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19 \\ 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 18 \end{bmatrix} & \begin{matrix} A \\ R \end{matrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \end{bmatrix} & \begin{matrix} I \\ K \end{matrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 24 \\ 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 \\ 19 \end{bmatrix} & \begin{matrix} E \\ S \end{matrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19 \\ 16 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \end{bmatrix} & \begin{matrix} E \\ N \end{matrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 24 \\ 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 \\ 20 \end{bmatrix} & \begin{matrix} D \\ T \end{matrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 16 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \end{bmatrix} & \begin{matrix} A \\ N \end{matrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 11 \\ 19 \end{bmatrix} & \begin{matrix} K \\ S \end{matrix}
\end{aligned} \quad \pmod{26}$$

Finalmente, construímos a mensagem a partir dos pares de texto comum:

DE AR IK ES EN DT AN KS

DEAR IKE SEND TANKS ◀

Leitura recomendada

Os leitores interessados em aprender mais sobre criptografia podem consultar os livros listados a seguir. O primeiro é elementar e o segundo é mais avançado.

1. ABRAHAM SINKOV, *Elementary Cryptanalysis*, *a Mathematical Approach* (Mathematical Association of America, 2009).

2. ALAN G. KONHEIM, *Cryptography*, *a Primer* (New York: Wiley-Interscience, 1981).

Conjunto de exercícios 10.15

1. Em cada parte, obtenha a cifra de Hill da mensagem

DARK NIGHT

com matriz codificadora dada.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. Em cada uma das partes, determine se a matriz é invertível módulo 26. Se for, encontre uma inversa módulo 26 e confira seu resultado verificando que $AA^{-1} = A^{-1}A = I \pmod{26}$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

3. Decodifique a mensagem

SAKNOXAOJX

sabendo que é uma cifra de Hill com matriz codificadora

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

4. É interceptada uma cifra de Hill de ordem 2 que começa com os pares

SL HK

Encontre as matrizes codificadora e decodificadora, sabendo que a versão comum da mensagem começa com a palavra *ARMY*.

5. Decodifique a cifra de Hill de ordem 2

LNGIHGYBVRENJYQO

sabendo que as quatro últimas letras do texto comum são *ATOM*.

6. Decodifique a cifra de Hill de ordem 3

HPAFQGGDUGDDHPGODYNOR

sabendo que as nove primeiras letras do texto comum são *IHAVECOME*.

7. Todos os resultados desta seção podem se generalizados para o caso em que o texto comum for uma mensagem binária, ou seja, uma sequência de 0 e 1. Nesse caso, usamos a aritmética módulo 2 em vez da módulo 26. Assim, por exemplo, $1 + 1 = 0 \pmod 2$. Suponha que queiramos criptografar a mensagem 110101111. Começamos separando a mensagem em ternos para formar os três vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, e tomamos $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ como a matriz codificadora.

(a) Encontre a mensagem codificada.

(b) Encontre a inversa módulo 2 da matriz codificadora e verifique que ela decodifica a mensagem codificada encontrada na parte (a).

8. Se, além do alfabeto padrão, fossem permitidos o ponto, a vírgula e o ponto de interrogação, teríamos 29 letras disponíveis para texto comum e cifrado e toda a aritmética matricial seria feita módulo 29. Sob que condições uma matriz cujas entradas são de Z_{29} seria invertível módulo 29?

9. Substituindo sucessivamente os valores $x = 0, 1, 2, \ldots, 25$ na equação modular $4x = 1 \pmod{26}$, conclua que essa equação não possui solução em Z_{26}.

10. (a) Sejam P e C as matrizes do Teorema 10.15.5. Mostre que $P = C(A^{-1})T$.

(b) Para provar o Teorema 10.15.5, sejam $E_1, E_2, \ldots, E_n$ as matrizes elementares que correspondem às operações elementares com as linhas que reduzem C a I, ou seja,

$$E_n \cdots E_2E_1C = I$$

Mostre que

$$E_n \cdots E_2E_1P = (A^{-1})T$$

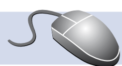
do que segue que a mesma sequência de operações de linha que reduz C a I converte P a $(A^{-1})^T$.

11. (a) Se A for a matriz codificadora de uma cifra de Hill de ordem n, mostre que

$$A^{-1} = (C^{-1}P)^T \pmod{26}$$

onde C e P são as matrizes definidas no Teorema 10.15.5.

(b) Em vez de usar o Teorema 10.15.5 como no texto, encontre a matriz decodificadora A^{-1} do Exemplo 8 usando o resultado na parte (a) e a Equação (2) para calcular C^{-1}. [*Observação*: embora esse método seja prático com cifras de Hill de ordem 2, o Teorema 10.15.5 é mais eficiente com cifras de Hill de ordem n se $n > 2$.]



Seção 10.15 Exercícios com tecnologia

Os exercícios seguintes foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, esse recurso é MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser algum outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidades de Álgebra Linear. Em cada exercício, você deverá ler a documentação pertinente do recurso particular que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você estará capacitado a usar seu recurso computacio-

nal para resolver muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Dizemos que um inteiro positivo é relativamente primo com um outro inteiro positivo se os dois inteiros não tiverem fator comum (a não ser 1). Dado um inteiro positivo n, seja $S_n = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$, com $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_m$, o conjunto de todos os inteiros positivos menores do que n que são relativamente primos com n. Por exemplo, se $n = 9$, então

$$S_9 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_6\} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$$

(a) Construa uma tabela consistindo em n e S_n com $n = 2, 3, \ldots, 15$ e depois calcule

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \quad \text{e} \quad \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right) \pmod{n}$$

em cada caso. Faça uma conjectura para $n > 15$ e prove a validade de sua conjectura. [*Sugestão*: use o fato de que se a for relativamente primo com n, então $n - a$ também é relativamente primo com n.]

(b) Dado um inteiro positivo n e o conjunto S_n, seja P_n a matriz $m \times m$

$$P_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{m-1} & a_m \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_m & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_1 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1} & a_m & a_1 & \cdots & a_{m-3} & a_{m-2} \\ a_m & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} \end{bmatrix}$$

de modo que, por exemplo,

$$P_9 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 8 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 8 & 1 & 2 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Use um computador para calcular $\det(P_n)$ e $\det(P_n)(\text{mod } n)$ com $n = 2, 3, \ldots, 15$ e em seguida use esses resultados para construir uma conjectura.

(c) Use os resultados da parte (a) para provar a validade de sua conjectura. [*Sugestão*: some as primeiras $m - 1$ linhas de P_n com a última linha e use o Teorema 2.2.3.] O que esses resultados implicam sobre a inversa de P_n (mod n)?

T2. Dado um inteiro positivo n, o número de inteiros positivos menores do que n e relativamente primos com n é denominado a ***função Phi de Euler*** de n e é denotada por $\varphi(n)$. Por exemplo, $\varphi(6) = 2$, já que somente dois inteiros positivos (a saber, 1 e 5) são menores do que 6 e não têm fator comum com 6.

(a) Usando um computador, calcule e imprima a lista de todos os inteiros positivos que são menores do que n e relativamente primos com n, com $n = 2, 3, \ldots, 25$. Então use esses inteiros para determinar os valores de $\varphi(n)$ com $n = 2, 3, \ldots, 25$. Você consegue descobrir algum padrão nos resultados?

(b) Pode ser mostrado que se $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m\}$ forem todos os fatores primos distintos de n, então

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_m}\right)$$

Por exemplo, como $\{2, 3\}$ são os fatores primos distintos de 12, temos

$$\varphi(12) = 12\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4$$

o que confere com o fato de $\{1, 5, 7, 11\}$ serem os únicos inteiros positivos menores do que 12 relativamente primos com 12. Usando um computador, imprima todos os fatores primos de n com $n = 2, 3, \ldots, 25$. Em seguida calcule $\varphi(n)$ usando a fórmula dada e compare a lista com seus resultados na parte (a).

10.16 Genética

Nesta seção, investigamos a propagação de uma característica herdada em sucessivas gerações calculando potências de uma matriz.

PRÉ-REQUISITOS: Autovetores e autovalores
Diagonalização de uma matriz
Compreensão intuitiva de limites

Características hereditárias

Nesta seção, examinamos a hereditariedade de características de animais ou plantas. Vamos supor que a característica hereditária sob consideração seja governada por um conjunto de dois genes, que denotamos por A e a. Por ***hereditariedade autossômica***, cada in-

divíduo de cada sexo possui dois desses genes, e os possíveis pares são *AA*, *Aa* e *aa*. Esse par de genes é denominado ***genótipo*** do indivíduo, e determina como o caráter controlado por esses genes se manifesta no indivíduo. Por exemplo, nas bocas-de-leão, um conjunto de dois genes controla a cor da flor. O genótipo *AA* produz flores vermelhas, o genótipo *Aa* produz flores roxas e o genótipo *aa* produz flores brancas. Nos humanos, a cor dos olhos é controlada por hereditariedade autossômica. Os genótipos *AA* e *Aa* têm olhos castanhos e o genótipo *aa* tem olhos azuis. Nesse caso, dizemos que o gene *A* ***domina*** o gene *a*, ou então que o gene *a* é ***recessivo*** em relação ao gene *A*, pois o genótipo *Aa* apresenta a mesma característica externa que o genótipo *AA*.

Além da hereditariedade autossômica, também discutiremos a ***hereditariedade ligada ao sexo***. Nesse tipo de hereditariedade, o macho da espécie possui somente um dos dois possíveis genes (*A* ou *a*) e a fêmea possui um par de dois genes (*AA*, *Aa* ou *aa*). Nos humanos, o daltonismo, a calvície hereditária, a hemofilia e a distrofia muscular, para citar somente alguns, são características controladas por hereditariedade ligada ao sexo.

A seguir explicamos a maneira pela qual os genes dos pais são passados para seus descendentes nos dois tipos de hereditariedade. Construímos modelos matriciais que dão os prováveis genótipos dos descendentes em termos dos genótipos dos pais e usamos esses modelos matriciais para acompanhar a distribuição genotípica de uma população através de sucessivas gerações.

Hereditariedade autossômica

Na hereditariedade autossômica, um indivíduo herda um dos genes de cada par de genes dos seus pais para formar seu próprio par. Pelo que sabemos, é uma questão de probabilidade qual dos dois genes os pais passam aos filhos. Assim, se um dos pais é do genótipo *Aa*, é igualmente provável que o descendente herde o gene *A* ou o gene *a* daquele genitor. Se um dos pais é do genótipo *aa* e o outro é do genótipo *Aa*, o descendente sempre receberá um gene *a* do genitor *aa* e receberá, com igual probabilidade, ou um gene *A* ou um gene *a* do genitor *Aa*. Consequentemente, cada descendente terá chances iguais de ser do genótipo *Aa* ou *aa*. Na Tabela 1, listamos as probabilidades dos possíveis genótipos dos descendentes para todas as possíveis combinações de genótipos dos pais.

Tabela 1

Genótipo do descendente	Genótipo dos pais					
	AA-AA	*AA-Aa*	*AA-aa*	*Aa-Aa*	*Aa-aa*	*aa-aa*
AA	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
aa	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

► EXEMPLO 1 Distribuição dos genótipos numa população

Suponha que um agricultor tenha uma grande população de plantas consistindo em alguma distribuição de todos os três possíveis genótipos *AA*, *Aa* e *aa*. O agricultor deseja implementar um programa de criação no qual cada planta da população é sempre fertilizada por uma planta do genótipo *AA*. Queremos deduzir uma expressão para a distribuição dos três genótipos na população depois de um número qualquer de gerações.

Com $n = 0, 1, 2, \ldots$, escrevemos

$$a_n = \text{fração de plantas do genótipo } AA \text{ na enésima geração}$$

$$b_n = \text{fração de plantas do genótipo } Aa \text{ na enésima geração}$$

$$c_n = \text{fração de plantas do genótipo } aa \text{ na enésima geração}$$

Assim, a_0, b_0 e c_0 especificam a distribuição inicial dos genótipos. Também temos que

$$a_n + b_n + c_n = 1 \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Pela Tabela 1, podemos determinar a distribuição de genótipos em cada geração a partir da distribuição na geração precedente, pelas equações

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \tfrac{1}{2}b_{n-1} \\ b_n &= c_{n-1} + \tfrac{1}{2}b_{n-1} \qquad n = 1, 2, \ldots \\ c_n &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Por exemplo, a primeira dessas três equações afirma que, nesse programa de criação, todos os descendentes de uma planta do genótipo *AA* serão do genótipo *AA*, e metade dos descendentes de uma planta do genótipo *Aa* será do genótipo *AA*.

As Equações (1) podem ser escritas em notação matricial como

$$\mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

onde

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que as três colunas da matriz M são iguais às três primeiras colunas da Tabela 1.

Da Equação (2), segue que

$$\mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)} = M^2\mathbf{x}^{(n-2)} = \cdots = M^n\mathbf{x}^{(0)} \tag{3}$$

Consequentemente, se conseguirmos encontrar uma expressão explícita de M^n, poderemos usar (3) para encontrar uma expressão explícita de $\mathbf{x}^{(n)}$. Para encontrar uma expressão explícita de M^n, primeiro diagonalizamos M, ou seja, procuramos uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que

$$M = PDP^{-1} \tag{4}$$

Com essa diagonalização, teremos, então (ver Exercício 1)

$$M^n = PD^nP^{-1} \quad \text{com } n = 1, 2, \ldots$$

onde

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{bmatrix}$$

A diagonalização de M é obtida encontrando os autovalores e correspondentes autovetores. Eles são (verifique)

Autovalores: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = 0$

Autovetores associados: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Assim, na Equação (4), temos

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$P = [\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\mathbf{x}^{(n)} = PD^nP^{-1}\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

ou, então,

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 + b_0 + c_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lembrando que $a_0 + b_0 + c_0 = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ b_n &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \qquad n = 1, 2, \ldots \\ c_n &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Essas são fórmulas explícitas para a fração dos três genótipos na enésima geração de plantas em termos das frações de genótipos iniciais.

Como $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tende a zero quando n tende ao infinito, segue dessas equações que

$$\begin{aligned} a_n &\to 1 \\ b_n &\to 0 \\ c_n &= 0 \end{aligned}$$

quando n tende ao infinito. Isso mostra que, no limite, todas as plantas da população serão do genótipo AA.

▶ EXEMPLO 2 Modificando o Exemplo 1

Podemos modificar o Exemplo 1 supondo que cada planta da população é sempre fertilizada por uma planta do seu próprio genótipo em vez de sempre ser fertilizada por uma planta do genótipo AA. Usando a mesma notação do Exemplo 1, teremos, então, que

$$\mathbf{x}^{(n)} = M^n\mathbf{x}^{(0)}$$

com

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

As colunas dessa nova matriz M são iguais às colunas correspondentes a pais dos genótipos AA–AA, Aa–Aa e aa–aa na Tabela 1.

Os autovalores de M são (verifique)

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = \tfrac{1}{2}$$

O autovalor $\lambda_1 = 1$ tem multiplicidade dois e seu autoespaço correspondente é bidimensional. Escolhendo dois autovetores linearmente independentes $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ nesse autoespaço e um único vetor $\mathbf{v}_3$ associado ao autovalor simples $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, obtemos (verifique)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

As contas com $\mathbf{x}^{(n)}$ são

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(n)} &= M^n \mathbf{x}^{(0)} = PD^n P^{-1}\mathbf{x}^{(0)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\left.\begin{aligned}
a_n &= a_0 + \left[\tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right] b_0 \\
b_n &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^n b_0 \\
c_n &= c_0 + \left[\tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right] b_0
\end{aligned}\right\} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

No limite, quando n tende ao infinito, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ e $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \to 0$, de modo que

$$\begin{aligned}
a_n &\to a_n + \tfrac{1}{2}b_0 \\
b_n &\to 0 \\
c_n &\to c_0 + \tfrac{1}{2}b_0
\end{aligned}$$

Assim, fertilizando cada planta com uma de seu próprio genótipo, temos uma população que, no limite, contém somente os genótipos *AA* e *aa*. ◀

Doenças recessivas autossômicas

Existem muitas doenças genéticas governadas por hereditariedade autossômica nas quais um gene normal *A* domina um gene anormal *a*. O genótipo *AA* é um indivíduo normal, o genótipo *Aa* é um portador da doença, mas não é por ela afetado, e o genótipo *aa* é afetado pela doença. Nos humanos, muitas vezes essas doenças genéticas são associadas a um grupo racial específico; por exemplo, fibrose cística (predominante entre brancos), anemia falciforme (predominante entre negros), talassemia (predominante entre pessoas de origem da região do Mar Mediterrâneo) e doença de Tay-Sachs (predominante entre judeus europeus ocidentais).

Suponha que um criador de animais tenha uma população animal portadora de uma doença recessiva autossômica. Suponha também que os animais afligidos pela doença não sobrevivam até a maturidade. Uma maneira possível para o criador controlar tal doença é sempre cruzar qualquer fêmea, independentemente de seu genótipo, com um macho normal. Dessa maneira, todos os futuros descendentes terão os dois pais normais (um cruzamento *AA*–*AA*) ou um pai normal e uma mãe portadora (um cruzamento *AA*–*Aa*). Não pode haver cruzamentos *AA*–*aa*, pois animais do genótipo *aa* não chegam à maturi-

dade. Nesse tipo de programa de cruzamentos, não haverá descendentes futuros doentes, embora ainda haja portadores em gerações futuras. Determinemos, agora, a fração de portadores nas gerações futuras. Escrevemos

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

onde

a_n = fração da população de genótipo *AA* na enésima geração

b_n = fração da população de genótipo *Aa* (portadores) na enésima geração

Como cada descendente tem pelo menos um dos pais normais, podemos considerar esse programa de cruzamentos controlados como um de cruzamento constante com o genótipo *AA*, como no Exemplo 1. Assim, a transição de distribuição de genótipo de uma geração para a seguinte é governada pela equação

$$\mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

em que

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Conhecendo a distribuição inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, a distribuição de genótipos na enésima geração é, portanto, dada por

$$\mathbf{x}^{(n)} = M^n \mathbf{x}^{(0)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

A diagonalização de M é feita com facilidade (ver Exercício 4) e leva a

$$\mathbf{x}^{(n)} = PD^nP^{-1}\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 \end{bmatrix}$$

Como $a_0 + b_0 = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n b_0 \\ b_n &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^n b_0 \end{aligned} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Assim, quando n tende ao infinito, resulta

$$\begin{aligned} a_n &\to 1 \\ b_n &\to 0 \end{aligned}$$

de modo que, no limite, não haverá mais portadores na população.

A partir de (7), vemos que

$$b_n = \tfrac{1}{2} b_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

ou seja, a fração de portadores em cada geração é a metade da fração de portadores na geração precedente. Seria interessante também investigar a propagação de portadores com cruzamentos aleatórios, quando dois animais cruzam independentemente de genótipo. Infelizmente, esses cruzamentos aleatórios levam a equações não lineares, e as técnicas desta seção não são aplicáveis. Contudo, com outras técnicas pode ser mostrado que, com cruzamento aleatório, a Equação (8) é substituída por

$$b_n = \frac{b_{n-1}}{1 + \frac{1}{2} b_{n-1}}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Como um exemplo numérico, suponha que um criador comece com uma população na qual 10% dos animais sejam portadores. Com o programa de cruzamento controlado governado pela Equação (8), a porcentagem de portadores pode ser reduzida a 5% em uma geração, mas, com cruzamento aleatório, a Equação (9) prevê que 9,5% da população é portadora depois de uma geração (ou seja, $b_n = 0{,}095$ se $b_{n-1} = 0{,}10$). Além disso, com cruzamento controlado, jamais haverá descendente doente, mas com cruzamento aleatório pode ser mostrado que 1 em cada 400 descendentes vai nascer doente se 10% da população for portadora.

Hereditariedade ligada ao sexo

Como mencionamos na introdução, na hereditariedade ligada ao sexo, o macho possui um gene (A ou a) e a fêmea possui dois genes (AA, Aa ou aa). O termo "ligada ao sexo" é usado porque esses genes são encontrados no cromossomo X, dos quais o macho tem um e a fêmea tem dois. A hereditariedade desses genes é como segue: um descendente macho recebe um dos dois genes de sua mãe com igual probabilidade, e um descendente fêmea recebe o único gene de seu pai além de um dos dois genes de sua mãe, com igual probabilidade. Os leitores familiares com probabilidade básica podem verificar que esse tipo de hereditariedade leva às probabilidades de genótipos da Tabela 2.

Tabela 2

			Genótipo dos pais (pai, mãe)					
			(A, AA)	**(A, Aa)**	**(A, aa)**	**(a, AA)**	**(a, Aa)**	**(a, aa)**
Descendente	Macho	**A**	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
		a	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1
	Fêmea	**AA**	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
		Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0
		aa	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1

Vamos discutir um programa de procriação consanguínea relacionada com hereditariedade ligada ao sexo. Iniciando com um macho e uma fêmea, selecionamos dois de seus descendentes aleatoriamente, um de cada sexo, e os cruzamos; em seguida selecionamos dois dos descendentes resultantes e os cruzamos, e assim por diante. Tal procriação consanguínea é normalmente utilizada com animais. (Entre humanos, esses casamentos entre irmãos foram usados pelos mandatários do Egito antigo para manter pura a linhagem real.)

O par original de macho-fêmea pode ser de um de seis tipos, correspondentes às seis colunas da Tabela 2, a saber,

$$(A, AA),\quad (A, Aa),\quad (A, aa),\quad (a, AA),\quad (a, Aa),\quad (a, aa)$$

Os pares de irmãos cruzados em gerações sucessivas têm certas probabilidades de ser um desses seis tipos. Para calcular essas probabilidades, escrevemos, com $n = 1, 2, \ldots,$

a_n = probabilidade de o par de irmãos na enésima geração ser do tipo (A, AA)

b_n = probabilidade de o par de irmãos na enésima geração ser do tipo (A, Aa)

c_n = probabilidade de o par de irmãos na enésima geração ser do tipo (A, aa)

d_n = probabilidade de o par de irmãos na enésima geração ser do tipo (a, AA)

e_n = probabilidade de o par de irmãos na enésima geração ser do tipo (a, Aa)

f_n = probabilidade de o par de irmãos na enésima geração ser do tipo (a, aa)

Com essas probabilidades, formamos o vetor coluna

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \end{bmatrix}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Pela Tabela 2, segue que

$$\mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

onde

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} (A, AA) & (A, Aa) & (A, aa) & (a, AA) & (a, Aa) & (a, aa) \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ (A, AA) \\ (A, Aa) \\ (A, aa) \\ (a, AA) \\ (a, Aa) \\ (a, aa) \end{array}$$

Por exemplo, suponha que o par de irmãos na $(n-1)$-ésima geração seja do tipo (A, Aa). Então o descendente macho será do genótipo A ou a com igual probabilidade e a descendente fêmea será do genótipo AA ou Aa com igual probabilidade. Como um dos descendentes machos e uma das descendentes fêmeas será escolhido ao acaso para cruzar, o próximo par de irmãos será de um dos tipos (A, AA), (A, Aa), (a, AA) ou (a, Aa) com probabilidades iguais. Assim, a segunda coluna de M contém "$\frac{1}{4}$" em cada uma das quatro linhas correspondentes a esses quatro pares de irmãos. (Ver Exercício 9 para as demais colunas.)

Como no nosso exemplo anterior, segue de (10) que

$$\mathbf{x}^{(n)} = M^n\mathbf{x}^{(0)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Com uma conta demorada, podemos obter os autovalores e autovetores de M, que são

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \tfrac{1}{2}, \quad \lambda_4 = -\tfrac{1}{2}, \quad \lambda_5 = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{5}), \quad \lambda_6 = \tfrac{1}{4}(1-\sqrt{5})$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -3 \\ 3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(-3-\sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) \\ \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4}(-3-\sqrt{5}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) \\ \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

A diagonalização de M leva a

$$\mathbf{x}^{(n)} = PD^nP^{-1}\mathbf{x}^{(0)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

onde

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{4}(-3-\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{4}(-3-\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

$$D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left[\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})\right]^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left[\frac{1}{4}(1-\sqrt{5})\right]^n \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & \frac{1}{20}(5+\sqrt{5}) & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{20}(5+\sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{20}(5-\sqrt{5}) & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{20}(5-\sqrt{5}) & 0 \end{bmatrix}$$

Não escrevemos o produto matricial de (12) por ser um pouco desajeitado. Contudo, se for dado um vetor específico $\mathbf{x}^{(0)}$, os cálculos para $\mathbf{x}^{(n)}$ não são muito incômodos (ver Exercício 6).

Como os valores absolutos das últimas quatro entradas na diagonal de D são menores do que 1, vemos que quando n tende ao infinito,

$$D^n \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Segue da Equação (12) que

$$\mathbf{x}^{(n)} \to P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}\mathbf{x}^{(0)}$$

Efetuando a multiplicação matricial do lado direito, obtemos (verifique)

$$\mathbf{x}^{(n)} \to \begin{bmatrix} a_0 + \frac{2}{3}b_0 + \frac{1}{3}c_0 + \frac{2}{3}d_0 + \frac{1}{3}e_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_0 + \frac{1}{3}b_0 + \frac{2}{3}c_0 + \frac{1}{3}d_0 + \frac{2}{3}e_0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Isso mostra que, no limite, todos os pares de irmãos serão do tipo (A, AA) ou do tipo (a, aa). Por exemplo, se os pais iniciais forem do tipo (A, Aa) (ou seja, $b_0 = 1$ e $a_0 = c_0 = d_0 = e_0 = f_0 = 0$) então, quando n tende ao infinito,

$$\mathbf{x}^{(n)} \to \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Assim, no limite, há uma probabilidade de $\frac{2}{3}$ que os pares de irmãos serão (A, AA) e uma probabilidade $\frac{1}{3}$ que serão (a, aa).

Conjunto de exercícios 10.16

1. Mostre que se $M = PDP^{-1}$, então $M^n = PD^nP^{-1}$, com $n = 1, 2, \ldots$.

2. Suponha, no contexto do Exemplo 1, que as plantas sejam sempre fertilizadas por uma planta do genótipo *AA*. Deduza fórmulas para as frações de plantas dos genótipos *AA*, *Aa* e *aa* na enésima geração. Também encontre o limite da distribuição genotípica quando n tende ao infinito.

3. Suponha, no contexto do Exemplo 1, que as plantas iniciais sejam fertilizadas pelo genótipo *AA*, as plantas da primeira geração sejam fertilizadas pelo genótipo *Aa*, as plantas da segunda geração sejam fertilizadas pelo genótipo *AA* e que seja mantida essa alternância. Deduza fórmulas para as frações de plantas dos genótipos *AA*, *Aa* e *aa* na enésima geração.

4. Encontre os autovalores e autovetores da matriz M na seção em que discutimos doenças recessivas autossômicas e verifique a Equação (7).

5. Suponha que um criador tenha uma população animal na qual 25% seja portadora de uma doença recessiva autossômica. Se o criador permitir aos animais cruzar sem levar em conta o seu genótipo, use a Equação (9) para calcular o número de gerações que será necessário para a porcentagem dos portadores cair de 25% para 10%. Se o criador implementar, em vez disso, o programa de cruzamentos controlados determinado pela Equação (8), qual será a porcentagem de portadores depois do mesmo número de gerações?

6. Na seção sobre hereditariedade ligada ao sexo, suponha que os pais iniciais sejam de um dos seis pares genotípicos possíveis com igual probabilidade, ou seja, suponha que

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Usando a Equação (12), calcule $\mathbf{x}^{(n)}$ e também o limite de $\mathbf{x}^{(n)}$ quando n tende ao infinito.

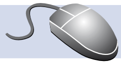
7. Mostre, a partir da Equação (13), que, para a hereditariedade ligada ao sexo com procriação consanguínea, a probabilidade de que no limite o par de irmãos seja (A, AA) é igual à proporção de genes A na população inicial.

8. Na hereditariedade ligada ao sexo, suponha que nenhuma das fêmeas do genótipo *Aa* chegue à maturidade. Para a procriação consanguínea, os pares de irmãos possíveis são, então,

$$(A, AA), \quad (A, aa), \quad (a, AA) \quad \text{e} \quad (a, aa)$$

Encontre a matriz de transição que descreve como a distribuição genotípica muda em uma geração.

9. Deduza a matriz M da Equação (10) a partir da Tabela 2.



Seção 10.16 Exercícios com tecnologia

Os exercícios seguintes foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, esse recurso é MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser algum outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidades de Álgebra Linear. Em cada exercício, você deverá ler a documentação pertinente do recurso particular que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você estará capacitado a usar seu recurso computacional para resolver muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. (a) Use um computador para verificar que estão corretos os autovalores e autovetores de

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

dados no texto.

(b) Começando com $\mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)}$ e a hipótese de que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}$$

exista, devemos ter

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}^{(n)} = M \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}^{(n-1)} \quad \text{ou} \quad \mathbf{x} = M\mathbf{x}$$

Isso sugere que $\mathbf{x}$ possa ser resolvido diretamente usando a equação $(M - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Use um computador para resolver a equação $\mathbf{x} = M\mathbf{x}$ sendo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

e $a + b + c + d + e + f = 1$; compare seu resultado com a Equação (13). Explique por que a solução de $(M - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ junto com $a + b + c + d + e + f = 1$ não é suficientemente específica para determinar o $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}^{(n)}$.

T2. (a) Dados a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{4}(-3-\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{4}(-3-\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

da Equação (12) e o limite

$$\lim_{n\to\infty} D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

use um computador para mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} M^n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Use um computador para calcular M^n com $n = 10, 20, 30, 40, 50, 60$ e 70 e, em seguida, compare seus resultados com o limite da parte (a).

10.17 Crescimento populacional por faixa etária

Nesta seção, utilizamos o modelo matricial Leslie para investigar o crescimento ao longo do tempo de uma população feminina que está dividida em faixas etárias. Em seguida, determinamos o limite da distribuição etária e da taxa de crescimento populacional.

PRÉ-REQUISITOS: Autovetores e autovalores
Diagonalização de uma matriz
Compreensão intuitiva de limites

Um dos modelos de crescimento populacional mais comumente usado pelos demógrafos é o assim chamado modelo Leslie, desenvolvido na década de 1940. Esse modelo descreve o crescimento da parte fêmea de uma população animal ou humana. Nesse modelo, as fêmeas são divididas em faixas etárias de igual duração. Para sermos específicos, suponha que a idade máxima atingida por qualquer fêmea da população seja L anos (ou alguma outra unidade de tempo). Se dividirmos a população em n faixas etárias, então cada faixa terá L/n anos de duração. Numeramos as faixas etárias de acordo com a Tabela 1.

Tabela 1

Faixa etária	Intervalo de idade
1	$[0, L/n)$
2	$[L/n, 2L/n)$
3	$[2L/\psi\, n, 3L/n)$
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$[(n-2)L/n, (n-1)L/n)$
n	$[(n-1)L/n, L]$

Vamos supor que seja conhecido o número de fêmeas em cada uma das n faixas no instante $t = 0$. Em particular, vamos supor que há $x_1^{(0)}$ fêmeas na primeira faixa, $x_2^{(0)}$ fêmeas na segunda faixa, e assim por diante. Com esses n números, formamos um vetor coluna

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

que denominamos ***vetor de distribuição etária inicial***.

À medida que o tempo avança, o número de fêmeas dentro de cada uma das n faixas muda em virtude de três processos biológicos: nascimento, morte e envelhecimento. Descrevendo esses três processos quantitativamente, veremos como projetar o futuro do vetor de distribuição etária inicial.

A maneira mais fácil de estudar o processo de envelhecimento é observar a população a intervalos discretos de tempo, digamos, $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ O modelo Leslie requer que

a duração entre dois tempos de observação sucessivos seja igual à duração da faixa etária. Portanto, colocamos

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ t_1 &= L/n \\ t_2 &= 2L/n \\ &\vdots \\ t_k &= kL/n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Com essa hipótese, todas as fêmeas na faixa etária $(i+1)$ no instante t_{k+1} estavam na faixa i no instante t_k.

Os processos de nascimento e morte entre dois tempos de observações sucessivas podem ser descritos por meio dos parâmetros demográficos seguintes.

a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$	O número médio de filhas nascidas por fêmea durante o tempo em que ela está na faixa etária i
b_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$	A fração de fêmeas da faixa etária i que se espera que vá sobreviver e passar para a faixa etária $(i+1)$

Pelas definições, temos que

$$\begin{aligned} &\text{(i) } a_i \geq 0 && \text{com } i = 1, 2, \ldots, n \\ &\text{(ii) } 0 < b_i \leq 1 && \text{com } i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

Note que não permitimos que qualquer b_i seja nulo, pois, nesse caso, nenhuma fêmea sobreviveria a faixa etária i. Também vamos supor que pelo menos um dos a_i seja positivo, de modo que há algum nascimento. Qualquer faixa etária em que o valor correspondente de a_i for positivo é denominada ***faixa etária fértil***.

Em seguida, definimos o vetor $\mathbf{x}^{(k)}$ de distribuição etária no instante t_k por

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

em que $x_i^{(k)}$ é o número de fêmeas na faixa etária i no instante t_k. Agora, no instante t_k, as fêmeas na primeira faixa etária são exatamente as filhas nascidas entre os instantes t_{k-1} e t_k. Assim, podemos escrever

$$\left\{\begin{matrix}\text{o número de}\\ \text{fêmeas na}\\ \text{faixa etária 1}\\ \text{no instante } t_k\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{o número de}\\ \text{filhas nascidas}\\ \text{de fêmeas na}\\ \text{faixa etária}\\ \text{1 entre os}\\ \text{instantes } t_{k-1}\\ \text{e } t_k\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{o número de}\\ \text{filhas nascidas}\\ \text{de fêmeas na}\\ \text{faixa etária}\\ \text{2 entre os}\\ \text{instantes } t_{k-1}\\ \text{e } t_k\end{matrix}\right\} + \cdots + \left\{\begin{matrix}\text{o número de}\\ \text{filhas nascidas}\\ \text{de fêmeas na}\\ \text{faixa etária}\\ n \text{ entre os}\\ \text{instantes } t_{k-1}\\ \text{e } t_k\end{matrix}\right\}$$

ou, matematicamente,

$$x_1^{(k)} = a_1x_1^{(k-1)} + a_2x_2^{(k-1)} + \cdots + a_nx_n^{(k-1)} \tag{1}$$

As fêmeas na faixa etária $(i+1)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ no instante t_k são aquelas fêmeas que estavam na faixa etária i no instante t_{k-1} e que ainda vivem no instante t_k. Assim,

$$\left\{\begin{array}{c}\text{o número de}\\ \text{fêmeas na faixa}\\ \text{etária } i+1 \text{ no}\\ \text{instante } t_k\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{a fração de}\\ \text{fêmeas da faixa}\\ \text{etária } i \text{ que}\\ \text{sobrevive e passa}\\ \text{para a faixa}\\ \text{etária } i+1\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c}\text{o número de}\\ \text{fêmeas na}\\ \text{faixa etária } i\\ \text{no instante } t_{k-1}\end{array}\right\}$$

ou, matematicamente,

$$x_{i+1}^{(k)} = b_ix_i^{(k-1)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{2}$$

Usando notação matricial, podemos escrever as Equações (1) e (2) como

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

ou, mais compactamente, como

$$\mathbf{x}(k) = L\mathbf{x}^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

onde L é a ***matriz de Leslie***

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Pela Equação (3), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= L\mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(2)} &= L\mathbf{x}^{(1)} = L^2\mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(3)} &= L\mathbf{x}^{(2)} = L^3\mathbf{x}^{(0)} \\ &\vdots \\ \mathbf{x}^{(k)} &= L\mathbf{x}^{(k-1)} = L^k\mathbf{x}^{(0)} \end{aligned} \tag{5}$$

Assim, se conhecermos a distribuição etária inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ e a matriz de Leslie L, poderemos determinar a distribuição etária das fêmeas em qualquer tempo posterior.

▶ EXEMPLO 1 Distribuição etária de fêmeas em animais

Suponha que a idade máxima atingida pelas fêmeas de uma certa população animal seja de 15 anos e que a população seja dividida em três faixas etárias de mesma duração de cinco anos. Suponha que a matriz de Leslie dessa população seja

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Se inicialmente havia 1.000 fêmeas em cada uma das três faixas etárias, então, pela Equação (3), temos

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = L\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.000 \\ 500 \\ 250 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = L\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.000 \\ 500 \\ 250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.750 \\ 3.500 \\ 125 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = L\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.750 \\ 3.500 \\ 125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.375 \\ 1.375 \\ 875 \end{bmatrix}$$

Assim, depois de 15 anos há 14.375 fêmeas entre 0 e 5 anos, 1.375 fêmeas entre 5 e 10 anos e 875 fêmeas entre 10 e 15 anos. ◀

Comportamento limite

Embora a Equação (5) dê a distribuição etária da população em qualquer instante, ela não dá automaticamente uma ideia geral da dinâmica do processo de crescimento. Para ter isso, precisamos investigar os autovalores e autovetores da matriz de Leslie. Os autovalores de L são as raízes do polinômio característico. No Exercício 2, pedimos para o leitor verificar que esse polinômio característico é

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |\lambda I - L| \\ &= \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} - \cdots - a_nb_1b_2\cdots b_{n-1} \end{aligned}$$

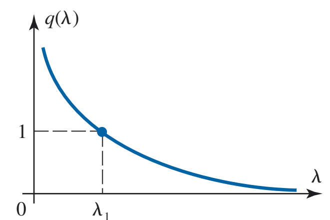
Para analisar as raízes desse polinômio, é conveniente introduzir a função

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3b_1b_2}{\lambda^3} + \cdots + \frac{a_nb_1b_2\ \cdots b_{n-1}}{\lambda^n} \tag{6}$$

Usando essa função, a equação característica $p(\lambda) = 0$ pode ser escrita (verifique) como

$$q(\lambda) = 1 \quad \text{com } \lambda \neq 0 \tag{7}$$

Como todos os a e b são não negativos, vemos que $q(\lambda)$ é monotonamente decrescente com λ maior do que zero. Além disso, $q(\lambda)$ tem uma assíntota vertical em $\lambda = 0$ e tende a zero quando $\lambda \to \infty$. Consequentemente, como indicamos na Figura 10.17.1, existe um único λ, digamos, $\lambda = \lambda_1$, tal que $q(\lambda_1) = 1$. Ou seja, a matriz L tem um único autovalor positivo. Também pode ser mostrado (Exercício 3) que λ_1 tem multiplicidade 1, ou seja, λ_1 não é uma raiz repetida da equação característica. Não daremos os detalhes computacionais, mas o leitor pode verificar que um autovetor associado a λ_1 é



▲ **Figura 10.17.1**

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_1b_2/\lambda_1^2 \\ b_1b_2b_3/\lambda_1^3 \\ \vdots \\ b_1b_2\cdots b_{n-1}/\lambda_1^{n-1} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Como λ_1 tem multiplicidade 1, o autoespaço correspondente tem dimensão 1 (Exercício 3) e, portanto, qualquer autovetor associado a $\mathbf{x}_1$ é algum múltiplo de $\mathbf{x}_1$. Podemos resumir esses resultados no teorema seguinte.

TEOREMA 10.17.1 Existência de autovalores positivos

Uma matriz de Leslie L tem um único autovalor positivo λ_1. Esse autovalor tem multiplicidade 1 e um autovetor associado $\mathbf{x}_1$ cujas entradas são todas positivas.

Agora mostramos que o comportamento a longo termo da distribuição etária da população é determinado pelo autovalor positivo λ_1 e seu autovetor $\mathbf{x}_1$.

No Exercício 9, pedimos para o leitor provar o resultado seguinte.

TEOREMA 10.17.2 Autovalores de uma matriz de Leslie

Se λ_1 for o único autovalor positivo de uma matriz de Leslie L e λ_k for qualquer outro autovalor real ou complexo de L, então $|\lambda_k| \leq \lambda_1$.

Para os nossos propósitos, a conclusão do Teorema 10.17.2 não é suficientemente forte; gostaríamos que valesse $|\lambda_k| < \lambda_1$. Nesse caso, diríamos que λ_1 é um ***autovalor dominante*** de L. Contudo, como mostramos no próximo exemplo, nem todas as matrizes de Leslie satisfazem essa condição.

▶ EXEMPLO 2 Uma matriz de Leslie sem autovalor dominante

Seja

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Então o polinômio característico de L é

$$p(\lambda) = |\lambda I - L| = \lambda^3 - 1$$

Os autovalores de L são, portanto, as soluções de $\lambda^3 = 1$, a saber,

$$\lambda = 1, \qquad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Os três autovalores têm valor absoluto 1, de modo que o único autovalor positivo $\lambda_1 = 1$ não é dominante. Observe que essa matriz de Leslie tem a propriedade $L^3 = I$. Isso significa que, dada qualquer escolha da distribuição etária inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, temos

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(6)} = \cdots = \mathbf{x}^{(3k)} = \cdots$$

Isso significa que o vetor de distribuição etária oscila com um período de três unidades de tempo. Tais oscilações (denominadas ***ondas populacionais***) não podem ocorrer se λ_1 for um autovalor dominante, como veremos. ◀

Está além do objetivo deste livro discutir condições necessárias e suficientes para λ_1 ser um autovalor dominante. No entanto, enunciamos a condição suficiente que segue sem demonstração.

TEOREMA 10.17.3 Autovalor dominante

Se duas entradas sucessivas a_i e a_{i+1} da primeira linha de uma matriz de Leslie L forem não nulas, então o autovalor positivo de L é dominante.

Assim, se a população de fêmeas tem duas faixas etárias férteis sucessivas, então a matriz de Leslie tem um autovalor dominante. Isso sempre ocorre com populações de verdade se a faixa etária for tomada suficientemente pequena. Note que, no Exemplo 2, só há uma faixa etária fértil (a terceira) e, portanto, não vale a hipótese do Teorema 10.17.3. No que segue, vamos supor sempre que a condição do Teorema 10.17.3 seja válida.

Vamos supor que L seja diagonalizável. Isso não é realmente necessário para o que queremos mostrar, mas simplifica a argumentação. Nesse caso, L tem n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, não necessariamente distintos, e n autovetores associados linearmente independentes, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Nessa listagem, o autovalor dominante λ_1 aparece em primeiro lugar. Agora construímos uma matriz P cujas colunas são os autovetores de L.

$$P = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3 \mid \cdots \mid \mathbf{x}_n]$$

A diagonalização de L é, então, dada pela equação

$$L = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

Daqui segue que

$$L^k = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

com $k = 1, 2, \ldots$ Dado qualquer vetor de distribuição etária inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, temos, então,

$$L^k \mathbf{x}^{(0)} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}^{(0)}$$

com $k = 1, 2, \ldots$ Dividindo ambos os lados dessa equação por λ_1^k e lembrando que $\mathbf{x}^{(k)} = L^k \mathbf{x}^{(0)}$, obtemos

$$\frac{1}{\lambda_1^k} \mathbf{x}^{(k)} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}^{(0)} \tag{9}$$

Como λ_1 é o autovalor dominante, temos $|\lambda_i/\lambda_1| < 1$ com $i = 2, 3, \ldots, n$. Segue que

$$(\lambda_i/\lambda_1)^k \to 0 \text{ quando } k \to \infty \quad \text{com } i = 2, 3, \ldots, n$$

Usando esse fato, podemos tomar o limite de ambos os lados de (9) para obter

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{x}^{(k)}\right\} = P\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}P^{-1}\mathbf{x}^{(0)} \tag{10}$$

Denotamos a primeira entrada do vetor coluna $P^{-1}\mathbf{x}^{(0)}$ pela constante c. No Exercício 4, pedimos para o leitor mostrar que o lado direito de (10) pode ser reescrito como $c\mathbf{x}_1$, onde c é uma constante positiva que depende somente do vetor de distribuição etária inicial $\mathbf{x}^{(0)}$. Assim, (10) fica

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{x}^{(k)}\right\} = c\mathbf{x}_1 \tag{11}$$

A Equação (11) dá a aproximação

$$\mathbf{x}^{(k)} \simeq c\lambda_1^k\mathbf{x}_1 \tag{12}$$

com valores grandes de k. Por (12) também temos

$$\mathbf{x}^{(k-1)} \simeq c\lambda_1^{k-1}\mathbf{x}_1 \tag{13}$$

Comparando as Equações (12) e (13), vemos que

$$\mathbf{x}^{(k)} \simeq \lambda_1\mathbf{x}^{(k-1)} \tag{14}$$

com valores grandes de k. Isso significa que, com valores grandes do tempo, cada vetor de distribuição etária é um múltiplo escalar do vetor de distribuição etária anterior, o escalar sendo o autovalor positivo da matriz de Leslie. Consequentemente, a *proporção* de fêmeas em cada faixa etária torna-se constante. Como vemos no próximo exemplo, essas proporções no limite podem ser determinadas a partir do autovetor $\mathbf{x}_1$.

▶ EXEMPLO 3 De novo o Exemplo 1

A matriz de Leslie do Exemplo 1 era

$$L = \begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\end{bmatrix}$$

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda - \frac{3}{8}$ e o leitor pode verificar que o autovalor positivo é $\lambda_1 = \frac{3}{2}$. Por (8), o autovetor correspondente $\mathbf{x}_1$ é

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\ b_1/\lambda_1\\ b_1b_2/\lambda_1^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\\ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{18}\end{bmatrix}$$

Por (14), temos

$$\mathbf{x}^{(k)} \simeq \tfrac{3}{2}\mathbf{x}^{(k-1)}$$

com valores grandes de k. Logo, a cada cinco anos o número de fêmeas em cada uma das três faixas cresce cerca de 50%, assim como o número total de fêmeas da população.

Por (12), temos

$$\mathbf{x}^{(k)} \simeq c\left(\tfrac{3}{2}\right)^k \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} \end{bmatrix}$$

Consequentemente, a longo termo, as fêmeas estarão distribuídas entre as três faixas etárias na proporção $1:\frac{1}{3}:\frac{1}{18}$. Isso corresponde a uma distribuição de 72% das fêmeas na primeira faixa etária, 24% das fêmeas na segunda faixa etária e 4% das fêmeas na terceira faixa etária.

▶ EXEMPLO 4 Distribuição etária de fêmeas humanas

Neste exemplo, utilizamos os parâmetros de nascimento e morte do ano de 1965 das mulheres canadenses. Como poucas mulheres com mais de 50 anos geram filhos, vamos nos restringir à porção da população de mulheres entre os 0 e os 50 anos de idade. Os dados são para faixas de cinco anos, de modo que há 10 faixas etárias. Em vez de escrever a matriz 10×10 de Leslie completa, vamos enumerar os parâmetros como segue.

Intervalo de idade	a_i	b_i
[0, 5)	0,00000	0,99651
[5, 10)	0,00024	0,99820
[10, 15)	0,05861	0,99802
[15, 20)	0,28608	0,99729
[20, 25)	0,44791	0,99694
[25, 30)	0,36399	0,99621
[30, 35)	0,22259	0,99460
[35, 40)	0,10457	0,99184
[40, 45)	0,02826	0,98700
[45, 50)	0,00240	—

Usando técnicas numéricas, podemos aproximar o autovalor positivo e o autovetor associado por

$$\lambda_1 = 1{,}07622 \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1{,}00000 \\ 0{,}92594 \\ 0{,}85881 \\ 0{,}79641 \\ 0{,}73800 \\ 0{,}68364 \\ 0{,}63281 \\ 0{,}58482 \\ 0{,}53897 \\ 0{,}49429 \end{bmatrix}$$

Assim, se as mulheres canadenses continuarem a se reproduzir e morrer como o fizeram em 1965, a longo termo seu número irá aumentar 7,622% a cada cinco anos. No autovetor $\mathbf{x}_1$ podemos observar que, a longo termo, para cada 100.000 mulheres entre 0 e 5 anos de idade, haverá 92.594 mulheres entre os 5 e os 10 anos, 85.881 mulheres entre os 10 e os 15 anos, e assim por diante. ◀

Voltamos à Equação (12), que dá o vetor de distribuição etária da população para tempos grandes, ou seja,

$$\mathbf{x}^{(k)} \simeq c\lambda_1^k \mathbf{x}_1 \tag{15}$$

De acordo com o valor do autovalor positivo λ_1, temos três casos:

(i) a população acaba aumentando se $\lambda_1 > 1$.
(ii) a população acaba diminuindo se $\lambda_1 < 1$.
(iii) a população acaba estabilizando se $\lambda_1 = 1$.

O caso $\lambda_1 = 1$ é particularmente interessante, pois determina uma população com ***crescimento populacional nulo***. Dada qualquer distribuição etária inicial, a população tende a uma distribuição etária limite que é algum múltiplo do autovetor $\mathbf{x}_1$. A partir das Equações (6) e (7), vemos que $\lambda_1 = 1$ é um autovalor se, e só se,

$$a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \cdots + a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1} = 1 \tag{16}$$

A expressão

$$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \cdots + a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1} \tag{17}$$

é denominada ***taxa líquida de reprodução*** da população (Ver o Exercício 5 para uma interpretação demográfica de R.) Assim, podemos dizer que uma população tem crescimento populacional nulo se, e só se, sua taxa líquida de reprodução é 1.

Conjunto de exercícios 10.17

1. Suponha que uma certa população animal seja dividida em duas faixas etárias e tenha uma matriz de Leslie

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule o autovalor positivo λ_1 de L e o correspondente autovetor $\mathbf{x}_1$.

(b) Começando com o vetor de distribuição etária inicial

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$$

calcule $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, $\mathbf{x}^{(3)}$, $\mathbf{x}^{(4)}$ e $\mathbf{x}^{(5)}$, arredondando ao inteiro mais próximo quando necessário.

(c) Calcule $\mathbf{x}^{(6)}$ usando a fórmula exata $\mathbf{x}^{(6)} = L\mathbf{x}^{(5)}$ e a fórmula aproximada $\mathbf{x}^{(6)} \simeq \lambda_1 \mathbf{x}^{(5)}$.

2. Encontre o polinômio característico de uma matriz de Leslie arbitrária dada pela Equação (4).

3. (a) Mostre que o autovalor positivo λ_1 de uma matriz de Leslie é sempre simples. Lembre que uma raiz λ_0 de um polinômio $q(\lambda)$ é dita simples se, e só se, $q'(\lambda_0) \neq 0$.

(b) Mostre que o autoespaço correspondente a λ_1 tem dimensão 1.

4. Mostre que o lado direito de (10) é $c\mathbf{x}_1$, onde c é a primeira entrada do vetor coluna $P^{-1}\mathbf{x}^{(0)}$.

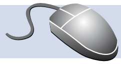
5. Mostre que a taxa líquida de reprodução R, definida por (17), pode ser interpretada como o número médio de filhas nascidas de uma única fêmea durante o seu período de vida.

6. Mostre que a população acaba diminuindo se, e só se, a taxa líquida de reprodução é menor do que 1. Analogamente, mostre que a população acaba aumentando se, e só se, a taxa líquida de reprodução é maior do que 1.

7. Calcule a taxa líquida de reprodução da população animal do Exemplo 1.

8. (***Requer calculadora***) Calcule a taxa líquida de reprodução das mulheres canadenses do Exemplo 4.

9. (***Requer as Seções* 10.1-10.3**) Prove o Teorema 10.17.2. [*Sugestão*: escreva $\lambda_k = re^{i\theta}$, substitua em (7), tome a parte real de ambos os lados e mostre que $r \leq \lambda_1$.]



Seção 10.17 Exercícios com tecnologia

Os exercícios seguintes foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, esse recurso é MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser algum outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidades de Álgebra Linear. Em cada exercício, você deverá ler a documentação pertinente do recurso particular que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você estará capacitado a usar seu recurso computacional para resolver muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Considere a sequência de matrizes de Leslie

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad L_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 \end{bmatrix}, \ldots$$

(a) Use um computador para mostrar que

$$L_2^2 = I_2, \qquad L_3^3 = I_3, \qquad L_4^4 = I_4, \qquad L_5^5 = I_5, \ldots$$

com uma escolha conveniente de a em termos de $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$.

(b) A partir de suas respostas na parte (a), conjecture uma relação entre a e $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ que garanta $L_n^n = I_n$, onde

$$L_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Determine uma expressão para $p_n(\lambda) = |\lambda I_n - L_n|$ e use-a para mostrar que todos os autovalores de L_n satisfazem $|\lambda| = 1$ se a e $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ forem relacionados pela equação determinada na parte (b).

T2. Considere a sequência de matrizes de Leslie

$$L_2 = \begin{bmatrix} a & ap \\ b & 0 \end{bmatrix}, \qquad L_3 = \begin{bmatrix} a & ap & ap^2 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix},$$

$$L_4 = \begin{bmatrix} a & ap & ap^2 & ap^3 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix},$$

$$L_5 = \begin{bmatrix} a & ap & ap^2 & ap^3 & ap^4 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}, \ldots$$

$$L_n = \begin{bmatrix} a & ap & ap^2 & \cdots & ap^{n-2} & ap^{n-1} \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & 0 \end{bmatrix}$$

com $0 < p < 1$, $0 < b < 1$ e $1 < a$.

(a) Escolha um valor de n (digamos, $n = 8$). Tomando vários valores de a, b e p, use um computador para determinar o autovalor dominante de L_n e, em seguida, compare seus resultados com o valor de $a + bp$.

(b) Mostre que

$$p_n(\lambda) = |\lambda I_n - L_n| = \lambda^n - a\left(\frac{\lambda^n - (bp)^n}{\lambda - bp}\right)$$

o que significa que os autovalores de L_n devem satisfazer

$$\lambda_{n+1} - (a + bp)\lambda_n + a(bp)^n = 0$$

(c) Você consegue dar um esboço de uma prova que explique por que $\lambda_1 \simeq a + bp$?

T3. Suponha que uma população de camundongos tenha uma matriz de Leslie L num período de 1 mês e com um vetor de distribuição etária $\mathbf{x}^{(0)}$ dados por

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 50 \\ 40 \\ 30 \\ 20 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule a taxa líquida de reprodução da população.

(b) Calcule o vetor de distribuição etária depois de 100 e 101 meses e mostre que o vetor depois de 101 meses é, aproximadamente, um múltiplo escalar do vetor depois de 100 meses.

(c) Calcule o autovalor dominante de L e seu autovetor associado. Como esses valores se relacionam com os valores encontrados na parte (b)?

(d) Suponha que queiramos controlar a população de camundongos administrando uma substância que reduza por uma fração constante as taxas de nascimentos por faixa etária (as entradas na primeira linha de L). Qual é o intervalo dessas frações que acaba causando um decrescimento da população?

10.18 Colheita de populações animais

Nesta seção, utilizamos o modelo matricial Leslie de crescimento populacional para modelar a colheita sustentável de populações animais. Também examinamos o efeito de colher frações diferentes de grupos etários diferentes.

PRÉ-REQUISITO: Crescimento populacional por faixa etária (Seção 10.17)

Colheita

Na Seção 10.17, utilizamos o modelo matricial Leslie para examinar o crescimento de uma população de fêmeas divididas por faixas etárias discretas. Nesta seção, investigamos os efeitos de colher animais numa população que cresce de acordo com um tal modelo. Por ***colher*** queremos dizer remover animais da população. (O verbo "colher" não é necessariamente um eufemismo para "abater"; os animais podem ser removidos da população para outros propósitos.)

Nesta seção, nos restringimos a políticas de colheita *sustentáveis*, o que significa o seguinte.

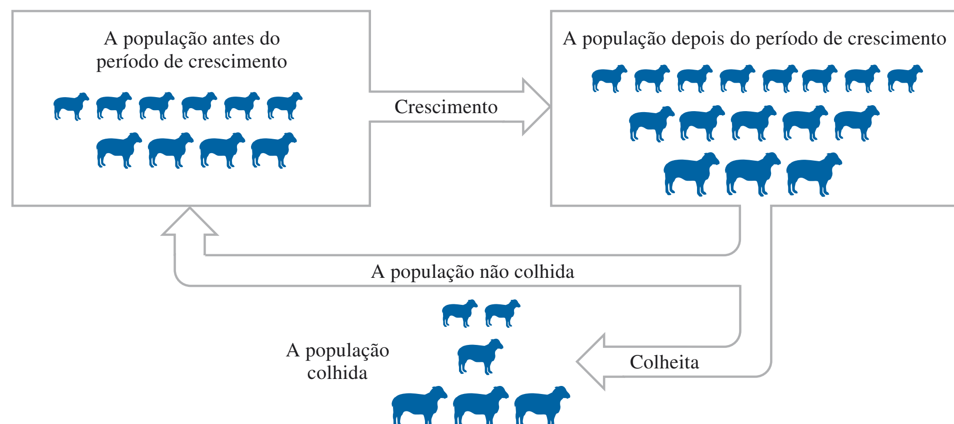
DEFINIÇÃO 1 Uma política de colheita, pela qual uma população animal é periodicamente colhida, é dita ***sustentável*** se o rendimento de cada colheita for o mesmo e a distribuição etária da população remanescente depois de cada colheita for a mesma.

Assim, a população animal não é dizimada por uma política de colheita sustentável; somente é removido o excesso.

Como na Seção 10.17, tratamos somente das fêmeas da população. Se o número de machos em cada faixa etária for igual ao número de fêmeas (uma hipótese razoável com muitas populações), então nossas políticas de colheita também aplicam à população de machos.

O modelo de colheita

A Figura 10.18.1 ilustra a ideia básica do modelo. Começamos com uma população de uma certa distribuição etária. Essa população passa por um período de crescimento descrito por uma matriz de Leslie. Ao final do período de crescimento, uma certa fração da população de cada faixa etária é colhida de tal modo que a população não colhida tem a mesma distribuição etária que a população original. Esse ciclo é repetido depois de cada colheita, de modo que o rendimento é sustentável. Supomos que a duração da colheita seja curta em comparação com o período de crescimento, de modo que qualquer crescimento ou mudança na população durante o período de colheita pode ser ignorado.



▶ **Figura 10.18.1**

Para descrever esse modelo de colheita matematicamente, seja

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

o vetor de distribuição etária da população antes de começar o período de crescimento. Assim, x_i é o número das fêmeas na faixa etária i que não foram colhidas. Como na Seção 10.17, exigimos que a duração de cada faixa etária seja idêntica à duração do período de crescimento. Por exemplo, se a população for colhida uma vez ao ano, então a população é dividida em faixas etárias de um ano.

Se L for a matriz de Leslie que descreve o crescimento da população, então o vetor $L\mathbf{x}$ é o vetor de distribuição etária da população ao final do período de crescimento, imediatamente antes da colheita periódica. Seja h_i, com $i = 1, 2, \ldots, n$, a fração das fêmeas da faixa i que é colhida. Usamos esses n números para formar uma matriz diagonal $n \times n$

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_n \end{bmatrix}$$

que denominamos ***matriz de colheita***. Por definição, temos

$$0 \leq h_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ou seja, podemos colher nada ($h_i = 0$), tudo ($h_i = 1$), ou alguma fração ($0 < h_i < 1$) de cada uma das n faixas etárias. Como o número de fêmeas na faixa i imediatamente antes de cada colheita é a i-ésima entrada $(L\mathbf{x})_i$ do vetor $L\mathbf{x}$, a i-ésima entrada do vetor coluna

$$HL\mathbf{x} = \begin{bmatrix} h_1(L\mathbf{x})_1 \\ h_2(L\mathbf{x})_2 \\ \vdots \\ h_n(L\mathbf{x})_n \end{bmatrix}$$

é o número de fêmeas colhidas da faixa i.

Pela definição de política de colheita sustentável, temos

$$\begin{bmatrix} \text{distribuição etária} \\ \text{ao final do período} \\ \text{de crescimento} \end{bmatrix} - [\text{colheita}] = \begin{bmatrix} \text{distribuição etária} \\ \text{ao início do período} \\ \text{de crescimento} \end{bmatrix}$$

ou, matematicamente,

$$L\mathbf{x} - HL\mathbf{x} = \mathbf{x} \tag{1}$$

Escrevendo a Equação (1) na forma

$$(I - H)L\mathbf{x} = \mathbf{x} \tag{2}$$

vemos que $\mathbf{x}$ deve ser um autovetor da matriz $(I - H)L$ associado ao autovalor 1. Como mostramos em seguida, isso coloca certas restrições nos valores de h_i e de $\mathbf{x}$.

Suponha que a matriz de Leslie da população seja

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Então a matriz $(I - H)L$ é dada por (verifique)

$$(I - H)L = \begin{bmatrix} (1-h_1)a_1 & (1-h_1)a_2 & (1-h_1)a_3 & \cdots & (1-h_1)a_{n-1} & (1-h_1)a_n \\ (1-h_2)b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (1-h_3)b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (1-h_n)b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, vemos que a matriz $(I - H)L$ é uma matriz do mesmo formato que uma matriz de Leslie. Na Seção 10.17, mostramos que uma condição necessária e suficiente para uma matriz de Leslie ter 1 como um autovalor é que a taxa líquida de reprodução também seja 1 [ver Equação (16) da Seção 10.17]. Calculando a taxa líquida de reprodução de $(I - H)L$ e igualando-a a 1, obtemos (verifique)

$$\begin{aligned}(1 - h_1)[a_1 + a_1 b_1(1 - h_2) + a_3 b_1 b_2(1 - h_2)(1 - h_3) + \cdots \\ + a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1}(1 - h_2)(1 - h_3)\cdots(1 - h_n)] = 1\end{aligned} \tag{4}$$

Essa equação coloca uma restrição nas frações de colheita admissíveis. Somente aqueles valores de $h_1, h_2, \ldots, h_n$ que satisfazem (4) e que pertencem ao intervalo [0, 1] podem produzir um rendimento sustentável.

Se $h_1, h_2, \ldots, h_n$ satisfizerem (4), então a matriz $(I - H)L$ tem o autovalor desejado $\lambda_1 = 1$ e, além disso, esse autovalor tem multiplicidade 1, pois o autovalor positivo de uma matriz de Leslie sempre tem multiplicidade 1 (Teorema 10.17.1). Isso significa que existe somente um vetor linearmente independente **x** satisfazendo a Equação (2). [Ver Exercício 3(b) da Seção 10.17.] Uma possível escolha de **x** é o autovetor normalizado seguinte.

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1(1 - h_2) \\ b_1 b_2(1 - h_2)(1 - h_3) \\ b_1 b_2 b_3(1 - h_2)(1 - h_3)(1 - h_4) \\ \vdots \\ b_1 b_2 b_3 \cdots b_{n-1}(1 - h_2)(1 - h_2)\cdots(1 - h_n) \end{bmatrix} \tag{5}$$

Qualquer outra solução **x** de (2) é um múltiplo de $\mathbf{x}_1$. Assim, o vetor $\mathbf{x}_1$ determina a proporção de fêmeas dentro de cada uma das n classes depois de uma colheita numa política de colheita sustentável. No entanto, há uma ambiguidade no número total de fêmeas da população depois de cada colheita. Isso pode ser determinado por alguma condição auxiliar, como uma restrição ecológica ou econômica. Por exemplo, para uma população economicamente sustentada pelo colhedor, a maior população que ele puder criar entre as safras determinaria a constante particular pela qual devemos multiplicar $\mathbf{x}_1$ para obter o vetor apropriado **x** na Equação (2). Para uma população selvagem, o hábitat da população determinaria quão grande ela poderia ficar entre as colheitas.

Resumindo os resultados obtidos até aqui, vemos que há uma ampla escolha dos valores de $h_1, h_2, \ldots, h_n$ que produzirão um rendimento sustentável. No entanto, uma vez selecionados esses valores, a distribuição etária proporcional da população depois de cada colheita é determinada de modo único pelo autovetor normalizado $\mathbf{x}_1$ definido pela Equação (5). Agora consideramos algumas poucas estratégias específicas de colheita desse tipo.

Colheita uniforme

Com muitas populações, é difícil distinguir ou apanhar animais de uma idade específica. Se os animais são colhidos aleatoriamente, podemos supor que a fração colhida de cada faixa etária seja a mesma. Por isso, colocamos

$$h = h_1 = h_2 = \cdots = h_n$$

A Equação (2) reduz-se a (verifique)

$$L\mathbf{x} = \left(\frac{1}{1-h}\right)\mathbf{x}$$

Portanto, $1/(1 - h)$ deve ser o único autovalor positivo λ_1 da matriz de Leslie de crescimento L, ou seja,

$$\lambda_1 = \frac{1}{1-h}$$

Resolvendo para a fração de colheita h, obtemos

$$h = 1 - (1/\lambda_1) \tag{6}$$

Nesse caso, o vetor $\mathbf{x}_1$ é o autovetor de L associado ao autovalor λ_1. Pela Equação (8) da Seção 10.17, esse vetor é

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_1 b_2/\lambda_1^2 \\ b_1 b_2 b_2/\lambda_1^3 \\ \vdots \\ b_1 b_2 \cdots b_{n-1}/\lambda_1^{n-1} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Por (6), podemos ver que quanto maior for λ_1, maior será a fração de animais que podemos colher sem dizimar a população. Observe que precisamos ter $\lambda_1 > 1$ para ter a fração de colheita h no intervalo (0, 1). Isso era de se esperar, pois $\lambda_1 > 1$ é a condição para ter uma população crescente.

▶ EXEMPLO 1 Colhendo ovelhas

Para uma certa espécie de ovelhas na Nova Zelândia, com período de crescimento de um ano, foi obtida a matriz de Leslie seguinte (ver G. Caughley, "Parameters for Seasonally Breeding Populations," *Ecology*, vol. 48, 1967, páginas 834–839).

$$L = \begin{bmatrix} 0{,}000 & 0{,}045 & 0{,}391 & 0{,}472 & 0{,}484 & 0{,}546 & 0{,}543 & 0{,}502 & 0{,}468 & 0{,}459 & 0{,}433 & 0{,}421 \\ 0{,}845 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}975 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}965 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}950 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}926 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}895 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}850 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}786 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}691 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}561 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}370 & 0 \end{bmatrix}$$

As ovelhas têm uma expectativa de vida de 12 anos, portanto são divididas em 12 faixas etárias de duração de 1 ano cada. Usando técnicas numéricas, podemos mostrar que

$$\lambda_1 = 1{,}176$$

é o único autovalor positivo de L. Pela Equação (6), a fração de colheita h é

$$h = 1 - (1/\lambda_1) = 1 - (1/1{,}176) = 0{,}150$$

Assim, a política de colheita uniforme nesse caso significa colher 15% das ovelhas de cada uma das 12 faixas etárias a cada ano. Por (7), o vetor de distribuição etária das ovelhas depois de cada colheita é proporcional a

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1{,}000 \\ 0{,}719 \\ 0{,}596 \\ 0{,}489 \\ 0{,}395 \\ 0{,}311 \\ 0{,}237 \\ 0{,}171 \\ 0{,}114 \\ 0{,}067 \\ 0{,}032 \\ 0{,}010 \end{bmatrix} \tag{8}$$

A partir de (8), vemos que, para cada 1.000 ovelhas entre 0 e 1 ano que não são colhidas, há 719 ovelhas entre 1 e 2 anos, 596 ovelhas entre 2 e 3 anos, e assim por diante. ◀

Colhendo somente da faixa etária mais jovem

Em algumas populações, somente as fêmeas mais jovens têm algum valor econômico, de modo que o colhedor procura colher somente as fêmeas da faixa etária mais jovem. Por isso, colocamos

$$h_1 = h$$
$$h_2 = h_3 = \cdots = h_n = 0$$

A Equação (4) reduz-se a

$$(1 - h)(a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \cdots + a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1}) = 1$$

ou

$$(1 - h)R = 1$$

onde R é a taxa líquida de reprodução da população. [Ver Equação (17) da Seção 10.17.] Resolvendo para h, obtemos

$$h = 1 - (1/R) \tag{9}$$

Observe que essa equação afirma que uma política de colheita sustentável só é possível se $R > 1$. Isso é razoável, pois a população só aumenta se $R > 1$. Pela Equação (5), o vetor de distribuição etária é proporcional ao vetor

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_1 b_2 \\ b_1 b_2 b_3 \\ \vdots \\ b_1 b_2 b_3 \cdots b_{n-1} \end{bmatrix} \tag{10}$$

▶ **EXEMPLO 2 Política de colheita sustentável**

Vamos aplicar esse tipo de política de colheita sustentável à população de ovelhas do Exemplo 1. Para a taxa líquida de reprodução da população, encontramos

$$\begin{aligned} R &= a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \cdots + a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1} \\ &= (0{,}000) + (0{,}045)(0{,}845) + \cdots + (0{,}421)(0{,}845)(0{,}975) \cdots (0{,}370) \\ &= 2{,}514 \end{aligned}$$

Pela Equação (9), a fração colhida da primeira faixa etária é

$$h = 1 - (1/R) = 1 - (1/2{,}514) = 0{,}602$$

Pela Equação (10), a distribuição etária da população depois da colheita é proporcional ao vetor

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1{,}000 \\ 0{,}845 \\ (0{,}845)(0{,}975) \\ (0{,}845)(0{,}975)(0{,}965) \\ \\ \vdots \\ \\ (0{,}845)(0{,}975)\cdots(0{,}370) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}000 \\ 0{,}845 \\ 0{,}824 \\ 0{,}795 \\ 0{,}755 \\ 0{,}699 \\ 0{,}626 \\ 0{,}532 \\ 0{,}418 \\ 0{,}289 \\ 0{,}162 \\ 0{,}060 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Um cálculo direto dá o seguinte (também ver Exercício 3):

$$L\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2{,}514 \\ 0{,}845 \\ 0{,}824 \\ 0{,}795 \\ 0{,}755 \\ 0{,}699 \\ 0{,}626 \\ 0{,}532 \\ 0{,}418 \\ 0{,}289 \\ 0{,}162 \\ 0{,}060 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

O vetor $L\mathbf{x}_1$ é o vetor de distribuição etária imediatamente antes da colheita. O total de todas as entradas de $L\mathbf{x}_1$ é 8,520, de modo que a primeira entrada de 2,514 perfaz 29,5% do total. Isso significa que, imediatamente antes de cada colheita, 29,5% da população estão na faixa mais jovem. Como são colhidos 60,2% dessa faixa, segue que 17,8% (= 60,2% de 29,5%) de toda a população de ovelhas são colhidos anualmente. Isso pode ser comparado com a política de colheita uniforme do Exemplo 1, na qual 15,0% da população de ovelhas são colhidos anualmente. ◀

Rendimento sustentável ótimo

Vimos no Exemplo 1 que uma política de colheita sustentável na qual colhemos a mesma fração de cada faixa etária produz um rendimento de 15,0% da população de ovelhas. No Exemplo 2, vimos que, se colhemos somente na faixa mais jovem, o rendimento resultante é 17,8% da população. Existem muitas outras políticas de colheita sustentáveis e cada uma, em geral, produz um rendimento diferente. Seria interessante encontrar uma política de colheita sustentável que produzisse o maior rendimento possível. Uma tal política é denominada ***política de colheita sustentável ótima***, e o rendimento resultante é denominado ***rendimento sustentável ótimo***. No entanto, para determinar o rendimento sustentável ótimo, necessitamos da teoria de Programação Linear, que não será discutida aqui. Referimos o leitor ao seguinte resultado, que aparece no artigo de J. R. Beddington e D. B. Taylor, "Optimum Age Specific Harvesting of a Population," *Biometrics*, vol. 29, 1973, páginas 801–809.

TEOREMA 10.18.1 Rendimento sustentável ótimo

Uma política de colheita sustentável ótima é aquela na qual são colhidas uma ou duas faixas etárias. Se duas faixas etárias forem colhidas, então a faixa mais velha é totalmente colhida.

Como uma ilustração, pode ser mostrado que o rendimento sustentável ótimo da população de ovelhas é alcançado quando

$$\begin{aligned} h_1 &= 0{,}522 \\ h_9 &= 1{,}000 \end{aligned} \tag{13}$$

e todos os demais valores de h forem zero. Assim, 52,2% das ovelhas entre 0 e 1 ano e todas as ovelhas entre 8 e 9 anos são colhidas. Conforme pedimos para o leitor mostrar no Exercício 2, o rendimento sustentável ótimo resultante é 19,9% da população.

Conjunto de exercícios 10.18

1. Suponha que uma certa população animal seja dividida em três faixas etárias de um ano de duração e que sua matriz de Leslie seja

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre o rendimento e o vetor de distribuição etária depois de cada colheita se anualmente for colhida a mesma fração de cada faixa etária.

(b) Encontre o rendimento e o vetor de distribuição etária depois de cada colheita se a cada ano for colhida somente a faixa etária mais jovem. Também obtenha a fração da faixa etária mais jovem que é colhida.

2. Encontre o vetor $\mathbf{x}_1$ que especifica a distribuição etária depois de cada colheita no caso da política de colheita sustentável ótima descrita pela Equações (13). Também calcule o vetor $L\mathbf{x}_1$ e mostre que o rendimento sustentável ótimo é 19,9% da população.

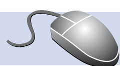
3. Se for colhida somente a primeira faixa etária de uma população animal, use a Equação (10) para mostrar que

$$L\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} R-1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

em que R é a taxa líquida de reprodução da população.

4. Se for colhida periodicamente apenas a faixa etária I de uma população animal (com $I = 1, 2, \ldots, n$), encontre a fração correspondente de colheita h_I.

5. Suponha que toda a faixa J e uma certa fração h_I da faixa I de uma população animal seja periodicamente colhida ($1 \leq I < J \leq n$). Calcule h_I.



Seção 10.18 Exercícios com tecnologia

Os exercícios seguintes foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, esse recurso é MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser algum outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidades de Álgebra Linear. Em cada exercício, você deverá ler a documentação pertinente do recurso particular que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você estará capacitado a usar seu recurso computacional para resolver muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Os resultados do Teorema 10.18.1 sugerem o algoritmo seguinte para determinar o rendimento sustentável ótimo.

(i) Dado qualquer valor de $i = 1, 2, \ldots, n$, tome $h_i = h$ e $h_k = 0$ com $k \neq i$ e calcule os respectivos rendimentos. Essas n contas dão os resultados para a colheita de uma faixa etária. É claro que é rejeitada qualquer conta que resulte num valor de h que não esteja entre 0 e 1.

(ii) Dado qualquer valor de $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ e $j = i + 1, i + 2, \ldots, n$, tome $h_i = h$, $h_j = 1$ e $h_k = 0$ com $k \neq i, j$ e calcule os respectivos rendimentos. Essas $\frac{1}{2}n(n - 1)$ contas dão os resultados para a colheita de duas faixas etárias. É claro que é rejeitada qualquer conta que resulte num valor de h que não esteja entre 0 e 1.

(iii) Dentre os rendimentos calculados nas partes (i) e (ii), o maior deles é o rendimento sustentável ótimo. Observe que haverá no máximo

$$n + \tfrac{1}{2}n(n - 1) = \tfrac{1}{2}n(n + 1)$$

contas no total. Novamente, algumas dessas contas podem resultar num valor de h que não esteja entre 0 e 1 que deve, portanto, ser rejeitado.

Se usarmos esse algoritmo para o exemplo das ovelhas dado no texto, haverá no máximo $\frac{1}{2}(12)(12 + 1) = 78$ contas a considerar. Use um computador para fazer as contas para a colheita de duas faixas etárias com $h_1 = h$, $h_j = 1$ e $h_k = 0$ com $k \neq 1$ ou j com $j = 2, 3, \ldots, 12$. Construa uma tabela de dados consistindo nos valores de h_j e os rendimentos percentuais usando $j = 2, 3, \ldots, 12$. Essa tabela deve mostrar que o maior desses rendimentos ocorre com $j = 9$.

T2. Usando o algoritmo do Exercício T1, faça as contas para a colheita de uma faixa etária com $h_i = h$ e $h_k = 0$ com $k \neq i$ e $i = 1, 2, \ldots, 12$. Construa uma tabela de dados consistindo nos valores de h_i e os rendimentos percentuais usando $i = 1, 2, \ldots, 12$. Essa tabela deve mostrar que o maior desses rendimentos ocorre com $i = 9$.

T3. Voltando à população de camundongos do Exercício T3 da Seção 10.17, suponha que não seja viável reduzir as taxas de nascimentos e que, em vez disso, queiramos controlar a população com uma colheita uniforme mensal de todas as faixas etárias.

(a) Qual é a fração da população que deve ser colhida mensalmente para levar a população de camundongos a uma situação de equilíbrio?

(b) Qual é o vetor de distribuição etária de equilíbrio nessa política de colheita uniforme?

(c) O número total de camundongos na população original era de 155. Com a política de colheita uniforme, qual será o número total da população de camundongos depois de 5, 10 e 200 meses?

10.19 Um modelo de mínimos quadrados para a audição humana

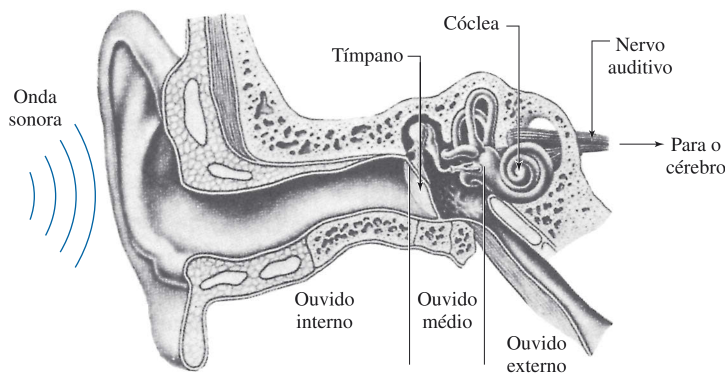
Nesta seção, aplicamos o método da aproximação de mínimos quadrados a um modelo para a audição humana. O uso desse método é motivado por considerações de energia.

PRÉ-REQUISITOS: Espaços de produto interno
Projeção ortogonal
Séries de Fourier (Seção 6.6)

A anatomia do ouvido

Começamos com uma breve discussão da natureza do som e da audição humana. A Figura 10.19.1 é um diagrama esquemático do ouvido, mostrando seus três componentes principais: o ouvido externo, o médio e o interno. As ondas sonoras entram no ouvido externo, onde são canalizadas para o tímpano e causam sua vibração. Três ossos minúsculos no ouvido médio fazem uma ligação mecânica do tímpano com a cóclea, que é o caracol do ouvido interno. Esses ossos passam a vibração do tímpano para um fluido dentro da cóclea. A cóclea contém milhares de células ciliadas, que são como cabelos minúsculos e oscilam com o fluido. Os cílios perto da entrada da cóclea são estimulados por frequências altas

e os cílios perto da ponta são estimulados por frequências baixas. Os movimentos desses cílios ativam as células nervosas, que mandam os sinais ao longo de vários caminhos neurais ao cérebro, onde esses sinais são interpretados como som.

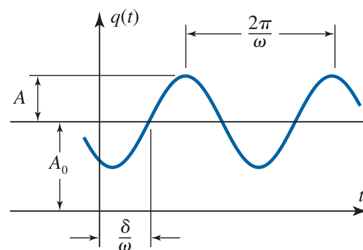


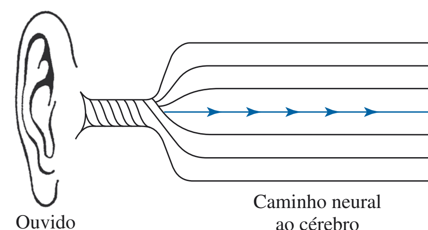
▲ **Figura 10.19.1**

Por sua vez, as ondas sonoras são variações no tempo da pressão do ar. Para o sistema auditivo, o tipo mais elementar de onda sonora é uma variação senoidal da pressão do ar. Esse tipo de onda sonora estimula os cílios da cóclea de tal maneira que produz um impulso nervoso ao longo de um único caminho neural (Figura 10.19.2). Uma onda sonora senoidal pode ser descrita por uma função do tempo

$$q(t) = A_0 + A \operatorname{sen}(\omega t - \delta) \tag{1}$$

onde $q(t)$ mede a pressão atmosférica no tímpano, A_0 é a pressão atmosférica normal, A é a variação máxima da pressão em relação à pressão atmosférica normal, $\omega/2\pi$ é a frequência da onda em ciclos por segundo e δ é o ângulo de fase da onda. Para ser percebida como um som, uma onda senoidal precisa ter frequências num certo intervalo. Para os humanos, esse intervalo é aproximadamente de 20 a 20.000 ciclos por segundo (cps). As frequências fora desse intervalo não estimulam suficientemente os cílios dentro da cóclea a ponto de produzir sinais nervosos.



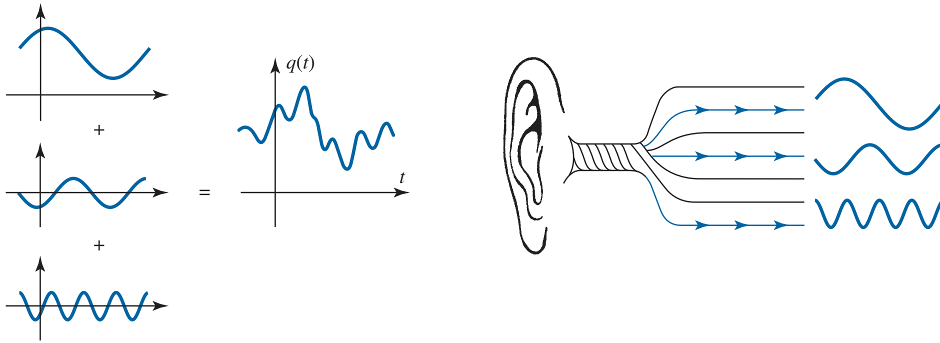


▲ **Figura 10.19.2**

Podemos afirmar, com um grau razoável de exatidão, que o ouvido é um sistema linear. Isso significa que se uma onda sonora complexa é uma soma finita de componentes senoidais de diferentes amplitudes, frequências e ângulos de fase, digamos,

$$q(t) = A_0 + A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t - \delta_1) + A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t - \delta_2) + \cdots + A_n \operatorname{sen}(\omega_n t - \delta_n) \tag{2}$$

então a resposta do ouvido consiste em impulsos nervosos ao longo dos mesmos caminhos neurais que seriam estimulados pelos componentes individuais (Figura 10.19.3).



▲ **Figura 10.19.3**

Consideremos, agora, alguma onda sonora periódica $p(t)$ de período T [ou seja, $p(t) \equiv p(t + T)$] que *não* seja uma soma finita de ondas senoidais. Se examinarmos a resposta do ouvido a uma tal onda periódica, veremos que ela coincide com a resposta do ouvido a alguma onda que é a soma de ondas senoidais. Ou seja, existe alguma onda sonora $q(t)$ como a dada pela Equação (2) que produz a mesma resposta de $p(t)$, mesmo que $p(t)$ e $q(t)$ sejam funções diferentes do tempo.

Agora queremos determinar as frequências, amplitudes e ângulos de fase dos componentes senoidais de $q(t)$. Como $q(t)$ produz a mesma resposta da onda periódica $p(t)$, é razoável esperar que $q(t)$ tenha o mesmo período T de $p(t)$. Isso requer que cada termo senoidal em $q(t)$ tenha período T. Consequentemente, as frequências dos componentes senoidais devem ser um múltiplo inteiro das frequências básicas $1/T$ da função $p(t)$. Assim, os $p(t)$ na Equação (2) devem ser da forma

$$\omega_k = 2k\pi/T, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Como o ouvido não percebe ondas senoidais com frequências acima de 20.000 cps, podemos omitir os valores de k com os quais $q(t)$ seja maior do que 20.000. Assim, $q(t)$ é da forma

$$q(t) = A_0 + A_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T} - \delta_1\right) + \cdots + A_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi t}{T} - \delta_n\right) \tag{3}$$

onde n é o maior inteiro tal que n/T não é maior do que 20.000.

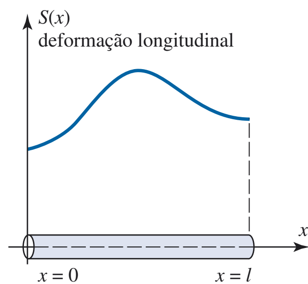
Agora voltamos nossa atenção aos valores das amplitudes $A_0, A_1, \ldots, A_n$ e dos ângulos de fase $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ que aparecem na Equação (3). Existe um critério pelo qual o sistema auditivo "escolhe" esses valores para fazer com que $q(t)$ tenha a mesma resposta de $p(t)$. Para examinar esse critério, denotamos

$$e(t) = p(t) - q(t)$$

Considerando $q(t)$ como uma aproximação de $p(t)$, $e(t)$ denota o erro dessa aproximação, um erro que o ouvido não consegue perceber. Em termos de $e(t)$, o critério para determinar as amplitudes e os ângulos de fase é que a quantidade

$$\int_0^T [e(t)]^2\, dt = \int_0^T [p(t) - q(t)]^2\, dt \tag{4}$$

seja a menor possível. Aqui não podemos investigar as razões fisiológicas para isso, mas podemos observar que essa expressão é proporcional à *energia acústica* da onda de erro $e(t)$ ao longo de um período. Em outras palavras, é a energia da diferença entre as duas ondas sonoras $p(t)$ e $q(t)$ que determina se um ouvido percebe alguma diferença entre elas. Se essa energia for tão pequena quanto possível, então as duas ondas produzem a mesma



▲ **Figura 10.19.4**

sensação de som. Matematicamente, a função $q(t)$ em (4) é a aproximação de mínimos quadrados de $p(t)$ no espaço vetorial $C[0, T]$ das funções contínuas no intervalo $[0, T]$. (Ver Seção 6.6.)

As aproximações de mínimos quadrados por funções contínuas surgem numa variedade de problemas de aproximação na Engenharia e na Ciência. Além do problema acústico que acabamos de discutir, alguns outros são os seguintes.

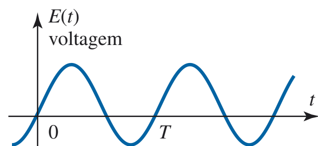
1. Seja $S(x)$ a distribuição de deformação longitudinal de uma barra uniforme ao longo do eixo x desde $x = 0$ até $x = l$ (Figura 10.19.4). A energia de deformação na barra é proporcional à integral

$$\int_0^l [S(x)]^2\, dx$$

A qualidade de uma aproximação $q(x)$ de $S(x)$ pode ser julgada de acordo com a energia de deformação da diferença das duas distribuições de deformação. Essa energia é proporcional a

$$\int_0^l [S(x) - q(x)]^2\, dx$$

que é um critério de mínimos quadrados.



▲ **Figura 10.19.5**

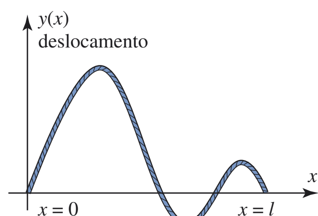
2. Seja $E(t)$ uma voltagem periódica através de um resistor num circuito elétrico (Figura 10.19.5). A energia elétrica transferida ao resistor durante um período T é proporcional a

$$\int_0^T [E(t)]^2\, dt$$

Se $q(t)$ tiver o mesmo período de $E(t)$ e se quisermos que $q(t)$ seja uma aproximação de $E(t)$, então o critério de proximidade pode ser tomado como sendo a energia da diferença de voltagem. Isso é proporcional a

$$\int_0^T [E(t) - q(t)]^2\, dt$$

que é, novamente, um critério de mínimos quadrados.



▲ **Figura 10.19.6**

3. Seja $y(t)$ o deslocamento vertical de uma corda elástica uniforme flexível cuja posição de equilíbrio seja ao longo do eixo x desde $x = 0$ até $x = l$ (Figura 10.19.6). A energia potencial elástica da corda é proporcional a

$$\int_0^l [y(x)]^2\, dx$$

Se quisermos que $q(t)$ seja uma aproximação do deslocamento, então, como antes, a integral de energia

$$\int_0^l [y(x) - q(x)]^2\, dx$$

determina um critério de mínimos quadrados para a proximidade da aproximação.

A aproximação por mínimos quadrados também é usada mesmo quando não há alguma justificativa *a priori* para o seu uso, como para aproximar ciclos comerciais, curvas

de crescimento populacional, curvas de vendas, e assim por diante. Nesses casos, ela é usada por causa de sua simplicidade matemática. Em geral, se não houver algum critério de erro imediatamente aparente para um problema de aproximação, o critério de mínimos quadrados é o critério mais escolhido.

O próximo resultado foi obtido na Seção 6.6.

TEOREMA 10.19.1 Minimizando o erro quadrado médio em [0, 2π]

Se f(t) for contínua em $[0, 2\pi]$, *então a função trigonométrica g(t) dada por*

$$g(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos t + \cdots + a_n \cos nt + b_1 \operatorname{sen} t + \cdots + b_n \operatorname{sen} nt$$

que minimiza o erro da média quadrática

$$\int_0^{2\pi} [f(t) - g(t)]^2\, dt$$

tem coeficientes

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\, dt, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\operatorname{sen} kt\, dt, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

Se a função original $f(t)$ estiver definida no intervalo $[0, T]$ em vez de $[0, 2\pi]$, obtemos o resultado seguinte com uma mudança de escala (ver Exercício 8).

TEOREMA 10.19.2 Minimizando o erro quadrado médio em [0, *T*]

Se f(t) for contínua em $[0, T]$, *então a função trigonométrica g(t) dada por*

$$g(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos\frac{2\pi}{T}t + \cdots + a_n \cos\frac{2n\pi}{T}t + b_1 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{T}t + \cdots + b_n \operatorname{sen}\frac{2n\pi}{T}t$$

que minimiza o erro da média quadrática

$$\int_0^{T} [f(t) - g(t)]^2\, dt$$

tem coeficientes

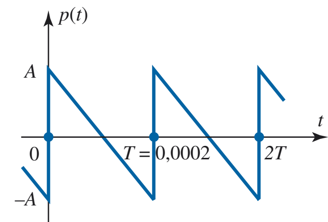
$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(t)\cos\frac{2k\pi t}{T}\, dt, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(t)\operatorname{sen}\frac{2k\pi t}{T}\, dt, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

▶ **EXEMPLO 1 Aproximação de mínimos quadrados de uma onda sonora**

Seja $p(t)$ uma onda sonora do tipo serra, com uma frequência básica de 5.000 cps (Figura 10.19.7). Suponha que as unidades sejam escolhidas de tal modo que a pressão atmosférica normal ocorra ao nível zero e a amplitude máxima da onda seja A. O período básico da onda é $T = 1/5.000 = 0{,}0002$ segundo. Desde $t = 0$ até $t = T$, a função $p(t)$ tem a equação

$$p(t) = \frac{2A}{T}\left(\frac{T}{2} - t\right)$$



▲ Figura 10.19.7

O Teorema 10.19.2 fornece o seguinte (verifique):

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{2A}{T}\left(\frac{T}{2} - t\right) dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T p(t)\cos\frac{2k\pi t}{T}\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{2A}{T}\left(\frac{T}{2} - t\right)\cos\frac{2k\pi t}{T}\,dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T p(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi t}{T}\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{2A}{T}\left(\frac{T}{2} - t\right)\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi t}{T}\,dt = \frac{2A}{k\pi}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Agora podemos investigar como a onda sonora $p(t)$ é percebida pelo ouvido humano. Observamos que $4/T = 20.000$ cps, de modo que basta avançar até $k = 4$ nas fórmulas acima. A aproximação de mínimos quadrados de $p(t)$, então, é

$$q(t) = \frac{2A}{\pi}\left[\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{T}t + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{T}t + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,\frac{6\pi}{T}t + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,\frac{8\pi}{T}t\right]$$

Os quatro termos senoidais têm frequências de 5.000, 10.000, 15.000 e 20.000 cps, respectivamente. Na Figura 10.19.8, esboçamos os gráficos de $p(t)$ e $q(t)$ ao longo de um período. Mesmo se $q(t)$ não for uma boa aproximação ponto a ponto de $p(t)$, ambas as ondas produzem o mesmo estímulo sonoro para o ouvido. ◀

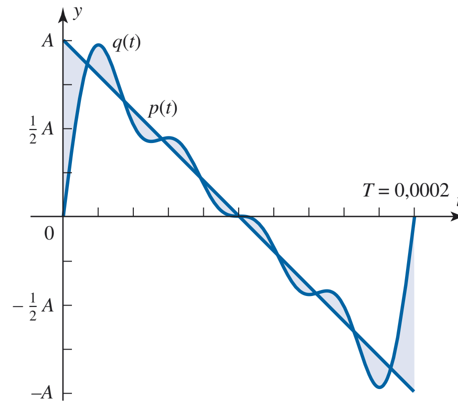


Figura 10.19.8

Como discutimos na Seção 6.6, a aproximação por mínimos quadrados melhora à medida que aumentamos o número de termos do polinômio trigonométrico que aproxima. Mais precisamente,

$$\int_0^{2\pi}\left[f(t) - \frac{1}{2}a_0 - \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt + b_k\,\mathrm{sen}\,kt)\right]^2 dt$$

tende a zero quando n tende ao infinito. Denotamos isso escrevendo

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt + b_k\,\mathrm{sen}\,kt)$$

onde o lado direito da equação é a série de Fourier de $f(t)$. Uma outra questão, e uma mais difícil, é saber se a série de Fourier de $f(t)$ converge para $f(t)$ em cada t. Para a maioria das funções contínuas encontradas nas aplicações, isso efetivamente ocorre, ou seja, a série de Fourier realmente converge à função correspondente em cada valor de t.

Conjunto de exercícios 10.19

1. Encontre o polinômio trigonométrico de ordem 3 que é a aproximação de mínimos quadrados da função $f(t) = (t - \pi)^2$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

2. Encontre o polinômio trigonométrico de ordem 4 que é a aproximação de mínimos quadrados da função $f(t) = t^2$ no intervalo $[0, T]$.

3. Encontre o polinômio trigonométrico de ordem 4 que é a aproximação de mínimos quadrados da função $f(t)$ no intervalo $[0, 2\pi]$, sendo

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \le t \le \\ 0, & \pi < t \le 2\pi \end{cases}$$

4. Encontre o polinômio trigonométrico de ordem arbitrária n que é a aproximação de mínimos quadrados da função $f(t) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}t$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

5. Encontre o polinômio trigonométrico de ordem arbitrária n que é a aproximação de mínimos quadrados da função $f(t)$ no intervalo $[0, T]$, sendo

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le \frac{1}{2}T \\ T - t, & \frac{1}{2}T < t \le T \end{cases}$$

6. Usando o produto interno

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_0^{2\pi} u(t)v(t)\,dt$$

mostre que

(a) $\|1\| = \sqrt{2\pi}$

(b) $\|\cos kt\| = \sqrt{\pi}$ com $k = 1, 2, \ldots$

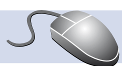
(c) $\|\operatorname{sen} kt\| = \sqrt{\pi}$ com $k = 1, 2, \ldots$

7. Mostre que as $2n + 1$ funções

$$1, \cos t, \cos 2t, \ldots, \cos nt, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t, \ldots, \operatorname{sen} nt$$

são ortogonais no intervalo $[0, 2\pi]$ em relação ao produto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ dado no Exercício 6.

8. Se $f(t)$ estiver definida e for contínua no intervalo $[0, T]$, mostre que $f(T\tau/2\pi)$ está definida e é contínua em τ no intervalo $[0, 2\pi]$. Use isso para mostrar que o Teorema 10.19.2 decorre do Teorema 10.19.1.



Seção 10.19 Exercícios com tecnologia

Os exercícios seguintes foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, esse recurso é MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser algum outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidades de Álgebra Linear. Em cada exercício, você deverá ler a documentação pertinente do recurso particular que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você estará capacitado a usar seu recurso computacional para resolver muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Seja g a função

$$g(t) = \frac{3 + 4\operatorname{sen} t}{5 - 4\cos t}$$

com $0 \le t \le 2\pi$. Use um computador para determinar os coeficientes de Fourier

$$\begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{3 + 4\operatorname{sen} t}{5 - 4\cos t}\right) \begin{Bmatrix} \cos kt \\ \operatorname{sen} kt \end{Bmatrix} dt$$

com $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. A partir de seus resultados, faça uma conjectura sobre a expressão geral de a_k e b_k. Teste sua conjectura calculando

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt)$$

no computador e verificando se essa série converge para $g(t)$.

T2. Seja g a função

$$g(t) = e^{\cos t}[\cos(\operatorname{sen} t) + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)]$$

com $0 \le t \le 2\pi$. Use um computador para determinar os coeficientes de Fourier

$$\begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t) \begin{Bmatrix} \cos kt \\ \operatorname{sen} kt \end{Bmatrix} dt$$

com $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. A partir de seus resultados, faça uma conjectura sobre a expressão geral de a_k e b_k. Teste sua conjectura calculando

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt)$$

no computador e verificando se essa série converge para $g(t)$.

10.20 Deformações e morfismos

As deformações e os morfismos estão entre as mais interessantes técnicas de manipulação de imagens disponíveis para a computação gráfica. Nesta seção, mostramos como as transformações lineares podem ser usadas para distorcer uma única imagem para produzir uma deformação, ou como distorcer e amalgamar duas imagens para produzir um morfismo.

PRÉ-REQUISITOS: Geometria de operadores lineares de R^2 (Seção 4.11)
Independência linear
Bases de R^2

A maioria dos aplicativos de computação gráfica permitem a manipulação de uma imagem de várias maneiras, como a mudança de suas proporções, rotações ou cisalhamentos. Uma outra técnica básica de manipulação de imagens é a distorção de uma imagem pelo movimento dos vértices de um retângulo que a contém. Um procedimento mais complicado, denominado *deformação*, consiste em distorcer várias partes da imagem de maneiras diferentes. Além disso, a deformação de duas imagens por procedimentos complementares com a fusão das deformações obtidas resulta num *morfismo* das duas imagens. Um exemplo é dado na Figura 10.20.1, em que quatro fotografias de uma mulher tiradas ao longo de 50 anos (as quatro na diagonal principal do topo à esquerda até a base à direita) foram deformadas duas a duas num morfismo que sugere o envelhecimento gradual dessa mulher.



▶ **Figura 10.20.1**

A principal aplicação de deformações e morfismos tem sido a produção de efeitos especiais no cinema e na televisão. No entanto, também surgiram muitas aplicações científicas e tecnológicas para essas técnicas; por exemplo, o estudo da evolução das formas e a análise do crescimento e desenvolvimento de organismos vivos, a assistência à cirurgia plástica e de reconstrução, a investigação de variações no projeto de um produto e o "envelhecimento" de fotografias de pessoas desaparecidas ou de suspeitos da polícia.

Deformações

Começamos pela descrição de uma deformação simples de uma região triangular do plano, cujos vértices são dados pelos três pontos não colineares $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ (Figura 10.20.2*a*). Vamos identificar esse triângulo como o ***triângulo inicial***. Se $\mathbf{v}$ for um ponto qualquer no triângulo inicial, existem constantes únicas c_1 e c_2 tais que

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_3 = c_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) + c_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) \tag{1}$$

A Equação (1) dá o vetor $\mathbf{v} - \mathbf{v}_3$ como uma (única) combinação linear dos dois vetores linearmente independentes $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ em relação a uma origem em $\mathbf{v}_3$. Se colocarmos $c_3 = 1 - c_1 - c_2$, podemos reescrever (1) como

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 \tag{2}$$

onde

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1 \tag{3}$$

pela definição de c_3. Se (2) e (3) forem válidas e se, além disso, os coeficientes $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ forem não negativos, diremos que $\mathbf{v}$ é uma ***combinação convexa*** dos vetores c_1, c_2 e c_3. Pode ser mostrado (Exercício 6) que $\mathbf{v}$ é um ponto do triângulo determinado por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ se, e só se, $\mathbf{v}$ é uma combinação convexa desses vetores.

Em seguida, dados três pontos não colineares $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{w}_3$ dos vértices de um ***triângulo final*** (Figura 10.20.2*b*), existe uma única ***transformação afim*** que transforma $\mathbf{v}_1$ em $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{v}_2$ em $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{v}_3$ em $\mathbf{w}_3$. Ou seja, existem uma única matriz 2×2 invertível M e um único vetor $\mathbf{b}$ tais que

$$\mathbf{w}_i = M\mathbf{v}_i + \mathbf{b}, \quad \text{com } i = 1, 2, 3 \tag{4}$$

(Ver Exercício 5 para a obtenção de M e de $\mathbf{b}$.) Além disso, pode ser mostrado (Exercício 3) que, por essa transformação afim, a imagem $\mathbf{w}$ do vetor $\mathbf{v}$ de (2) é

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + c_3\mathbf{w}_3 \tag{5}$$

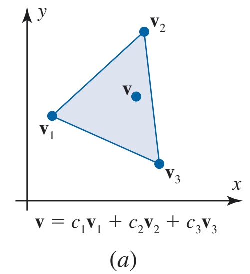
Essa é uma propriedade básica de transformações afins: transformar uma combinação convexa de vetores na mesma combinação convexa das imagens dos vetores.

Agora suponha que o triângulo inicial contenha uma imagem dentro dele (Figura 10.20.3*a*). Ou seja, a cada ponto do triângulo inicial está associado um **nível de cinza**, digamos, **0 para branco e 100 para preto**, com todos os **níveis de cinza entre 0 e 100**. Em outras palavras, definimos uma função escalar ρ_0, denominada ***densidade de imagem*** do triângulo inicial, de tal modo que $\rho_0(\mathbf{v})$ seja o **nível de cinza** associado ao ponto $\mathbf{v}$ do triângulo inicial. Agora podemos definir uma imagem no triângulo final, denominada ***deformação*** da imagem original, definindo a densidade de imagem ρ_1 do triângulo final associando a um ponto $\mathbf{w}$ dentro do triângulo final **o nível de cinza do ponto v** do triângulo inicial que é transformado em $\mathbf{w}$. Em forma de equação, a densidade de imagem ρ_1 é determinada por

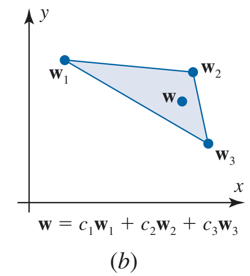
$$\rho_1(\mathbf{w}) = \rho_0(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3) \tag{6}$$

Desse modo, à medida que c_1, c_2 e c_3 variam sobre todos os valores não negativos cuja soma é 1, a expressão (5) gera todos os pontos $\mathbf{w}$ do triângulo final e (6) gera os correspondentes **níveis de cinza** $\rho_1(\mathbf{w})$ desses pontos da imagem deformada (Figura 10.20.3*b*).

A Equação (6) determina uma deformação muito simples de uma imagem dentro de um único triângulo. Mais geralmente, podemos repartir uma imagem em várias re-

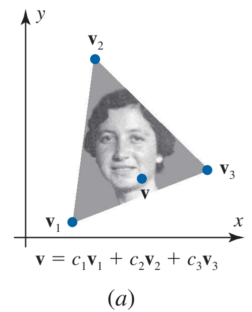


(*a*)

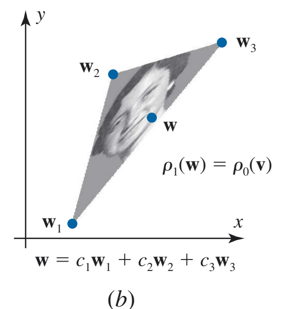


(*b*)

Figura 10.20.2

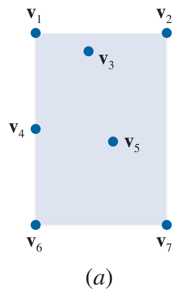


(*a*)

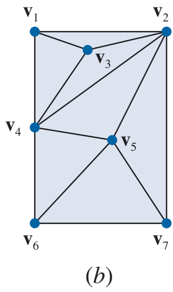


(*b*)

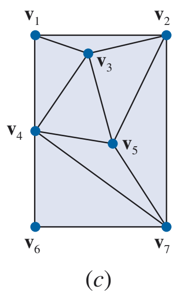
Figura 10.20.3



(*a*)



(*b*)



(*c*)

▲ **Figura 10.20.4**

giões triangulares e deformar cada região de uma maneira diferente. Isso dá uma grande liberdade para projetar deformações, pela escolha das regiões triangulares e da maneira de alterá-las. Para ver isso, suponha que tenhamos uma imagem contida nalguma região retangular do plano. Escolhemos n pontos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ dentro do retângulo que denominamos ***pontos de vértice*** e que representam elementos chave da imagem que queremos deformar (Figura 10.20.4*a*). Uma vez escolhidos os pontos de vértice, completamos uma ***triangulação*** da região retangular, ou seja, traçamos segmentos de reta entre os pontos de vértice de tal modo que as condições seguintes sejam satisfeitas (Figura 10.20.4*b*).

1. Os segmentos de reta formam os lados de uma coleção de triângulos.
2. Os segmentos de reta não se cruzam.
3. Cada ponto de vértice é o vértice de pelo menos um triângulo.
4. A união dos triângulos é o retângulo.
5. A coleção de triângulos é máxima (ou seja, não restam vértices para conectar).

Observe que a condição 4 requer que cada esquina do retângulo que contém a imagem seja um ponto de vértice.

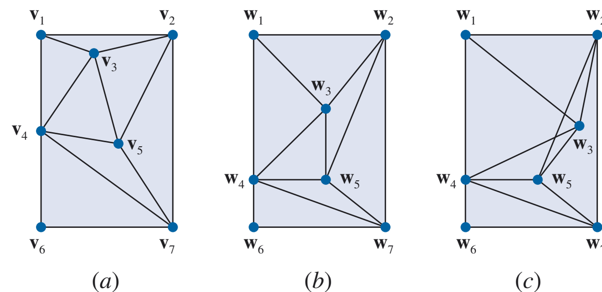
Sempre podemos formar uma triangulação a partir de quaisquer n pontos de vértice, mas a triangulação não é necessariamente única. Por exemplo, as Figuras 10.20.4*b* e 10.20.4*c* são duas triangulações diferentes do mesmo conjunto de vértices da Figura 10.20.4*a*. Como existem vários algoritmos computacionais que efetuam triangulações com rapidez, não é necessário fazer esse trabalho tedioso à mão; só precisamos especificar os pontos de vértice que desejamos e deixamos o computador gerar uma triangulação com esses pontos. Se escolhermos n pontos de vértice, pode ser mostrado que o número m de triângulos de qualquer triangulação usando esses pontos é dado por

$$m = 2n - 2 - k \tag{7}$$

em que k é o número de pontos de vértice que estão na fronteira do retângulo, incluindo os quatro situados nas esquinas do retângulo.

A deformação é especificada pelo movimento dos n pontos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ de vértice para novas posições $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ de acordo com as mudanças que queremos efetuar na imagem (Figuras 10.20.5*a* e 10.20.5*b*). No entanto, impomos duas restrições aos movimentos dos pontos de vértice, como segue.

1. Os quatro pontos de vértice nas esquinas do retângulo devem permanecer fixos, e todos os pontos de vértice situados nos lados do retângulo devem permanecer fixos ou então se mover para outro ponto no mesmo lado do retângulo. Todos os demais pontos de vértice devem permanecer no interior do retângulo.
2. Os triângulos determinados pela triangulação não podem ficar sobrepostos depois de efetuado o movimento de seus vértices.



► **Figura 10.20.5**

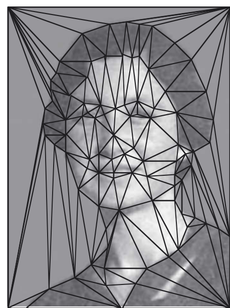
A primeira restrição garante a preservação da forma retangular da imagem inicial. A segunda restrição garante que os pontos de vértice movimentados ainda formam uma

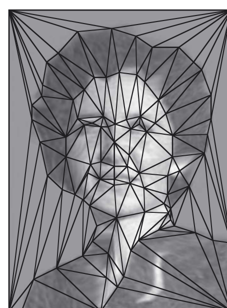
triangulação do retângulo e que a triangulação nova é similar à original. Por exemplo, a Figura 10.20.5*c* não é um movimento permitido aos pontos de vértice mostrados na Figura 10.20.5*a*. Embora uma violação dessa condição possa ser tratada matematicamente sem muito esforço adicional, as deformações resultantes em geral produzem resultados artificiais que não serão tratados aqui.

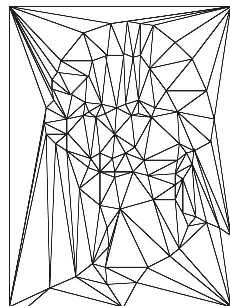
A Figura 10.20.6 é uma deformação de uma fotografia de uma mulher usando uma triangulação de 94 pontos de vértice e 179 triângulos. Observe como os pontos de vértice da triangulação inicial foram escolhidos ao longo de características essenciais da imagem (contorno dos cabelos, olhos, lábios, etc). Esses pontos de vértice foram movidos para as posições finais correspondentes às mesmas características numa fotografia da mulher tirada 20 anos depois da imagem inicial. Assim, a imagem deformada representa a mulher forçada para seu formato mais idoso, mas usando os níveis de cinza de quando era mais jovem.

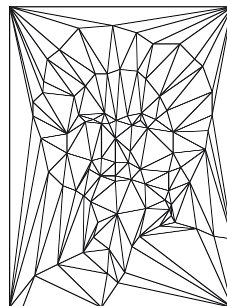

Imagem inicial


Imagem deformada


Triangulação inicial


Triangulação deformada


Triangulação inicial


Triangulação deformada

▶ **Figura 10.20.6**

Deformações dependentes do tempo

Uma ***deformação dependente do tempo*** é um conjunto de deformações geradas quando os pontos de vértice da imagem inicial são movidos continuamente ao longo do tempo desde suas posições originais até posições finais especificadas. Isso nos dá uma animação na qual a imagem inicial é deformada continuamente até uma deformação final. Escolhemos unidades de tempo tais que $t = 0$ corresponda à imagem inicial e $t = 1$, à deformação

final. A maneira mais simples de mover os pontos de vértice do instante de tempo 0 ao instante de tempo 1 é com velocidade constante ao longo de caminhos retos ligando as posições iniciais às posições finais.

Para descrever um tal movimento, seja $\mathbf{u}_i(t)$ a posição do i-ésimo ponto de vértice num instante de tempo t entre 0 e 1. Assim, $\mathbf{u}_i(0) = \mathbf{v}_i$ (sua posição na imagem inicial) e $\mathbf{u}_i(1) = \mathbf{w}_i$ (sua posição na imagem final). Entre um e outro ponto, determinamos sua posição por

$$\mathbf{u}_i(t) = (1 - t)\mathbf{v}_i + t\mathbf{w}_i \tag{8}$$

Observe que (8) expressa $\mathbf{u}_i(t)$ como uma combinação convexa de $\mathbf{v}_i$ e $\mathbf{w}_i$ em cada t de [0, 1]. A Figura 10.20.7 ilustra uma triangulação dependente do tempo de uma região retangular plana com seis pontos de vértice. As linhas conectando os pontos de vértice em instantes diferentes são os caminhos no espaço tempo desses pontos de vértice nesse diagrama espaço-temporal.

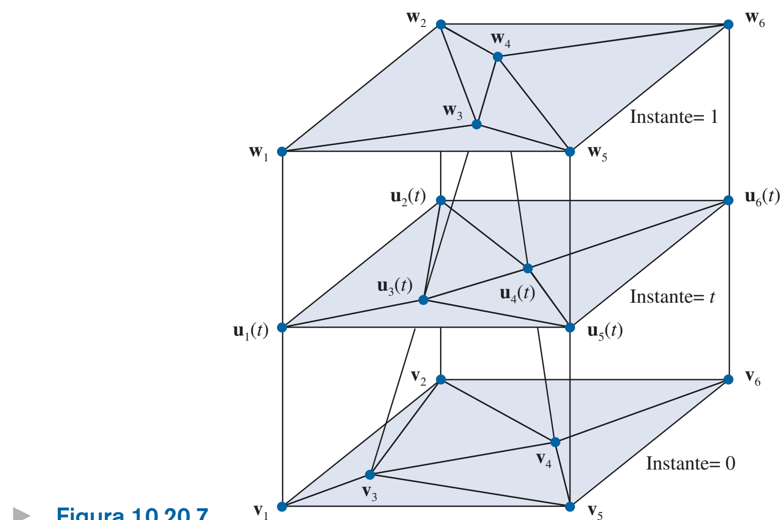


Figura 10.20.7

Uma vez calculadas as posições dos pontos de vértice em instantes de tempo t, efetuamos uma deformação entre a imagem inicial e a triangulação no instante t determinada pelos pontos de vértice movidos até aquele instante t. A Figura 10.20.8 mostra uma deformação dependente do tempo em cinco valores de t gerados a partir da deformação entre $t = 0$ e $t = 1$ mostrada na Figura 10.20.6.



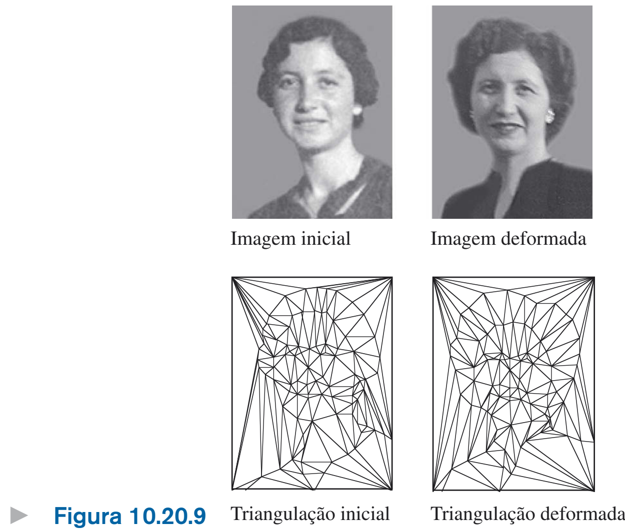
Figura 10.20.8

Morfismos

Um ***morfismo dependente do tempo*** pode ser descrito como uma combinação de duas deformações dependentes do tempo de duas imagens distintas, usando duas triangulações, que associam características correspondentes das duas imagens. Uma das duas imagens é escolhida como a imagem inicial e a outra como a imagem final. Primeiro geramos uma deformação dependendo do tempo de $t = 0$ a $t = 1$ na qual a imagem inicial é deforma-

da para a forma da imagem final. Em seguida, geramos uma deformação dependendo do tempo de $t = 0$ a $t = 1$ na qual a imagem final é deformada para a forma da imagem inicial. Finalmente, para cada instante t entre 0 e 1, criamos um morfismo das duas deformações no instante t usando uma média ponderada dos dois **níveis de cinza**.

A Figura 10.20.9 mostra duas fotografias de uma mulher tomadas num intervalo de 20 anos. Abaixo das fotografias estão duas triangulações correspondentes, nas quais associamos as características correspondentes das duas fotografias. A Figura 10.20.10 mostra o morfismo dependendo do tempo entre essas duas imagens em cinco instantes de tempo t entre 0 e 1.



▶ **Figura 10.20.9**



◀ **Figura 10.20.10**

O procedimento para produzir um tal morfismo é delineado nos nove passos seguintes (Figura 10.20.11).

Passo 1. Dadas uma imagem inicial com densidade de imagem ρ_0 e uma imagem final com densidade de imagem ρ_1, posicionamos n pontos de vértice $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ na imagem inicial em características essenciais da imagem.

Passo 2. Posicionamos n pontos de vértice $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ correspondentes na imagem final nas características essenciais correspondentes da imagem.

Passo 3. Triangulamos as imagens inicial e final de maneiras similares desenhando segmentos de retas entre os pontos de vértice correspondentes de cada imagem.

Passo 4. Em cada instante de tempo t entre 0 e 1, encontramos os pontos de vértice $\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \ldots, \mathbf{u}_n(t)$ no morfismo da imagem daquele instante usando a fórmula

$$\mathbf{u}_i(t) = (1 - t)\mathbf{v}_i + t\,\mathbf{w}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{9}$$

Passo 5. Triangulamos o morfismo da imagem do instante de tempo t de maneira similar às triangulações das imagens inicial e final.

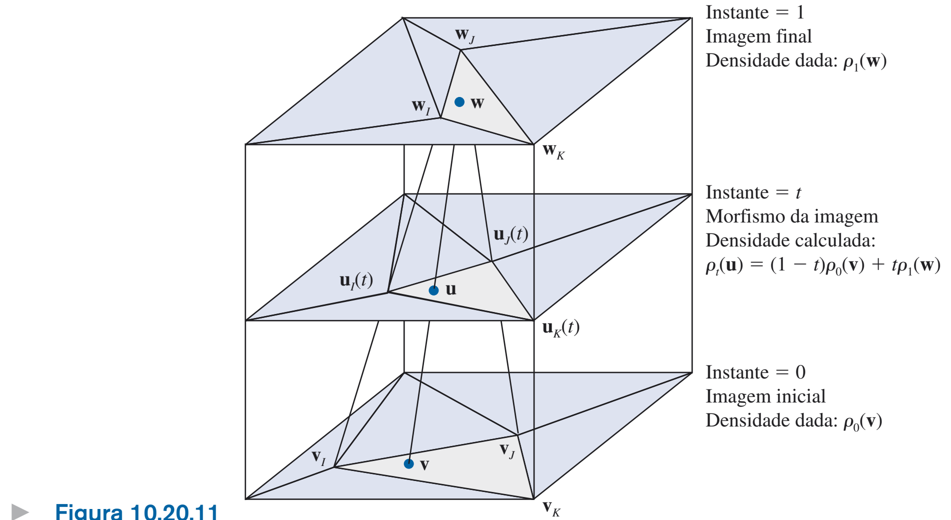


Figura 10.20.11

Passo 6. Dado qualquer ponto **u** do morfismo da imagem do instante de tempo t, encontramos o triângulo da triangulação ao qual ele pertence e os vértices $\mathbf{u}_I(t)$, $\mathbf{u}_J(t)$ e $\mathbf{u}_K(t)$ desse triângulo. (Ver Exercício 1 para decidir se um ponto dado está num triângulo.)

Passo 7. Expressamos **u** como uma combinação convexa de $\mathbf{u}_I(t)$, $\mathbf{u}_J(t)$ e $\mathbf{u}_K(t)$ encontrando as constantes c_I, c_J e c_K tais que

$$\mathbf{u} = c_I\mathbf{u}_I(t) + c_J\mathbf{u}_J(t) + c_K\mathbf{u}_K(t) \tag{10}$$

e

$$c_I + c_J + c_K = 1 \tag{11}$$

Passo 8. Determinamos a localização do ponto **u** nas imagens inicial e final usando

$$\mathbf{v} = c_I\mathbf{v}_I + c_J\mathbf{v}_J + c_K\mathbf{v}_K \quad \text{(na imagem inicial)} \tag{12}$$

e

$$\mathbf{w} = c_I\mathbf{w}_I + c_J\mathbf{w}_J + c_K\mathbf{w}_K \quad \text{(na imagem final)} \tag{13}$$

Passo 9. Finalmente, determinamos a densidade de imagem $\rho_t(\mathbf{u})$ no ponto **u** do morfismo da imagem usando

$$\rho_t(\mathbf{u}) = (1 - t)\rho_0(\mathbf{v}) + t\rho_1(\mathbf{w}) \tag{14}$$

O Passo 9 é a chave para distinguir um morfismo da uma deformação. A Equação (14) toma médias ponderadas dos **níveis de cinza** das imagens inicial e final para produzir o **nível de cinza** do morfismo da imagem. Os pesos dependem da fração das distâncias que os pontos de vértice já moveram de suas posições iniciais para as suas posições finais. Por exemplo, se os pontos de vértice moveram um quarto do caminho até seu destino (ou seja, se $t = 0{,}25$), usamos um quarto dos **níveis de cinza** da imagem final e três quartos dos **níveis de cinza** da imagem inicial. Assim, à medida que o tempo avança, não só a forma da imagem inicial vai mudando gradualmente para a forma da imagem final (como numa deformação), mas também os **níveis de cinza** da imagem inicial vão mudando gradualmente para os **níveis de cinza** da imagem final.

O procedimento que acabamos de descrever para gerar um morfismo é muito incômodo para ser feito à mão, mas é o tipo de atividade repetitiva e enfadonha na qual se sobressaem os computadores. Um morfismo bem feito exige um bom preparo e requer mais habilidade artística que matemática. (A habilidade matemática é exigida de quem projeta o *software*.) As duas fotografias que queremos submeter ao morfismo devem ser escolhidas cuidadosamente para ter características correspondentes, e os pontos de vér-

tice também devem ser escolhidos cuidadosamente de modo que os triângulos das duas triangulações resultantes contenham características similares das duas imagens. Quando executado corretamente, cada quadro de um morfismo deveria parecer tão "real" quanto as imagens inicial e final.

As técnicas que discutimos nesta seção podem ser generalizadas de várias maneiras para produzir deformações e morfismos muito mais elaborados, como a seguinte.

1. Se as imagens são coloridas, os três componentes da cor (**vermelho, verde e azul**) podem ser transformados separadamente para produzir morfismos coloridos.
2. Em vez de seguir caminhos retilíneos aos seus destinos, podemos direcionar os vértices de uma triangulação separadamente ao longo de caminhos mais complicados para produzir uma variedade de resultados.
3. Em vez de viajar com velocidade constante ao longo de seus caminhos, podemos obrigar os vértices de uma triangulação a ter velocidades diferentes em instantes de tempos diferentes. Por exemplo, num morfismo entre duas faces, podemos mudar primeiro o contorno dos cabelos, depois o nariz, e assim por diante.
4. Analogamente, podemos fazer variar os **níveis de cinza** das imagens inicial e final em instantes diferente e em vértices diferentes de maneiras mais complicadas que a da Equação (14).
5. Usando as técnicas desta seção e triangulando superfícies, podemos construir morfismos entre duas superfícies do espaço tridimensional (por exemplo, duas cabeças completas).
6. Podemos construir morfismos entre dois sólidos do espaço tridimensional (por exemplo, duas tomografias tridimensionais em tempos distintos de um coração humano pulsante) dividindo-os em tetraedros sólidos correspondentes.
7. Podemos construir morfismos quadro a quadro entre as imagens de duas sequências de animações usando morfismos distintos em cada par de imagens (por exemplo, fazendo um ator caminhando num estúdio gradualmente transformar-se num macaco caminhando no estúdio).
8. Em vez de utilizar segmentos de reta, podemos usar curvas mais complicadas, como curvas interpoladoras, para triangular duas imagens.
9. Generalizando as fórmulas dadas nesta seção, podemos construir morfismos de três ou mais imagens.

Essas e outras generalizações fizeram de deformações e morfismos duas das áreas mais ativas da computação gráfica.

Conjunto de exercícios 10.20

1. Em cada parte, determine se o vetor $\mathbf{v}$ é uma combinação convexa dos vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Faça isso resolvendo as Equações (1) e (3) para c_1, c_2 e c_3 e verificando se esses coeficientes são não negativos.

(a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. Verifique a Equação (7) para as duas triangulações dadas na Figura 10.20.4.

3. É dada uma transformação afim com uma matriz M de tamanho 2×2 e um vetor bidimensional $\mathbf{b}$. Sejam $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$, onde $c_1 + c_2 + c_3 = 1$, $\mathbf{w} = M\,\mathbf{v} + \mathbf{b}$ e, com $i = 1, 2, 3$, $\mathbf{w}_i = M\mathbf{v}_i + \mathbf{b}$. Mostre que $\mathbf{w} = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + c_3\mathbf{w}_3$. (Isso mostra que uma transformação afim transforma uma combinação convexa de vetores na mesma combinação convexa das imagens dos vetores.)

4. (a) Exiba uma triangulação dos pontos da Figura 10.20.4 na qual os pontos $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_5$ e $\mathbf{v}_6$ formam os vértices de um só triângulo.

(b) Exiba uma triangulação dos pontos da Figura 10.20.4 na qual os pontos $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_5$ e $\mathbf{v}_7$ *não* formam os vértices de um só triângulo.

5. Em cada parte, encontre a matriz M de tamanho 2×2 e o vetor bidimensional **b** que definem a transformação afim que transforma os três vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ nos três vetores $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{w}_3$. Faça isso montando um sistema de seis equações lineares para as quatro entradas da matriz M e as duas entradas do vetor **b**.

(a) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$

$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$

$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$

$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix},$

$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ -9 \end{bmatrix}$

6. (a) Sejam **a** e **b** vetores linearmente independentes do plano. Mostre que se c_1 e c_2 forem números não negativos tais que $c_1 + c_2 = 1$, então o vetor $c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b}$ estará no segmento de reta que liga as pontas dos vetores **a** e **b**.

(b) Sejam **a** e **b** vetores linearmente independentes do plano. Mostre que se c_1 e c_2 forem números não negativos tais que $c_1 + c_2 \leq 1$, então o vetor $c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b}$ estará no triângulo que conecta a origem e as pontas dos vetores **a** e **b**.

[*Sugestão*: examine primeiro o vetor $c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b}$ multiplicado pelo fator de escala $1/(c_1 + c_2)$.]

(c) Sejam $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ pontos não colineares do plano. Mostre que se c_1, c_2 e c_3 forem números não negativos tais que $c_1 + c_2 + c_3 = 1$, então o vetor $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$ estará no triângulo que conecta as pontas dos três vetores. [*Sugestão*: considere $\mathbf{a} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$ e $\mathbf{b} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ e use a Equação (1) e as partes (a) e (b) deste exercício.]

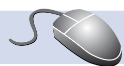
7. (a) O que você pode dizer sobre os coeficientes c_1, c_2 e c_3 que determinam uma combinação convexa $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$ se **v** estiver num dos três vértices do triângulo determinado pelos três vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$?

(b) O que você pode dizer sobre os coeficientes c_1, c_2 e c_3 que determinam uma combinação convexa $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$ se **v** estiver num dos três lados do triângulo determinado pelos três vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$?

(c) O que você pode dizer sobre os coeficientes c_1, c_2 e c_3 que determinam uma combinação convexa $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$ se **v** estiver no interior do triângulo determinado pelos três vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$?

8. (a) O centroide de um triângulo está no segmento de reta que conecta qualquer um dos três vértices do triângulo ao ponto médio do lado oposto. Sua localização nesse segmento de reta é a dois terços da distância do vértice. Se os três vértices forem dados pelos vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$, escreva o centroide como uma combinação convexa desses três vetores.

(b) Use o resultado da parte (a) para encontrar o vetor que define o centroide do triângulo determinado pelos três vértices $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.



Seção 10.20 Exercícios com tecnologia

Os exercícios seguintes foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, esse recurso é MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser algum outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidades de Álgebra Linear. Em cada exercício, você deverá ler a documentação pertinente do recurso particular que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você estará capacitado a usar seu recurso computacional para resolver muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Para construir uma deformação ou um morfismo de uma superfície em R^3, precisamos conseguir triangular a superfície. Sejam $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix}$ três vetores não colineares na superfície. Então um vetor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ está no triângulo formado por esses três vetores se, e só se, **v** é uma combinação convexa dos três vetores, ou seja, $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$ com coeficientes não negativos c_1, c_2 e c_3 cuja soma é 1.

(a) Mostre que, nesse caso, c_1, c_2 e c_3 são soluções do sistema linear seguinte.

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em cada parte (b), (c) e (d), determine se o vetor **v** é uma combinação convexa dos três vetores $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$.

(b) $\mathbf{v} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$ (c) $\mathbf{v} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$ (d) $\mathbf{v} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 13 \\ -7 \\ 50 \end{bmatrix}$

T2. Para construir uma deformação ou um morfismo de um objeto sólido em R^3, primeiro particionamos o objeto em tetraedros disjuntos. Sejam $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} v_{41} \\ v_{42} \\ v_{43} \end{bmatrix}$ quatro vetores não coplanares. Então um vetor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ está no tetraedro sólido formado por esses quatro vetores se, e só se, **v** é uma combinação convexa dos quatro vetores, ou seja, $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4$ com coeficientes não negativos c_1, c_2, c_3 e c_4 cuja soma é 1.

(a) Mostre que, nesse caso, c_1, c_2, c_3 e c_4 são soluções do sistema linear seguinte.

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em cada parte (b), (c) e (d), determine se o vetor **v** é uma combinação convexa dos três vetores $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ (c) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (d) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Esta página foi deixada em branco intencionalmente.

APÊNDICE A Como ler teoremas

Como muitos dos conceitos importantes de Álgebra Linear são apresentados como teoremas, é importante estar familiarizado com as diversas maneiras pelas quais podemos estruturar um teorema. Neste apêndice, ajudamos a entender isso.

Forma contrapositiva de um teorema

Os teoremas mais simples são da forma

$$\text{Se } H \text{ for verdadeiro, então } C \text{ será verdadeiro.} \tag{1}$$

onde H é uma afirmação, denominada ***hipótese*** e C é uma afirmação, denominada ***tese*** ou ***conclusão***. *O teorema é verdadeiro se a conclusão for verdadeira sempre que a hipótese for verdadeira; o teorema é falso se existir algum caso em que a hipótese for verdadeira e a conclusão for falsa*. É costume denotar um teorema da forma (1) por

$$H \Rightarrow C \tag{2}$$

que se lê "H implica C". Como um exemplo, o teorema

$$\textit{Se ambos } a \textit{ e } b \textit{ forem números positivos, então } ab \textit{ é um número positivo.} \tag{3}$$

é do tipo (2), onde

$$H = \text{ambos } a \text{ e } b \text{ são números positivos} \tag{4}$$

$$C = ab \text{ é um número positivo} \tag{5}$$

Às vezes, é desejável reescrever um teorema de maneira *negativa*. Por exemplo, o teorema em (3) pode ser reescrito equivalentemente como

$$\textit{Se } ab \textit{ não for um número positivo, então } a \textit{ e } b \textit{ não serão ambos números positivos.} \tag{6}$$

Assim, escrevendo $\sim H$ para dizer que (4) é falso e $\sim C$ para dizer que (5) é falso, a estrutura do teorema (6) é

$$\sim C \Rightarrow \sim H \tag{7}$$

Em geral, qualquer teorema da forma (2) pode ser reescrito na forma (7), que é denominada a ***contraposição*** de (2). Se um teorema for verdadeiro, então sua contraposição será verdadeira e vice-versa.

Recíproca de um teorema

A ***recíproca*** de um teorema é a afirmação que resulta permutando a hipótese com a tese. Assim, a recíproca do teorema $H \Rightarrow C$ é a afirmação $C \Rightarrow H$. Enquanto a contraposição de um teorema verdadeiro é sempre verdadeira, a recíproca de um teorema verdadeiro pode ser verdadeira ou não. Por exemplo, a recíproca de (3) é a afirmação *falsa*

Se ab for um número positivo, então a e b serão ambos números positivos.

No entanto, a recíproca do teorema verdadeiro

$$\textit{Se } a > b, \textit{ então } 2a > 2b. \tag{8}$$

é o teorema *verdadeiro*

$$\textit{Se } 2a > 2b, \textit{ então } a > b. \tag{9}$$

Afirmações equivalentes

Se um teorema $H \Rightarrow C$ e sua recíproca $C \Rightarrow H$ forem ambos verdadeiros, diremos que H e C são afirmações ***equivalentes***, o que denotamos por

$$H \Leftrightarrow C \tag{10}$$

e que se lê "H e C são equivalentes" ou "H se, e só se, C". Existem várias maneiras de formular afirmações equivalentes de um mesmo teorema. Aqui temos três maneiras de combinar (8) e (9) num único teorema.

FORMA 1 *Se $a > b$, então $2a > 2b$ e, reciprocamente, se $2a > 2b$, então $a > b$.*

FORMA 2 *$a > b$ se, e só se, $2a > 2b$.*

FORMA 3 *As afirmações seguintes são equivalentes.*
(*i*) $a > b$
(*ii*) $2a > 2b$

Teoremas envolvendo duas ou mais afirmações

Às vezes, dois teoremas verdadeiros fornecem um terceiro teorema verdadeiro. Especificamente, se $H \Rightarrow C$ for um teorema verdadeiro e $C \Rightarrow D$ for um teorema verdadeiro, então $H \Rightarrow D$ também deverá ser um teorema verdadeiro. Por exemplo, os teoremas

Se os lados opostos de um quadrilátero forem paralelos, então o quadrilátero será um paralelogramo.

e

Lados opostos de um paralelogramo têm comprimentos iguais.

implicam o terceiro teorema

Se os lados opostos de um quadrilátero forem paralelos, então esses lados têm comprimentos iguais.

Às vezes, três teoremas fornecem afirmações equivalentes de graça. Por exemplo, se

$$H \Rightarrow C, \quad C \Rightarrow D, \quad D \Rightarrow H \tag{11}$$

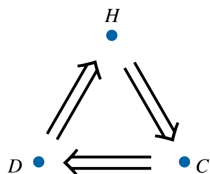
então temos o *circuito de implicações* da Figura A.1, pela qual podemos concluir que

$$C \Rightarrow H, \quad D \Rightarrow C, \quad H \Rightarrow D \tag{12}$$

Combinando isso com (11), obtemos

$$H \Leftrightarrow C, \quad C \Leftrightarrow D, \quad D \Leftrightarrow H \tag{13}$$

Resumindo, se quisermos provar as três equivalências em (13), basta provar as três implicações em (11).



▲ **Figura A1**

Os números complexos surgem naturalmente na resolução de equações polinomiais. Por exemplo, as soluções da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, *que são dadas pela fórmula*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

são números complexos se a expressão dentro do radical for negativa. Neste apêndice, iremos apresentar algumas das ideias básicas relativas a números complexos que são utilizadas neste livro.

Números complexos

Para tratar do problema da falta de soluções reais da equação $x^2 = -1$, os matemáticos do século XVIII inventaram o número "imaginário"

$$i = \sqrt{-1}$$

que se supõe ter a propriedade

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

mas que, fora isso, tem as propriedades algébricas de um número real. Uma expressão da forma

$$a + bi \quad \text{ou} \quad a + ib$$

em que a e b são números reais é denominada ***número complexo***. Às vezes, é conveniente usar uma única letra, em geral z, para denotar um número complexo, quando escrevemos

$$z = a + bi \quad \text{ou} \quad z = a + ib$$

O número a é denominado ***parte real*** de z e denotado por $\text{Re}(z)$, e o número b é a ***parte imaginária*** de z, denotada por $\text{Im}(z)$. Assim,

$$\begin{array}{ll} \text{Re}(3+2i) = 3, & \text{Im}(3+2i) = 2 \\ \text{Re}(1-5i) = 1, & \text{Im}(1-5i) = \text{Im}(1+(-5)i) = -5 \\ \text{Re}(7i) = \text{Re}(0+7i) = 0, & \text{Im}(7i) = 7 \\ \text{Re}(4) = 4, & \text{Im}(4) = \text{Im}(4+0i) = 0 \end{array}$$

Dois números complexos são considerados ***iguais*** se, e só se, suas partes reais são iguais e suas partes imaginárias são iguais, ou seja,

$$a + bi = c + di \qquad \text{se, e só se,} \qquad a = c \text{ e } b = d$$

Um número complexo $z = bi$ cuja parte real é nula é denominado ***número imaginário***. Um número complexo com parte imaginária nula é um número real, de modo que os números reais podem ser vistos como um subconjunto dos números complexos.

Os números complexos são somados, subtraídos e multiplicados de acordo com as regras básicas da Álgebra, só que $i^2 = -1$.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \tag{1}$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \tag{2}$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \tag{3}$$

A fórmula de multiplicação é obtida expandindo o lado esquerdo e usando o fato de que $i^2 = -1$. Observe, também, que, se $b = 0$, então a fórmula de multiplicação simplifica para

$$a(c + di) = ac + adi \tag{4}$$

O conjunto dos números complexos, dotado dessas operações, é costumeiramente denotado pelo símbolo C e denominado ***sistema dos números complexos***.

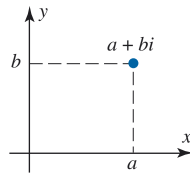
▶ EXEMPLO 1 Multiplicação de números complexos

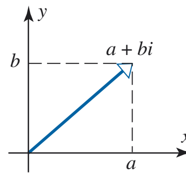
Na prática, costuma ser mais conveniente calcular produtos de números complexos diretamente por expansão em vez de substituição em (3). Por exemplo,

$$(3 - 2i)(4 + 5i) = 12 + 15i - 8i - 10i^2 = (12 + 10) + 7i = 22 + 7i$$ ◀

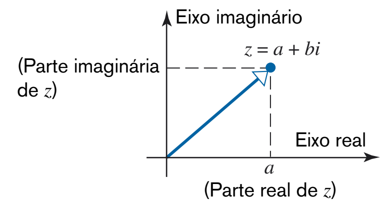
O plano complexo

Um número complexo $z = a + bi$ pode ser associado ao par ordenado (a, b) de números reais e representado geometricamente por um ponto ou um vetor no plano xy (Figura B.1). Dizemos que esse é o ***plano complexo***. Os pontos do eixo x têm uma parte imaginária igual a zero e, portanto, correspondem a números reais, enquanto pontos no eixo y têm parte real igual a zero e correspondem a números imaginários. Em vista disso, dizemos que o eixo x é o ***eixo real*** e o eixo y é o ***eixo imaginário*** (Figura B.2).



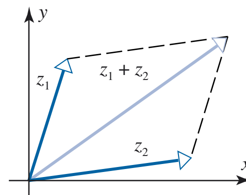


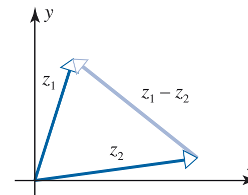
▲ Figura B.1



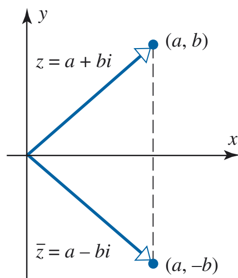
▲ Figura B.2

Os números complexos podem ser geometricamente somados, subtraídos ou multiplicados por números reais efetuando essas operações com os vetores associados (ver Figura B.3, por exemplo). Nesse sentido, o sistema dos números complexos C é estreitamente relacionado a R^2, mas a principal diferença é que os números complexos podem ser multiplicados para produzir outros números complexos, ao passo que não existe operação de multiplicação alguma em R^2 que produza outros vetores em R^2 (o produto escalar produz um escalar e não um vetor em R^2).





▶ Figura B.3



▲ Figura B.4

Se $z = a + bi$ for um número complexo, então o ***conjugado complexo*** de z, ou, simplesmente, o ***conjugado*** de z, é denotado por $\bar{z}$ (que lemos "z barra") e definido por

$$\bar{z} = a - bi \tag{5}$$

Numericamente, $\bar{z}$ é obtido de z trocando o sinal da parte imaginária e, geometricamente, é obtido refletindo o vetor de z no eixo real (Figura B.4).

▶ EXEMPLO 2 Alguns conjugados complexos

$$
\begin{array}{ll}
z = 3 + 4i & \bar{z} = 3 - 4i \\
z = -2 - 5i & \bar{z} = -2 + 5i \\
z = i & \bar{z} = -i \\
z = 7 & \bar{z} = 7 \blacktriangleleft
\end{array}
$$

Observação A última conta neste exemplo ilustra o fato de que um número real é igual ao seu conjugado complexo. Mais geralmente, $z = \bar{z}$ se, e só se, z é um número real.

A próxima conta mostra que o produto de qualquer número complexo $z = a + bi$ com seu conjugado $\bar{z} = a - bi$ é um número real não negativo, pois

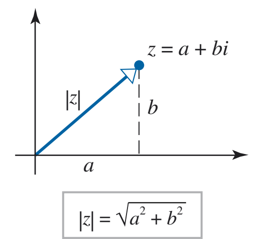
$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + bai - b^2i^2 = a^2 + b^2 \tag{6}$$

O leitor deve reconhecer que

$$\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

é o comprimento do vetor correspondente a z (Figura B.5); dizemos que esse comprimento é o ***módulo*** (ou ***valor absoluto***) de z, que denotamos por $|z|$. Assim,

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{7}$$



▲ **Figura B.5**

Observe que se $b = 0$, então $z = a$ é um número real e $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$, o que nos diz que o módulo de um número real é o mesmo que seu valor absoluto.

▶ EXEMPLO 3 Algumas contas de módulo

$$
\begin{array}{ll}
z = 3 + 4i & |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\
z = -4 - 5i & |z| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{41} \\
z = i & |z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \blacktriangleleft
\end{array}
$$

Recíprocos e divisão

Se $z \neq 0$, então o ***recíproco*** (ou ***inverso multiplicativo***) de z é denotado por $1/z$ (ou z^{-1}) e é definido pela propriedade

$$\left(\frac{1}{z}\right) z = 1$$

Essa equação tem uma única solução para $1/z$, que pode ser obtida multiplicando ambos os lados por $\bar{z}$ e usando o fato de que $z\bar{z} = |z|^2$ [ver (7)]. Assim, obtemos

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \tag{8}$$

Se $z_2 \neq 0$, então o ***quociente*** z_1/z_2 é definido como o produto de z_1 com $1/z_2$. Assim, obtemos a fórmula

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} z_1 = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} \tag{9}$$

Observe que a expressão à direita de (9) resulta da multiplicação do numerador e do denominador de z_1/z_2 por $\bar{z}_2$. Em termos práticos, muitas vezes essa é a melhor maneira de efetuar divisões de números complexos.

▶ EXEMPLO 4 Divisão de números complexos

Sejam $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 1 - 2i$. Expresse z_1/z_2 na forma $a + bi$.

Solução Multiplicamos o numerador e o denominador de z_1/z_2 por $\bar{z}_2$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{3+4i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i}\\ &= \frac{3+6i+4i+8i^2}{1-4i^2}\\ &= \frac{-5+10i}{5}\\ &= -1+2i \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Os próximos teoremas listam algumas propriedades úteis do módulo e da conjugação.

TEOREMA B.1 *Os resultados a seguir valem com quaisquer números complexos* z, z_1 *e* z.

(*a*) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(*b*) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

(*c*) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

(*d*) $\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$

(*e*) $\bar{\bar{z}} = z$

TEOREMA B.2 *Os resultados a seguir valem com quaisquer números complexos* z, z_1 *e* z.

(*a*) $|\bar{z}| = |z|$

(*b*) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

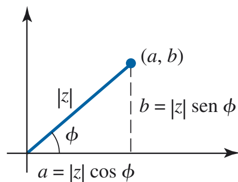
(*c*) $|z_1 / z_2| = |z_1|/|z_2|$

(*d*) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Forma polar de um número complexo

Se $z = a + bi$ for um número complexo não nulo e se ϕ for um ângulo desde o eixo real até o vetor z, então, como sugere a Figura B.6, as partes real e imaginária de z podem ser expressas por

$$a = |z| \cos\phi \quad \text{e} \quad b = |z| \operatorname{sen}\phi \tag{10}$$



▲ **Figura B.6**

Assim, o número complexo $z = a + bi$ pode ser escrito como

$$z = |z|(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi) \tag{11}$$

que é a ***forma polar*** de z. O ângulo ϕ nessa fórmula é denominado um ***argumento*** de z. O argumento de z não é único porque podemos somar ou subtrair qualquer múltiplo de 2π para obter um outro argumento de z. Contudo, existe somente um argumento cuja medida em radianos satisfaz

$$-\pi < \phi \leq \pi \tag{12}$$

Esse argumento é denominado ***argumento principal*** de z.

▶ EXEMPLO 5 Forma polar de um número complexo

Expresse $z = 1 - \sqrt{3}i$ em forma polar usando o argumento principal.

Solução O módulo de z é

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

Assim, decorre de (10), com $a = 1$ e $b = -\sqrt{3}$, que

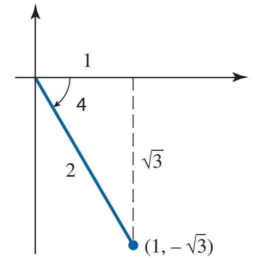
$$1 = 2\cos\phi \quad \text{e} \quad -\sqrt{3} = 2\,\text{sen}\,\phi$$

o que implica

$$\cos\phi = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}\,\phi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

O único ângulo ϕ que satisfaz essas equações e cuja medida em radianos está no intervalo (12) é $\phi = -\pi/3$ (Figura B.7). Assim, a forma polar de z é

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) \blacktriangleleft$$



▲ **Figura B.7**

Interpretação geométrica da multiplicação e divisão de números complexos

Vejamos como as formas polares de números complexos fornecem uma interpretação geométrica da multiplicação e divisão. Sejam

$$z_1 = |z_1|(\cos\phi_1 + i\,\text{sen}\,\phi_1) \quad \text{e} \quad z_2 = |z_2|(\cos\phi_2 + i\,\text{sen}\,\phi_2)$$

as formas polares dos números complexos não nulos z_1 e z_2. Multiplicando, obtemos

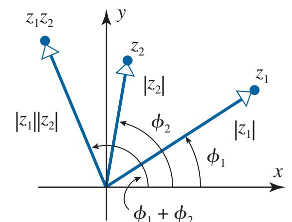
$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|[(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \text{sen}\,\phi_1\,\text{sen}\,\phi_2) + i(\text{sen}\,\phi_1\cos\phi_2 + \cos\phi_1\,\text{sen}\,\phi_2)]$$

Agora aplicamos as identidades trigonométricas

$$\cos(\phi_1 + \phi_2) = \cos\phi_1\cos\phi_2 - \text{sen}\,\phi_1\,\text{sen}\,\phi_2$$
$$\text{sen}(\phi_1 + \phi_2) = \text{sen}\,\phi_1\cos\phi_2 + \cos\phi_1\,\text{sen}\,\phi_2$$

e obtemos

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\,\text{sen}(\phi_1 + \phi_2)] \tag{13}$$



▲ **Figura B.8**

que é a forma polar do número complexo de módulo $|z_1||z_2|$ e argumento $\phi_1 + \phi_2$. Assim, mostramos que *multiplicar dois números complexos tem o efeito geométrico de multiplicar seus módulos e somar seus argumentos* (Figura B.8).

Uma conta muito parecida mostra que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\,\text{sen}(\phi_1 - \phi_2)] \tag{14}$$

o que nos diz que *dividir dois números complexos tem o efeito geométrico de dividir seus módulos e subtrair seus argumentos* (ambos na ordem apropriada).

▶ EXEMPLO 6 Multiplicando e dividindo em forma polar

Utilize as formas polares dos números complexos $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ e $z_2 = \sqrt{3} + i$ para calcular $z_1 z_2$ e z_1/z_2.

Solução As formas polares desses números complexos são

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{e} \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$$

(verifique). Assim, segue de (13) que

$$z_1 z_2 = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right] = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 4i$$

e de (14) que

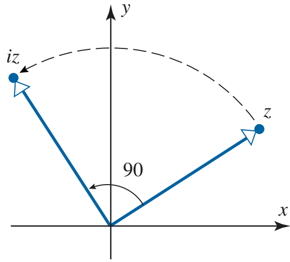
$$\frac{z_1}{z_2} = 1\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Para conferir, vamos calcular $z_1 z_2$ e z_1/z_2 diretamente.

$$z_1 z_2 = (1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{3} + i + 3i + \sqrt{3}i^2 = 4i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i} = \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}\cdot\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{3}-i+3i-\sqrt{3}i^2}{3-i^2} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

o que confere com o resultado obtido usando formas polares. ◀



▲ **Figura B.9**

Observação O número complexo i tem módulo igual a 1 e argumento principal $\pi/2$. Assim, se z for um número complexo, então iz tem o mesmo módulo de z, mas seu argumento aumentou por $\pi/2$ (= 90º); ou seja, a multiplicação por i tem o efeito geométrico de girar o vetor z no sentido anti-horário por 90º (Figura B.9).

Fórmula de De Moivre

Se n for um inteiro positivo e z for um número complexo não nulo de forma polar

$$z = |z|(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi)$$

então, elevar z à enésima potência fornece

$$z^n = \underbrace{z\cdot z\cdot\cdots\cdot z}_{n \text{ fatores}} = |z|^n[\cos(\underbrace{\phi+\phi+\cdots+\phi}_{n \text{ parcelas}})] + i[\mathrm{sen}(\underbrace{\phi+\phi+\cdots+\phi}_{n \text{ parcelas}})]$$

que pode ser escrito mais sucintamente como

$$z^n = |z|^n(\cos n\phi + i\,\mathrm{sen}\,n\phi) \tag{15}$$

No caso especial em que $|z| = 1$, essa fórmula simplifica para

$$z^n = \cos n\phi + i\,\mathrm{sen}\,n\phi$$

a qual, usando a forma polar de z, resulta em

$$(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi)^n = \cos n\phi + i\,\mathrm{sen}\,n\phi \tag{16}$$

Esse resultado é conhecido como ***fórmula de De Moivre***.

Fórmula de Euler

Se θ for um número real, digamos, a medida em radianos de algum ângulo, então a função ***exponencial complexa*** $e^{i\theta}$ é definida por

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{17}$$

que muitas vezes é denominada ***fórmula de Euler***. Uma motivação para essa fórmula vem das séries de Maclaurin estudadas no Cálculo. Os leitores que já estudaram séries infinitas no Cálculo podem deduzir (17) substituindo formalmente $i\theta$ no lugar de x na série de Maclaurin de e^x e escrevendo

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \cdots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \end{aligned}$$

onde o último passo acima segue das séries de Maclaurin de $\cos\theta$ e sen θ.

Se $z = a + bi$ for algum número complexo qualquer, definimos a ***exponencial complexa e^z*** por

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i\,\text{sen}\,b) \tag{18}$$

Pode ser provado que as exponenciais complexas satisfazem as propriedades padrão de expoentes. Assim, por exemplo,

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}, \quad \frac{1}{e^z} = e^{-z}$$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

Conjunto de exercícios 1.1 (página 9)

1. (a), (c) e (f) são equações lineares; (b), (d) e (e) não são equações lineares.

3. (a) e (d) são sistemas lineares; (b) e (c) não são sistemas lineares. **5.** Ambos (a) e (d) são consistentes.

7. (a), (d) e (e) são soluções; (b) e (c) não são soluções. **9.** **(a)** $x = \frac{5}{7}t + \frac{3}{7}$, $y = t$ **(b)** $x_1 = \frac{1}{4}r - \frac{5}{8}s + \frac{3}{4}t - \frac{1}{8}$, $x_2 = r$, $x_3 = s$, $x_4 = t$

11. **(a)** $\begin{aligned} 2x_1 &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 &= 0 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$ **(b)** $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_3 &= 5 \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 &= -3 \\ -2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$ **(c)** $\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} x_1 &= 7 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= 3 \\ x_4 &= 4 \end{aligned}$

13. **(a)** $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 8 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

Verdadeiro/falso 1.1

(a) Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira **(e)** Falsa **(f)** Falsa **(g)** Verdadeira **(h)** Falsa

Conjunto de exercícios 1.2 (página 22)

1. **(a)** Ambas **(b)** Ambas **(c)** Ambas **(d)** Ambas **(e)** Ambas **(f)** Ambas **(g)** Forma escalonada

3. **(a)** $x_1 = -37, x_2 = -8, x_3 = 5$ **(b)** $x_1 = 13t - 10, x_2 = 13t - 5, x_3 = -t + 2, x_4 = t$

(c) $x_1 = -7s + 2t - 11, x_2 = s, x_3 = -3t - 4, x_4 = -3t + 9, x_5 = t$ **(d)** Inconsistente

5. $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2$ **7.** $x = t - 1, y = 2s, z = s, w = t$ **9.** $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2$

11. $x = t - 1, y = 2s, z = s, w = t$ **13.** Tem soluções não triviais. **15.** Tem soluções não triviais. **17.** $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$

19. $x_1 = -s, x_2 = -t - s, x_3 = 4s, x_4 = t$ **21.** $w = t, x = -t, y = t, z = 0$ **23.** $I_1 = -1, I_2 = 0, I_3 = 1, I_4 = 2$

25. Se $a = 4$, há uma infinidade de soluções; se $a = -4$, não há soluções; se $a \neq \pm 4$, existe exatamente uma solução.

27. Se $a = 3$, há uma infinidade de soluções; se $a = -3$, não há soluções; se $a \neq \pm 3$, existe exatamente uma solução.

29. $x = \frac{2a}{3} - \frac{b}{9},\ y = -\frac{a}{3} + \frac{2b}{9}$ **31.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são duas possibilidades. **35.** $x = \pm 1,\ y = \pm\sqrt{3},\ z = \pm\sqrt{2}$

37. $a = 1, b = -6, c = 2, d = 10$ **39.** O sistema não homogêneo terá exatamente uma única solução.

Verdadeiro/falso 1.2

(a) Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Falsa **(d)** Verdadeira **(e)** Verdadeira **(f)** Falsa **(g)** Verdadeira **(h)** Falsa **(i)** Falsa

Conjunto de exercícios 1.3 (Página 35)

1. **(a)** Não está definida **(b)** 4×2 **(c)** Não está definida **(d)** Não está definida **(e)** 5×5 **(f)** 5×2 **(g)** Não está definida

(h) 5×2

3. **(a)** $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ -5 & 10 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} -7 & -28 & -14 \\ -21 & -7 & -35 \end{bmatrix}$ **(e)** Não definida

(f) $\begin{bmatrix} 22 & -6 & 8 \\ -2 & 4 & 6 \\ 10 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **(g)** $\begin{bmatrix} -39 & -21 & -24 \\ 9 & -6 & -15 \\ -33 & -12 & -30 \end{bmatrix}$ **(h)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(i)** 5 **(j)** 225 **(k)** 168 **(l)** Não definida

5. **(a)** $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** Não definida **(c)** $\begin{bmatrix} 42 & 108 & 75 \\ 12 & -3 & 21 \\ 36 & 78 & 63 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{bmatrix}$ **(e)** $\begin{bmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{bmatrix}$

7. **(a)** [67 41 41] **(b)** [63 67 57] **(c)** $\begin{bmatrix} 41 \\ 21 \\ 67 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 63 \end{bmatrix}$ **(e)** [24 56 97] **(f)** $\begin{bmatrix} 76 \\ 98 \\ 97 \end{bmatrix}$

9. **(a)** $\begin{bmatrix} -3 \\ 48 \\ 24 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 12 \\ 29 \\ 56 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix} 76 \\ 98 \\ 97 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 64 \\ 21 \\ 77 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 14 \\ 22 \\ 28 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix} 38 \\ 18 \\ 74 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

11. **(a)** $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 9 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & -8 \\ 2 & -5 & 9 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

13. **(a)** $\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & 6x_2 & - & 7x_3 & = & 2 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ & & 4x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}$ **(b)** $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & = & 2 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & - & 6x_3 & = & -9 \end{array}$

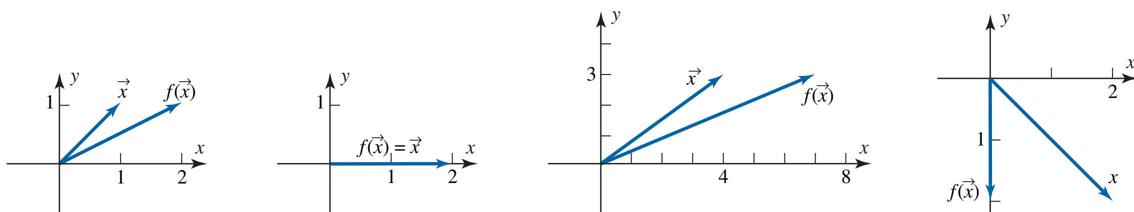
15. -1 **17.** $a = 4, b = -6, c = -1, d = 1$

23. **(a)** $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{54} & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$

25. $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

(a) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(b)** $f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ **(c)** $f\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ **(d)** $f\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$



27. Uma, a saber, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

29. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ **(b)** Quatro; $\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

Verdadeiro/falso 1.3

(a) Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Falsa **(d)** Falsa **(e)** Verdadeira **(f)** Falsa **(g)** Falsa **(h)** Verdadeira **(i)** Verdadeira
(j) Verdadeira **(k)** Verdadeira **(l)** Falsa **(m)** Verdadeira **(n)** Verdadeira **(o)** Falsa

Conjunto de exercícios 1.4 (página 49)

5. $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$ **7.** $D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} -\frac{9}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{6}{13} \end{bmatrix}$

19. **(a)** $\begin{bmatrix} 41 & 15 \\ 30 & 11 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 11 & -15 \\ -30 & 41 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **(e)** $\begin{bmatrix} 20 & 7 \\ 14 & 6 \end{bmatrix}$ **(f)** $\begin{bmatrix} 39 & 13 \\ 26 & 13 \end{bmatrix}$

21. **(a)** $\begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 26 & -18 \\ 0 & 18 & 26 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 12 & -5 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & -15 \\ 0 & 15 & -14 \end{bmatrix}$ **(f)** $\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & -24 \\ 0 & 24 & 32 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$ **31.** $D = CA^{-1}B^{-1}A^{-2}BC^2(B^T)^{-1}A^2$ **33.** B^{-1} **35.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

37 $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **39.** $x_1 = \frac{1}{23}$, $x_2 = \frac{13}{23}$ **41.** $x_1 = -\frac{1}{11}$, $x_2 = \frac{6}{11}$

Verdadeiro/falso 1.4

(a) Falsa **(b)** Falsa **(c)** Falsa **(d)** Falsa **(e)** Falsa **(f)** Verdadeira **(g)** Verdadeira **(h)** Verdadeira **(i)** Falsa
(j) Verdadeira **(k)** Falsa

Conjunto de exercícios 1.5 (página 58)

1. **(a)** É elementar **(b)** Não é elementar **(c)** Não é elementar **(d)** Não é elementar

3. **(a)** Somar 3 vezes a linha 2 com a linha 1: $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** Multiplicar a linha 1 por $-\frac{1}{7}$: $\begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) Somar 5 vezes a linha 1 com a linha 3: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(d)** Trocar entre si as linhas 1 e 3: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. **(a)** Trocar entre si as linhas 1 e 2: $EA = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 & -6 \\ -1 & -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

(b) Somar -3 vezes a linha 2 com a linha 3: $EA = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 & 3 \\ -1 & 9 & 4 & -12 & -10 \end{bmatrix}$

(c) Somar 4 vezes a linha 3 com a linha 1: $EA = \begin{bmatrix} 13 & 28 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

7. **(a)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{10} & -\frac{6}{5} \\ -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ **15.** Não existe inversa **17.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **21.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -3 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{40} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} -\frac{7}{12} & \frac{5}{24} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{12} & \frac{5}{24} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

25. **(a)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{k} & -\frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} & -\frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **27.** $c \neq 0, 1$

29. $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

37. Somar -1 vez a linha 1 com a linha 2. Somar -1 vez a linha 1 com a linha 3. Somar -1 vez a linha 2 com a linha 1. Somar a linha 2 com a linha 3.

Verdadeiro/falso 1.5

(a) Falsa **(b)** Verdadeira **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira **(e)** Verdadeira **(f)** Verdadeira **(g)** Falsa

Conjunto de exercícios 1.6 (página 65)

1. $x_1 = 3, x_2 = -1$ **3.** $x_1 = -1, x_2 = 4, x_3 = -7$ **5.** $x = 1, y = 5, z = -1$ **7.** $x_1 = 2b_1 - 5b_2, x_2 = -b_1 + 3b_2$

9. **(i)** $x_1 = \frac{22}{17},\ x_2 = \frac{1}{17}$ **(ii)** $x_1 = \frac{21}{17},\ x_2 = \frac{11}{17}$

11. **(i)** $x_1 = \frac{7}{15},\ x_2 = \frac{4}{15}$ **(ii)** $x_1 = \frac{34}{15},\ x_2 = \frac{28}{15}$ **(iii)** $x_1 = \frac{19}{15},\ x_2 = \frac{13}{15}$ **(iv)** $x_1 = -\frac{1}{5},\ x_2 = \frac{3}{5}$

13. Consistente com quaisquer b. **15.** $b_3 = b_1 - b_2$ **17.** $b_1 = b_3 + b_4, b_2 = 2b_3 + b_4$

19. $X = \begin{bmatrix} 11 & 12 & -3 & 27 & 26 \\ -6 & -8 & 1 & -18 & -17 \\ -15 & -21 & 9 & -38 & -35 \end{bmatrix}$

Verdadeiro/falso 1.6

(a) Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira **(e)** Verdadeira **(f)** Verdadeira **(g)** Verdadeira

Conjunto de exercícios 1.7 (página 71)

1. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} -15 & 10 & 0 & 20 & -20 \\ 2 & -10 & 6 & 0 & 6 \\ 18 & -6 & -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$

9. $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\ A^{-2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},\ A^{-k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(-2)^k \end{bmatrix}$

11. $A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix},\ A^{-2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix},\ A^{-k} = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{bmatrix}$

13. Não é simétrica **15.** É simétrica **17.** Não é simétrica **19.** Não é simétrica **21.** Não é invertível **23.** $a = -8$

25. $x \neq 1, -2, 4$ **27.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **35.** **(a)** É simétrica **(b)** Não é simétrica (exceto se $n = 1$) **(c)** É simétrica **(d)** Não é simétrica (exceto se $n = 1$)

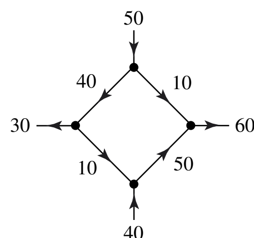
39. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -4 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ **43.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Verdadeiro/falso 1.7

(a) Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Falsa **(d)** Verdadeira **(e)** Verdadeira **(f)** Falsa **(g)** Falsa **(h)** Verdadeira **(i)** Verdadeira **(j)** Falsa **(k)** Falsa **(l)** Falsa **(m)** Verdadeira

Conjunto de exercícios 1.8 (página 84)

1.



3. **(a)** $x_3 - x_4 = -500$, $-x_1 + x_4 = 100$, $x_1 - x_2 = 300$, $x_2 - x_3 = 100$
(b) $x_1 = -100 + t$, $x_2 = -400 + t$, $x_3 = -500 + t$, $x_4 = t$
(c) Para que todas as taxas sejam negativas, necessitamos de $t = 500$ carros por hora, portanto, $x_1 = 400$, $x_2 = 100$, $x_3 = 0$, $x_4 = 500$

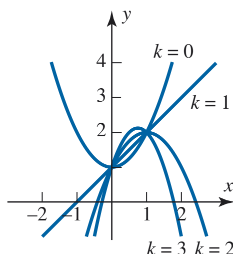
5. $I_1 = \frac{13}{5}$ A, $I_2 = -\frac{2}{5}$ A, $I_3 = \frac{11}{5}$ A **7.** $I_1 = I_4 = I_5 = I_6 = \frac{1}{2}$ A, $I_2 = I_3 = 0$ A

9. $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 3$ e $x_4 = 4$; a equação equilibrada é $C_3H_8 + 5O_2 \rightarrow 3CO_2 + 4H_2O$

11. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = t$; a equação equilibrada é $CH_3COF + H_2O \rightarrow CH_3COOH + HF$

13. $p(x) = x_2 - 2x + 2$ **15.** $p(x) = 1 + \frac{13}{6}x - \frac{1}{6}x^3$

17. **(a)** Usando $a_1 = k$ como parâmetro, $p(x) = 1 + kx + (1 - k)x^2$, com $-\infty < k < \infty$.
(b) Mostramos o gráfico com $k = 0, 1, 2$ e 3.



Verdadeiro/falso 1.8

(a) Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Falsa **(e)** Falsa

Conjunto de exercícios 1.9 (página 90)

1. **(a)** $\begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}10 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} \$25.290 \\ \$22.581 \end{bmatrix}$ **3.** **(a)** $\begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} \$31.500 \\ \$26.500 \\ \$26.300 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 123{,}08 \\ 202{,}56 \end{bmatrix}$

Verdadeiro/falso 1.9

(a) Falsa **(b)** Verdadeira **(c)** Falsa **(d)** Verdadeira **(e)** Verdadeira

Capítulo 1 Exercícios suplementares (página 91)

1.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & -1 \end{array}$$
$x_1 = -\frac{3}{2}s - \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{9}{2}s - \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}$, $x_3 = s$, $x_4 = t$

3.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ -4x_1 & & & + & 3x_3 & = & -1 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}$$
$x_1 = -\frac{17}{2}$, $x_2 = -\frac{26}{3}$, $x_3 = -\frac{35}{3}$

5. $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y$, $y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$ **7.** $x = 4$, $y = 2$, $z = 3$

9. **(a)** $a \neq 0, b \neq 2$ **(b)** $a \neq 0, b = 2$ **(c)** $a = 0, b = 2$ **(d)** $a = 0, b \neq 2$

11. $K = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **13.** **(a)** $X = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ **(c)** $X = \begin{bmatrix} -\frac{113}{37} & -\frac{160}{37} \\ -\frac{20}{37} & -\frac{46}{37} \end{bmatrix}$

15. $a = 1, b = -2, c = 3$

Conjunto de exercícios 2.1 (página 98)

1. $M_{11} = 29, C_{11} = 29$
$M_{12} = 21, C_{12} = -21$
$M_{13} = 27, C_{13} = 27$
$M_{21} = -11, C_{21} = 11$
$M_{22} = 13, C_{22} = 13$
$M_{23} = -5, C_{23} = 5$
$M_{31} = -19, C_{31} = -19$
$M_{32} = -19, C_{32} = 19$
$M_{33} = 19, C_{33} = 19$

3. **(a)** $M_{13} = 0, C_{13} = 0$
(b) $M_{23} = -96, C_{23} = 96$
(c) $M_{22} = -48, C_{22} = -48$
(d) $M_{21} = 72, C_{21} = -72$

5. 22; $\begin{bmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{5}{22} \\ \frac{1}{11} & \frac{3}{22} \end{bmatrix}$ **7.** 59; $\begin{bmatrix} -\frac{2}{59} & -\frac{7}{59} \\ \frac{7}{59} & -\frac{5}{59} \end{bmatrix}$

9. $a^2 - 5a + 21$ **11.** -65 **13.** -123 **15.** $\lambda = 1$ ou -3 **17.** $\lambda = 1$ ou -1 **19.** -123 (todas as partes) **21.** -40
23. 0 **25.** -240 **27.** -1 **29.** 0 **31.** 6 **33.** O determinante é $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$. **35.** $d_2 = d_1 + \lambda$

Verdadeiro/falso 2.1

(a) Falsa **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira **(e)** Verdadeira **(f)** Falsa **(g)** Falsa **(h)** Falsa
(i) Verdadeira

Conjunto de exercícios 2.2 (página 105)

5. -5 **7.** -1 **9.** 1 **11.** 5 **13.** 33 **15.** 6 **17.** -2
19. Exercício 14: 39; Exercício 15: 6; Exercício 16: $-\frac{1}{6}$; Exercício 17: -2 **21.** -6 **23.** 72 **25.** -6 **27.** 18

Verdadeiro/falso 2.2

(a) Verdadeira **(b)** Verdadeira **(c)** Falsa **(d)** Falsa **(e)** Verdadeira **(f)** Verdadeira

Conjunto de exercícios 2.3 (página 115)

7. É invertível **9.** É invertível **11.** Não é invertível **13.** É invertível **15.** $k \neq \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$ **17.** $k \neq -1$

19. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ **21.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **23.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

25. $x = \frac{3}{11},\ y = \frac{2}{11},\ z = -\frac{1}{11}$ **27.** $x_1 = -\frac{30}{11},\ x_2 = -\frac{38}{11},\ x_3 = -\frac{40}{11}$ **29.** A regra de Cramer não é aplicável. **31.** $y = 0$
35. **(a)** -189 **(b)** $-\frac{1}{7}$ **(c)** $-\frac{8}{7}$ **(d)** $-\frac{1}{56}$ **(e)** 7 **37.** **(a)** 189 **(b)** $\frac{1}{7}$ **(c)** $\frac{8}{7}$ **(d)** $\frac{1}{56}$

Verdadeiro/falso 2.3

(a) Falsa **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Falsa **(e)** Verdadeira **(f)** Verdadeira **(g)** Verdadeira **(h)** Verdadeira
(i) Verdadeira **(j)** Verdadeira **(k)** Verdadeira **(l)** Falsa

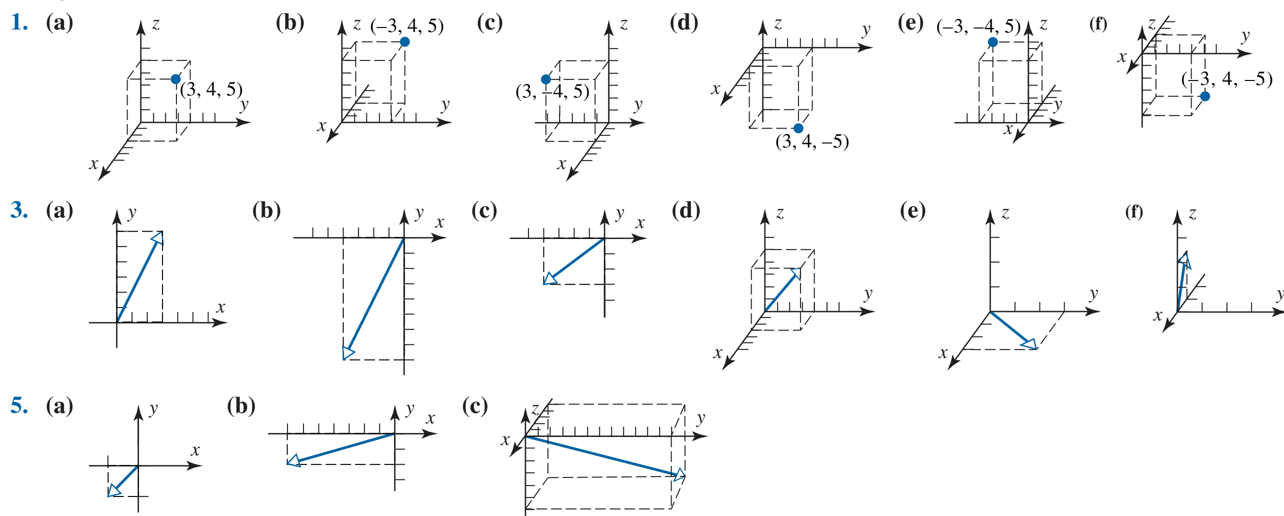
Capítulo 2 Exercícios suplementares (página 117)

1. -18 **3.** 24 **5.** -10 **7.** 329 **9.** Exercício 3: 24; Exercício 4: 0; Exercício 5: -10; Exercício 6: -48
11. As matrizes nos Exercícios 1 a 3 são invertíveis e a matriz no Exercício 4 não é.

13. $-b^2 + 5b - 21$ **15.** -120 **17.** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$ **19.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{24} & -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{4} & -\frac{7}{12} & -\frac{1}{12} \end{bmatrix}$ **21.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} \frac{10}{329} & -\frac{2}{329} & \frac{52}{329} & -\frac{27}{329} \\ \frac{55}{329} & -\frac{11}{329} & -\frac{43}{329} & \frac{16}{329} \\ -\frac{3}{47} & \frac{10}{47} & -\frac{25}{47} & -\frac{6}{47} \\ -\frac{31}{329} & \frac{72}{329} & \frac{102}{329} & -\frac{15}{329} \end{bmatrix}$ **25.** $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y,\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$ **29.** **(b)** $\cos\beta = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac},\ \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

Conjunto de exercícios 3.1 (página 128)



7. **(a)** $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1,\ 3)$ **(b)** $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3,\ 6,\ 1)$

9. **(a)** O ponto final é $B(2, 3)$. **(b)** O ponto inicial é $A(-2, -2, -1)$.

11. **(a)** Uma resposta possível é $(-1, 2, -4)$. **(b)** Uma resposta possível é $P(7, -2, -6)$.

13. **(a)** $\mathbf{u} + \mathbf{w} = (1, -4)$ **(b)** $\mathbf{v} - 3\mathbf{u} = (-12, 8)$ **(c)** $2(\mathbf{u} - 5\mathbf{w}) = (38, 28)$ **(d)** $3\mathbf{v} - 2(\mathbf{u} + 2\mathbf{w}) = (4, 29)$
(e) $-3(\mathbf{w} - 2\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (33, -12)$ **(f)** $(-2\mathbf{u} - \mathbf{v}) - 5(\mathbf{v} + 3\mathbf{w}) = (37, 17)$

15. **(a)** $(-1, 9, -11, 1)$ **(b)** $(22, 53, -19, 14)$ **(c)** $(-13, 13, -36, -2)$ **(d)** $(-90, -114, 60, -36)$ **(e)** $(-9, -5, -5, -3)$
(f) $(27, 29, -27, 9)$

17. **(a)** $\mathbf{w} - \mathbf{u} = (-9, 3, -3, -8, 5)$ **(b)** $2\mathbf{v} + 3\mathbf{u} = (13, -5, 14, 13, -9)$ **(c)** $-\mathbf{w} + 3(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = (-14, -2, 24, 2, 7)$
(d) $5(-\mathbf{v} + 4\mathbf{u} - \mathbf{w}) = (125, -25, -20, 75, -70)$ **(e)** $-2(3\mathbf{w} + \mathbf{v}) + (2\mathbf{u} + \mathbf{w}) = (32, -10, 1, 27, -16)$
(f) $\frac{1}{2}(\mathbf{w} - 5\mathbf{v} + 2\mathbf{u}) + \mathbf{v} = \left(\frac{9}{2},\ \frac{3}{2},\ -12,\ -\frac{5}{2},\ -2\right)$

19. **(a)** $\mathbf{v} - \mathbf{w} = (-2, 1, -4, -2, 7)$ **(b)** $6\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = (-10, 6, -4, 26, 28)$ **(c)** $(2\mathbf{u} - 7\mathbf{w}) - (8\mathbf{v} + \mathbf{u}) = (-77, 8, 94, -25, 23)$

21. $\mathbf{x} = \left(-\frac{8}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{11}{6}\right)$ **23.** **(a)** Não são paralelos. **(b)** São paralelos. **(c)** São paralelos. **25.** $a = 3, b = -1$

27. $c_1 = 2, c_2 = -1, c_3 = 5$ **29.** $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -1, c_4 = 1$ **33.** **(a)** $\left(\frac{9}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ **(b)** $\left(\frac{23}{4},\ -\frac{9}{4},\ \frac{1}{4}\right)$

Verdadeiro/falso 3.1

(a) Falsa **(b)** Falsa **(c)** Falsa **(d)** Verdadeira **(e)** Verdadeira **(f)** Falsa **(g)** Falsa **(h)** Verdadeira **(i)** Falsa
(j) Verdadeira **(k)** Falsa

Conjunto de exercícios 3.2 (página 141)

1. **(a)** $\|\mathbf{v}\| = 5,\ \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right),\ -\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(-\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ **(b)** $\|\mathbf{v}\| = 2\sqrt{3},\ \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ -\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
(c) $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{15},\ \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{15}}(1,\ 0,\ 2,\ 1,\ 3),\ -\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = -\frac{1}{\sqrt{15}}(1,\ 0,\ 2,\ 1,\ 3)$

3. **(a)** $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{83}$ **(b)** $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = \sqrt{17} + \sqrt{26}$ **(c)** $\|-2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}\| = 2\sqrt{3}$ **(d)** $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \sqrt{466}$

5. **(a)** $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \sqrt{2.570}$ **(b)** $\|3\mathbf{u}\| - 5\,\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| = 3\sqrt{46} - 10\sqrt{21} + \sqrt{42}$ **(c)** $\|-\|\mathbf{u}\|\,\mathbf{v}\| = 2\sqrt{966}$

7. $k = \frac{5}{7},\ k = -\frac{5}{7}$ **9.** **(a)** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -8, \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 26, \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 24$ **(b)** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0, \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 54, \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 21$

11. **(a)** $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{14}$ **(b)** $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{59}$ **(c)** $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{677}$

13. **(a)** $\cos\theta = \frac{15}{\sqrt{27}\sqrt{17}}$; θ é agudo **(b)** $\cos\theta = -\frac{4}{\sqrt{6}\sqrt{45}}$; θ é obtuso **(c)** $\cos\theta = -\frac{136}{\sqrt{225}\sqrt{180}}$; θ é obtuso

15. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 45\frac{\sqrt{3}}{2}$

17. **(a)** $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$ não faz sentido porque $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ é um escalar. **(b)** $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$ faz sentido.
(c) $\|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\|$ não faz sentido porque a quantidade dentro da norma é um escalar.
(d) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) - \|\mathbf{u}\|$ faz sentido, pois ambas parcelas são escalares.

19. **(a)** $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ **(b)** $\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}, \frac{7}{5\sqrt{2}}\right)$ **(c)** $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ **(d)** $\left(\frac{1}{\sqrt{55}}, \frac{2}{\sqrt{55}}, \frac{3}{\sqrt{55}}, \frac{4}{\sqrt{55}}, \frac{5}{\sqrt{55}}\right)$

23. **(a)** $\cos\theta = -\frac{11}{\sqrt{962}}$ **(b)** $\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ **(c)** $\cos\theta = 0$ **(d)** $\cos\theta = 0$

25. **(a)** $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = 10,\ \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| = \sqrt{13}\sqrt{17} \approx 14{,}866$ **(b)** $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = 7{,}0\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| = \sqrt{10}\sqrt{14} \approx 11{,}832$
(c) $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = 5, \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| = (3)(2) = 6$

27. É a esfera de raio 1 centrada em $(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

Verdadeiro/falso 3.2

(a) Verdadeira **(b)** Verdadeira **(c)** Falsa **(d)** Verdadeira **(e)** Verdadeira **(f)** Falsa **(g)** Falsa **(h)** Falsa **(i)** Verdadeira **(j)** Verdadeira

Conjunto de exercícios 3.3 (página 150)

1. **(a)** São ortogonais. **(b)** Não são ortogonais. **(c)** Não são ortogonais. **(d)** Não são ortogonais.

3. **(a)** O conjunto não é ortogonal. **(b)** O conjunto é ortogonal. **(c)** O conjunto é ortogonal. **(d)** O conjunto não é ortogonal.

5. $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ **7.** Formam. **9.** $-2(x+1) + (y-3) - (z+2) = 0$ **11.** $2z = 0$ **13.** Não são paralelos.

15. São paralelos. **17.** Não são perpendiculares. **19.** **(a)** $\frac{2}{5}$ **(b)** $\frac{18}{\sqrt{22}}$ **21.** $(0, 0), (6, 2)$ **23.** $\left(-\frac{16}{13}, 0, -\frac{80}{13}\right), \left(\frac{55}{13}, 1, -\frac{11}{13}\right)$

25. **(a)** $\left(0, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right), \left(1, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$ **27.** $\left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, -\frac{1}{10}\right), \left(\frac{9}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{10}, \frac{21}{10}\right)$ **29.** 1 **31.** $\frac{1}{\sqrt{17}}$ **33.** $\frac{5}{3}$ **35.** $\frac{1}{\sqrt{29}}$

37. $\frac{11}{\sqrt{6}}$ **39.** 0 (Os planos coincidem.) **41.** $\cos\beta = \frac{b}{\|\mathbf{v}\|},\ \cos\gamma = \frac{c}{\|\mathbf{v}\|}$

Verdadeiro/falso 3.3

(a) Verdadeira **(b)** Verdadeira **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira **(e)** Verdadeira **(f)** Falsa **(g)** Falsa

Conjunto de exercícios 3.4 (página 159)

1. Equação vetorial: $(x, y) = (-4, 1) + t\,(0, -8)$;
Equações paramétricas: $x = -4, y = 1 - 8t$

3. Equação vetorial: (x, y, z) = t (−3, 0, 1);
Equações paramétricas: $x = -3t, y = 0, z = t$

5. Ponto: $(3, -6)$; Vetor paralelo: $(-5, -1)$ **7.** Ponto: $(4, 6)$; Vetor paralelo: $(-6, -6)$

9. Equação vetorial: $(x, y, z) = (-3, 1, 0) + t_1(0, -3, 6) + t_2(-5, 1, 2)$;
Equações paramétricas: $x = -3 - 5t_2, y = 1 - 3t_1 + t_2, z = 6t_1 + 2t_2$

11. Equação vetorial: $(x, y, z) = (-1, 1, 4) + t_1(6, -1, 0) + t_2(-1, 3, 1)$;
Equações paramétricas: $x = -1 + 6t_1 - t_2, y = 1 - t_1 + 3t_2, z = 4 + t_2$

13. Uma resposta possível é a equação vetorial: $(x, y) = t\,(3, 2)$;
Equações paramétricas: $x = 3t, y = 2t$

15. Uma resposta possível é a equação vetorial: $(x, y, z) = t_1(0, 1, 0) + t_2(5, 0, 4)$;
Equações paramétricas: $x + 5t_2$, $y = t_1$, $z = 4t2$

17. $x_1 = -s - t, x_2 = s, x_3 = t$

19. $x_1 = \frac{3}{7}r - \frac{19}{4}s - \frac{8}{7}t,\ x_2 = -\frac{2}{7}r + \frac{1}{7}s + \frac{3}{7}t,\ x_3 = r,\ x_4 = s,\ x_5 = t$

21. **(a)** $(1, 0, 0) + s(-1, 1, 0) + t(-1, 0, 1)$ **(b)** Um plano em R^3 passando por $P(1, 0, 0)$ e paralelo a $(-1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 1)$.

23. **(a)** $\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ -2x & + & 3y & & & = & 0 \end{array}$ **(b)** Uma reta pela origem em R^3. **(c)** $x = -\frac{3}{5}t,\ y = -\frac{2}{5}t,\ z = t$

25. **(a)** $x_1 = -\frac{2}{3}s + \frac{1}{3}t,\ x_2 = s,\ x_3 = t$ **(c)** $x_1 = 1 - \frac{2}{3}s + \frac{1}{3}t,\ x_2 = s,\ x_3 = 1 + t$

27. $x_1 = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}s - \frac{1}{3}t,\ x_2 = s,\ x_3 = t,\ x_4 = 1$; a solução geral do sistema homogêneo associado é $x_1 = -\frac{4}{3}s - \frac{1}{3}t$. Uma solução particular do sistema dado é $x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1$.

Verdadeiro/falso 3.4

(a) Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira **(e)** Falsa **(f)** Verdadeira

Conjunto de exercícios 3.5 (página 168)

1. **(a)** $(32, -6, -4)$ **(b)** $(-14, -20, -82)$ **(c)** $(27, 40, -42)$ **3.** $(18, 36, -18)$ **5.** $(-3, 9, -3)$ **7.** $\sqrt{59}$ **9.** $\sqrt{101}$

11. 3 **13.** 7 **15.** $\frac{\sqrt{374}}{2}$ **17.** 16 **19.** Os vetores não são coplanares. **21.** -92 **23.** abc

25. **(a)** -3 **(b)** 3 **(c)** 3 **27.** **(a)** $\frac{\sqrt{26}}{2}$ **(b)** $\frac{\sqrt{26}}{3}$ **29.** $2(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ **37.** **(a)** $\frac{17}{6}$ **(b)** $\frac{1}{2}$

Verdadeiro/falso 3.5

(a) Verdadeira **(b)** Verdadeira **(c)** Falsa **(d)** Verdadeira **(e)** Falsa **(f)** Falsa

Capítulo 3 Exercícios suplementares (página 170)

1. **(a)** $3\mathbf{v} - 2\mathbf{u} = (13, -3, 10)$ **(b)** $\|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \sqrt{70}$ **(c)** $\sqrt{774}$ **(d)** $\text{proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{u} = -\frac{12}{27}(2, -5, -5)$
(e) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -122$ **(f)** $(-5\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}) = (-3.150, -2.430, 1.170)$

3. **(a)** $3\mathbf{v} - 2\mathbf{u} = (-5, -12, 20, -2)$ **(b)** $\|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \sqrt{106}$ **(c)** $\sqrt{2.810}$ **(d)** $\text{proj}_{\mathrm{w}}\mathbf{u} = -\frac{15}{77}(9,\ 1,\ -6,\ -6)$

5. Não é ortogonal.

7. **(a)** Uma reta pela origem, perpendicular ao vetor dado.
(b) Um plano pela origem, perpendicular ao vetor dado.
(c) $\{\mathbf{0}\}$ (a origem)
(d) Uma reta pela origem, perpendicular ao plano contendo os dois vetores não colineares.

9. Verdadeira. **11.** $S(-1, -1, 5)$ **13.** $\sqrt{\frac{14}{17}}$ **15.** $\frac{11}{\sqrt{35}}$

17. Equação vetorial: $(x, y, z) = (-2, 1, 3) + t_1(1, -2, -2) + t_2(5, -1, -5)$;
Equações paramétricas: $x = -2 + t_1 + 5t_2$, $y = 1 - 2t_1 - t_2$, $z = 3 - 2t_1 - 5t_2$

19. Equação vetorial: $(x, y) = (0, -3) + t(8, -1)$;
Equações paramétricas: $x = 8t$, $y = -3 - t$

21. Uma resposta possível é a equação vetorial: $(x, y) = (0, -5) + t(1, 3)$; Equações paramétricas: $x = t$, $y = -5 + 3t$

23. $3(x + 1) + 6(y - 5) + 2(z - 6) = 0$ **25.** $-18(x - 9) - 51y - 24(z - 4) = 0$ **29.** Um plano.

Conjunto de exercícios 4.1 (página 178)

1. **(a)** $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2, 6)$, $3\mathbf{u} = (0, 6)$ **(c)** Axiomas 1 a 5. **3.** É um espaço vetorial com as operações dadas.

5. Não é um espaço vetorial, falham os Axiomas 5 e 6. **7.** Não é um espaço vetorial, falha o Axioma 8.

9. É um espaço vetorial com as operações dadas. **11.** É um espaço vetorial com as operações dadas.

Verdadeiro/falso 4.1

(a) Falsa **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Falsa **(e)** Falsa

Conjunto de exercícios 4.2 (página 188)

1. (a), (c), (e) **3.** (a), (b), (d) **5.** (a), (c), (d) **7.** (a), (b), (d) **9.** (a), (b), (c)

11. **(a)** Os vetores geram. **(b)** Os vetores não geram. **(c)** Os vetores não geram. **(d)** Os vetores geram.

13. Os polinômios não geram.

15. **(a)** Reta: $x = -\frac{1}{2}t,\ \ y = -\frac{3}{2}t,\ \ z = t$ **(b)** Reta: $x = 2t, y = t, z = 0$ **(c)** Origem. **(d)** Origem

(e) Reta: $x = -3t, y = -2t, z = t$ **(f)** Plano: $x - 3y + z = 0$

Verdadeiro/falso 4.2

(a) Verdadeira **(b)** Verdadeira **(c)** Falsa **(d)** Falsa **(e)** Falsa **(f)** Verdadeira **(g)** Verdadeira **(h)** Falsa **(i)** Falsa **(j)** Verdadeira **(k)** Falsa

Conjunto de exercícios 4.3 (página 199)

1. **(a)** $\mathbf{u}_2$ é um múltiplo escalar de $\mathbf{u}_1$. **(b)** Os vetores são linearmente dependentes pelo Teorema 4.3.3.

(c) $\mathbf{p}_2$ é um múltiplo escalar de $\mathbf{p}_1$. **(d)** B é um múltiplo escalar de A.

3. Nenhum é.

5. **(a)** Não são coplanares. **(b)** São coplanares. **7.** **(b)** $\mathbf{v}_1 = \frac{2}{7}\mathbf{v}_2 - \frac{3}{7}\mathbf{v}_3,\ \ \mathbf{v}_2 = \frac{7}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{v}_3,\ \ \mathbf{v}_3 = -\frac{7}{3}\mathbf{v}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{v}_2$

9. $\lambda = -\frac{1}{2},\ \ \lambda = 1$

19. **(a)** Os vetores são linearmente independentes, pois $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ não são coplanares quando colocados com seus pontos iniciais na origem.

(b) Os vetores são linearmente dependentes, pois $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são coplanares quando colocados com seus pontos iniciais na origem.

21. $W(x) = -x \operatorname{sen} x - \cos x \neq 0$ em algum x. **23.** **(a)** $W(x) = e^x \neq 0$ **(b)** $W(x) = 2 \neq 0$

25. $W(x) = 2 \operatorname{sen} x \neq 0$ em algum x.

Verdadeiro/falso 4.3

(a) Falsa **(b)** Verdadeira **(c)** Falsa **(d)** Verdadeira **(e)** Verdadeira **(f)** Falsa **(g)** Verdadeira **(h)** Falsa

Conjunto de exercícios 4.4 (página 207)

1. **(a)** Uma base de R^2 tem dois vetores linearmente independentes. **(b)** Uma base de R^3 tem três vetores linearmente independentes.

(c) Uma base de P_2 tem três vetores linearmente independentes. **(d)** Uma base de M_{22} tem quatro vetores linearmente independentes.

3. (a), (b) **7.** **(a)** $(\mathbf{w})_S = (3, -7)$ **(b)** $(\mathbf{w})_S = \left(\frac{5}{28},\ \frac{3}{14}\right)$ **(c)** $(\mathbf{w})_S = \left(a,\ \frac{b-a}{2}\right)$

9. **(a)** $(\mathbf{v})_S = (3, -2, 1)$ **(b)** $(\mathbf{v})_S = (-2, 0, 1)$ **11.** $(A)_S = (-1, 1, -1, 3)$ **13.** $A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$

15. $\mathbf{p} = 7\mathbf{p}_1 - 8\mathbf{p}_2 + 3\mathbf{p}_3$ **17.** **(a)** $(2, 0)$ **(b)** $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ **(c)** $(0, 1)$ **(d)** $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}a,\ b - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$

Verdadeiro/falso 4.4

(a) Falsa **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira **(e)** Falsa

Conjunto de exercícios 4.5 (página 216)

1. Base: (1, 0, 1); dimensão = 1. **3.** Base: (4, 1, 0, 0), (−3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1); dimensão = 3. **5.** Nenhuma base; dimensão = 0.

7. **(a)** $\left(\frac{2}{3},\ 1,\ 0\right),\ \left(-\frac{5}{3},\ 0,\ 1\right)$ **(b)** (1, 1, 0), (0, 0, 1) **(c)** (2,–1, 4) **(d)** (1, 1, 0), (0, 1, 1)

9. **(a)** n **(b)** $\frac{n(n+1)}{2}$ **(c)** $\frac{n(n+1)}{2}$ **13.** Podem ser usados quaisquer dois dentre (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) e (0, 0, 0, 1).

15. $\mathbf{v}_3 = (a, b, c)$ com $9a - 3b - 5c \neq 0$

Verdadeiro/falso 4.5

(a) Verdadeira **(b)** Verdadeira **(c)** Falsa **(d)** Verdadeira **(e)** Verdadeira **(f)** Verdadeira **(g)** Verdadeira **(h)** Verdadeira **(i)** Verdadeira **(j)** Falsa

Conjunto de exercícios 4.6 (página 222)

1. **(a)** $[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$ **(b)** $[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} \frac{5}{28} \\ \frac{3}{14} \end{bmatrix}$ **(c)** $[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} a \\ \frac{b-a}{2} \end{bmatrix}$

3. **(a)** $(\mathbf{p})_S = (4,\ -3,\ 1),\ [\mathbf{p}]_S = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $(\mathbf{p})_S = (0,\ 2,\ -1),\ [\mathbf{p}]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

5. **(a)** $\mathbf{w} = (16, 10, 12)$ **(b)** $\mathbf{q} = 3 + 4x^2$ **(c)** $B = \begin{bmatrix} 15 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

7. **(a)** $\begin{bmatrix} \frac{13}{10} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$ **(c)** $[\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} -\frac{17}{10} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix},\ [\mathbf{w}]_{B'} = \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix}$

9. **(a)** $\begin{bmatrix} 3 & 2 & \frac{5}{2} \\ -2 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ **(b)** $[\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix},\ [\mathbf{w}]_{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{23}{2} \\ 6 \end{bmatrix}$

11. **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ **(d)** $[\mathbf{h}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix},\ [\mathbf{h}]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

13. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ **(d)** $[\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} -239 \\ 77 \\ 30 \end{bmatrix},\ [\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(e) $[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix},\ [\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} -200 \\ 64 \\ 25 \end{bmatrix}$

15. **(a)** $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ **(d)** $[\mathbf{w}]_{B_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix},\ [\mathbf{w}]_{B_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **(e)** $[\mathbf{w}]_{B_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix},\ [\mathbf{w}]_{B_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

17. **(a)** $\begin{bmatrix} 3 & 2 & \frac{5}{2} \\ -2 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ **(b)** $[\mathbf{w}]_{B_1} = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix},\ [\mathbf{w}]_{B_2} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{23}{2} \\ 6 \end{bmatrix}$ **19.** **(a)** $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$

23. **(a)** $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 2), (0, 2, 1)\}$ **(b)** $B = \left\{\left(\frac{4}{5},\ \frac{1}{5},\ -\frac{2}{5}\right),\ \left(\frac{1}{5},\ -\frac{1}{5},\ \frac{2}{5}\right),\ \left(-\frac{2}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{5}\right)\right\}$

Verdadeiro/falso 4.6

(a) Verdadeira **(b)** Verdadeira **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira **(e)** Falsa **(f)** Falsa

Conjunto de exercícios 4.7 (página 235)

1. $\mathbf{r}_1 = (2, -1, 0, 1), \mathbf{r}_2 = (3, 5, 7, -1), \mathbf{r}_3 = (1, 4, 2, 7);$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

3. **(a)** $\begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ **(b)** **b** não está no espaço coluna de A. **(c)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (t-1)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **(e)** $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = -26\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 13\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

5. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix};\ t\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};\ t\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ r\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ s\begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. **(a)** $\mathbf{r}_1 = [1\ \ 0\ \ 2],\ \ \mathbf{r}_2 = [0\ \ 0\ \ 1],\ \ \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \ = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{r}_1 = [1\ \ -3\ \ 0\ \ 0],\ \ \mathbf{r}_2 = [0\ \ 1\ \ 0\ \ 0],\ \ \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{r}_1 = [1\ \ 2\ \ 4\ \ 5],\ \ \mathbf{r}_2 = [0\ \ 1\ \ -3\ \ 0],\ \ \mathbf{r}_3 = [0\ \ 0\ \ 1\ \ -3],\ \ \mathbf{r}_4 = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 1],$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(d) $\mathbf{r}_1 = [1\ \ 2\ \ -1\ \ 5],\ \ \mathbf{r}_2 = [0\ \ 1\ \ 4\ \ 3],\ \ \mathbf{r}_3 = [0\ \ 0\ \ 1\ \ -7],\ \ \mathbf{r}_4 = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \ = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

9. **(a)** $\mathbf{r}_1 = [\ 1\ \ \ 0\ \ \ 2\ ];\ \mathbf{r}_2 = [\ 0\ \ \ 0\ \ \ 1\ ];\ \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\ \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{r}_1 = [\ 1\ \ \ -3\ \ \ 0\ \ \ 0\ ];\ \mathbf{r}_2 = [\ 0\ \ \ 1\ \ \ 0\ \ \ 0\ ];\ \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\ \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{r}_1 = [\ 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5\ ]$; $\mathbf{r}_2 = [\ 0 \quad 1 \quad -3 \quad 0\ ]$; $\mathbf{r}_3 = [\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad -3\ ]$;

$\mathbf{r}_4 = [\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\ ]$; $\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{r}_1 = [\ 1 \quad 2 \quad -1 \quad 5\ ]$; $\mathbf{r}_2 = [\ 0 \quad 1 \quad 4 \quad 3\ ]$; $\mathbf{r}_3 = [\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad -7\ ]$;

$\mathbf{r}_4 = [\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\ ]$; $\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$

11. **(a)** $(1, 1, -4 - 3), (0, 1, -5, -2), (0, 0, 1, \frac{1}{2})$ **(b)** $(1, -1, 2, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -\frac{1}{6})$
(c) $(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)$

15. **(b)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. **(a)** $\begin{bmatrix} 3a & -5a \\ 3b & -5b \end{bmatrix}$ com quaisquer números reais a e b não ambos nulos.

(b) Como A e B são invertíveis, seus espaços nulos são a origem. O espaço nulo de C é a reta $3x + y = 0$.. O espaço nulo de D é todo o plano xy.

Verdadeiro/falso 4.7

(a) Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Falsa **(d)** Falsa **(e)** Falsa **(f)** Verdadeira **(g)** Verdadeira **(h)** Falsa **(i)** Verdadeira **(j)** Falsa

Conjunto de exercícios 4.8 (página 246)

1. $\text{Pos}(A) = \text{Pos}(A^T) = 2$ **3.** **(a)** 2; 1 **(b)** 1; 2 **(c)** 2; 2 **(d)** 2; 3 **(e)** 3; 2

5. **(a)** Posto = 4, nulidade = 0 **(b)** Posto = 3, nulidade = 2 **(c)** Posto = 3, nulidade = 0

7. **(a)** É consistente, 0. **(b)** Não é consistente. **(c)** É consistente, 2. **(d)** É consistente, 7. **(e)** Não é consistente.
(f) É consistente, 4. **(g)** É consistente, 0.

9. $b_1 = r, b_2 = s, b_3 = 4s - 3r, b_4 = 2r - s, b_5 = 8s - 7r$ **11.** Não podem. **13.** O posto é 2 se $r = 2$ e $s = 1$; o posto nunca é 1.

17. **(a)** 3 **(b)** 5 **(c)** 3 **(d)** 3 **19.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Verdadeiro/falso 4.8

(a) Falsa **(b)** Verdadeira **(c)** Falsa **(d)** Falsa **(e)** Verdadeira **(f)** Falsa **(g)** Falsa **(h)** Falsa **(i)** Verdadeira **(j)** Falsa

Conjunto de exercícios 4.9 (página 260)

1. **(a)** Domínio: R^2; contradomínio: R^3 **(b)** Domínio: R^3; contradomínio: R^2 **(c)** Domínio: R^3; contradomínio: R^3
(d) Domínio: R^6; contradomínio: R^1

3. $R^2, R^3, (-1, 2, 3)$

5. **(a)** É linear; $R^3 \to R^2$ **(b)** Não é linear; $R^2 \to R^3$ **(c)** Linear; $R^3 \to R^3$ **(d)** Não é linear; $R^4 \to R^2$

7. (a) e (c) são transformações matriciais; (b), (d) e (e) não são transformações matriciais.

9. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; $T(-1, 2, 4) = (3, -2, -3)$

11. **(a)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

13. **(a)** $T(-1, 4) = (5, 4)$ **(b)** $T(2, 1, -3) = (0, -2, 0)$ **15.** **(a)** $(2, -5, -3)$ **(b)** $(2, 5, 3)$ **(c)** $(-2, -5, 3)$

17. **(a)** $(-2, 1, 0)$ **(b)** $(-2, 0, 3)$ **(c)** $(0, 1, 3)$ **19.** **(a)** $\left(-2, \frac{\sqrt{3}-2}{2}, \frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)$ **(b)** $\left(0, 1, 2\sqrt{2}\right)$ **(c)** $(-1, -2, 2)$

21. **(a)** $\left(-2, \frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{-1+2\sqrt{3}}{2}\right)$ **(b)** $\left(-2\sqrt{2}, 1, 0\right)$ **(c)** $(1, 2, 2)$

25. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \end{bmatrix}$ **29.** **(a)** Duas vezes a projeção ortogonal no eixo x. **(b)** Duas vezes a reflexão no eixo x.

31. A rotação pelo ângulo 2θ.

33. A rotação pelo ângulo θ e translação por $\mathbf{x}_0$; não é uma transformação matricial porque $\mathbf{x}_0$ é não nulo. **35.** Uma reta em R^n.

Verdadeiro/falso 4.9

(a) Falsa **(b)** Falsa **(c)** Falsa **(d)** Verdadeira **(e)** Falsa **(f)** Verdadeira **(g)** Falsa **(h)** Falsa **(i)** Verdadeira

Conjunto de exercícios 4.10 (página 271)

1. $T_B \circ T_A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 21 \\ 10 & -8 & 4 \\ 45 & 3 & 25 \end{bmatrix}$, $T_A \circ T_B = \begin{bmatrix} -8 & -3 & 1 \\ -5 & -15 & -8 \\ 44 & -11 & 45 \end{bmatrix}$

3. **(a)** $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $T_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ **(b)** $T_2 \circ T_1 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$, $T_1 \circ T_2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

(c) $T_2(T_1(x_1, x_2)) = (3x_1 + 3x_2, 6x_1 - 2x_2)$,
$T_1(T_2(x_1, x_2)) = (5x_1 + 4x_2, x_1 - 4x_2)$

5. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

7. **(a)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9. **(a)** $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ **(b)** $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ **(c)** $T_1 \circ T_2 \neq T_2 \circ T_1$

11. **(a)** Não é injetor. **(b)** É injetor. **(c)** É injetor. **(d)** É injetor. **(e)** É injetor. **(f)** É injetor. **(g)** É injetor.

13. **(a)** É injetor; $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$; $T^{-1}(w_1, w_2) = \left(\frac{1}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_2, \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2\right)$

(b) Não é injetor. **(c)** É injetor; $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; $T^{-1}(w_1, w_2) = (-w_2, -w_1)$

(d) Não é injetor.

15. **(a)** A reflexão no eixo x. **(b)** A rotação pelo ângulo $-\frac{\pi}{4}$. **(c)** A contração de fator $\frac{1}{3}$

(d) A reflexão no plano yz. **(e)** A dilatação de fator 5.

17. **(a)** É um operador matricial. **(b)** Não é um operador matricial. **(c)** É um operador matricial. **(d)** Não é um operador matricial.

19. **(a)** É uma transformação matricial. **(b)** É uma transformação matricial. **21.** **(a)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

23. **(a)** $T_A(\mathbf{e}_1) = (-1, 2, 4)$, $T_A(\mathbf{e}_2) = (3, 1, 5)$, $T_A(\mathbf{e}_3) = (0, 2, -3)$ **(b)** $T_A(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = (2, 5, 6)$

(c) $T_A(7\mathbf{e}_3) = (0, 14, -21)$

25. **(a)** É injetora. **(b)** Pode ser injetora. **27.** $T(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_1x_2)$

29. **(a)** A imagem de T é um subespaço próprio de R^n. **(b)** Necessariamente T aplica uma infinidade de vetores em 0.

Verdadeiro/falso 4.10

(a) Falsa **(b)** Verdadeira **(c)** Verdadeira **(d)** Falsa **(e)** Falsa **(f)** Falsa

Conjunto de exercícios 4.11 (página 280)

1. **(a)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. **(a)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. O retângulo de vértices em (0, 0), (−3, 0), (0, 1), (−3, 1). **9.** **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. **(a)** Expansão de fator 3 na direção x.
(b) Expansão de fator 5 na direção y e reflexão no eixo x.
(c) Cisalhamento de fator 4 na direção x.

13. **(a)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

17. **(a)** $y = \frac{2}{7}x$ **(b)** $y = x$ **(c)** $y = \frac{1}{2}x$ **(d)** $y = -2x$ **(e)** $y = \left(-\frac{8+5\sqrt{3}}{11}\right)x$ **19.** **(b)** Não contradiz

23. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) Cisalhamento de fator k na direção xz aplica (x, y, z) em $(x + ky, y, z + ky)$: $\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}$.

Cisalhamento de fator k na direção yz aplica (x, y, z) em $(x, y + kx, z + kx)$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Verdadeiro/falso 4.11

(a) Falsa **(b)** Verdadeira **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira **(e)** Falsa **(f)** Falsa **(g)** Verdadeira

Conjunto de exercícios 4.12 (página 290)

1. **(a)** É estocástica. **(b)** Não é estocástica. **(c)** É estocástica. **(d)** Não é estocástica. **3.** $\begin{bmatrix} 0{,}54545 \\ 0{,}45455 \end{bmatrix}$

5. **(a)** É regular. **(b)** Não é regular. **(c)** É regular. **7.** $\begin{bmatrix} \frac{8}{17} \\ \frac{9}{17} \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{4}{11} \\ \frac{3}{11} \end{bmatrix}$

11. **(a)** A probabilidade de algo que esteja no estado 1 permanecer no estado 1. **(b)** A probabilidade de algo que esteja no estado 2 passar ao estado 1. **(c)** 0,8 **(d)** 0,85

13. **(a)** $\begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}55 \\ 0{,}05 & 0{,}45 \end{bmatrix}$ **(b)** 0,93 **(c)** 0,142 **(d)** 0,63

15. **(a)**

Ano	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Cidade	95.750	91.840	88.243	84.933	81.889
Arredores	29.250	33.160	36.757	40.067	43.111

(b)

Cidade	46.875
Arredores	78.125

17. **(a)** $\frac{23}{100}$ **(b)** $\begin{bmatrix} \frac{46}{159} \\ \frac{22}{53} \\ \frac{47}{159} \end{bmatrix}$ **(c)** 35, 50, 35 **19.** $P = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$; $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

21. $P^k\mathbf{q} = \mathbf{q}$ com qualquer inteiro positivo k.

Verdadeiro/falso 4.12

(a) Verdadeira **(b)** Verdadeira **(c)** Verdadeira **(d)** Falsa **(e)** Verdadeira

Capítulo 4 Exercícios suplementares (página 292)

1. **(a)** $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (4, 3, 2)$, $-\mathbf{u} = (-3, 0, 0)$ **(c)** Axiomas 1 a 5

3. Se $s \neq 1, -2$, o espaço solução é a origem. Se $s = 1$, o espaço solução é um plano pela origem. Se $s = -2$, o espaço solução é uma reta pela origem.

7. A deve ser invertível.

9. **(a)** Posto = 2, nulidade = 1 **(b)** Posto = 2, nulidade = 2 **(c)** Posto = 2, nulidade = $n - 2$

11. **(a)** $\{1, x^2, x^4, \ldots, x^{2m}\}$, sendo $2m = n$ se n for par e $2m = n - 1$ se n for ímpar. **(b)** $\{x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$

13. **(a)** $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

15. Os postos possíveis são 2, 1 e 0.

Conjunto de exercícios 5.1 (página 303)

1. 5

3. **(a)** $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ **(b)** $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ **(c)** $\lambda^2 - 12 = 0$ **(d)** $\lambda^2 + 3 = 0$ **(e)** $\lambda^2 = 0$ **(f)** $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

5. **(a)** Base do autoespaço associado a $\lambda = 3$: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$; base do autoespaço associado a $\lambda = -1$: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) Base do autoespaço associado a $\lambda = 4$: $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) Base do autoespaço associado a $\lambda = \sqrt{12}$: $\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{12}} \\ 1 \end{bmatrix}$; base do autoespaço associado a $\lambda = -\sqrt{12}$: $\begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{12}} \\ 1 \end{bmatrix}$.

(d) Não há autoespaços. **(e)** Base do autoespaço associado a $\lambda = 0$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(f) Base do autoespaço associado a $\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. **(a)** 1, 2, 3 **(b)** $-\sqrt{2}$, 0, $\sqrt{2}$ **(c)** -8 **(d)** 2 **(e)** 2 **(f)** -4, 3

9. **(a)** $\lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ **(b)** $\lambda^4 - 8\lambda^3 + 19\lambda^2 - 24\lambda + 48 = 0$

11. **(a)** $\lambda = 1$: base $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda = -2$: base $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\lambda = -1$: base $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\lambda = 4$: base $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

13. $\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}$, $2^9 = 512$ **15.** **(a)** $y = x$ e $y = 2x$. **(b)** Não há retas invariantes. **(c)** $y = 0$.

Verdadeiro/falso 5.1

(a) Falsa **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Falsa **(e)** Verdadeira **(f)** Falsa **(g)** Falsa

Conjunto de exercícios 5.2 (página 313)

1. Um motivo possível: os determinantes são diferentes. **3.** Um motivo possível: os postos são diferentes.

5. $\lambda = 0$: 1 ou 2; $\lambda = 1$: 1; $\lambda = 2$: 1, 2, ou 3 **7.** Não é diagonalizável. **9.** Não é diagonalizável. **11.** Não é diagonalizável.

13. $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **15.** $P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

17. $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$; $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **19.** $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

21. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} -1 & 10.237 & -2.047 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10.245 & -2.048 \end{bmatrix}$

25. $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

27. Uma resposta possível é $P = \begin{bmatrix} -b & -b \\ a - \lambda_1 & a - \lambda_2 \end{bmatrix}$, com λ_1 e λ_3 dados no Exercício 20 da Seção 5.1.

33. **(a)** $\lambda = 1$: dimensão $= 1$; $\lambda = 3$: dimensão ≤ 2; $\lambda = 4$: dimensão ≤ 1. **(b)** As dimensões serão exatamente 1, 2 e 3.
(c) $\lambda = 4$

Verdadeiro/falso 5.2

(a) Verdadeira **(b)** Verdadeira **(c)** Verdadeira **(d)** Falsa **(e)** Verdadeira **(f)** Verdadeira **(g)** Verdadeira **(h)** Verdadeira

Conjunto de exercícios 5.3 (página 326)

1. $\bar{\mathbf{u}} = (2 + i, \ -4i, \ 1 - i)$, $\text{Re}(\mathbf{u}) = (2, \ 0, \ 1)$, $\text{Im}(\mathbf{u}) = (-1, \ 4, \ 1)$, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{23}$ **5.** $\mathbf{x} = (7 - 6i, -4 - 8i, 6 - 12i)$

7. $\bar{A} = \begin{bmatrix} 5i & 4 \\ 2 + i & 1 - 5i \end{bmatrix}$, $\text{Re}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\text{Im}(A) = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $\det(A) = 17 - i$, $\text{tr}(A) = 1$

11. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -1 + i$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 18 - 7i$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 12 + 6i$ **13.** $-11 - 14i$

15. $\lambda_1 = 2 - i$, $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 - i \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = 2 + i$, $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 + i \\ 1 \end{bmatrix}$

17. $\lambda_1 = 4 - i$, $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 - i \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = 4 + i$, $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 + i \\ 1 \end{bmatrix}$ **19.** $|\lambda| = \sqrt{2}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$ **21.** $|\lambda| = 2$, $\phi = -\frac{\pi}{3}$

23. $P = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **25.** $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ **27.** **(a)** $k = -\frac{8}{3}i$ **(b)** Não existem.

Verdadeiro/falso 5.3

(a) Falsa **(b)** Verdadeira **(c)** Falsa **(d)** Verdadeira **(e)** Falsa **(f)** Falsa

Conjunto de exercícios 5.4 (página 332)

1. **(a)** $y_1 = c_1e^{5x} - 2c_2e^{-x}$, $y_2 = c_1e^{5x} + c_2e^{-x}$ **(b)** $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ **3.** **(a)** $y_1 = -c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$, $y_2 = c_1e^{x} + 2c_2e^{2x} - c_3e^{3x}$, $y_3 = 2c_2e^{2x} - c_3e^{3x}$ **(b)** $y_1 = e^{2x} - 2e^{3x}$, $y_2 = e^{x} - 2e^{2x} + 2e^{3x}$, $y_3 = -2e^{2x} + 2e^{3x}$

7. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$ **9.** $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$

Verdadeiro/falso 5.4

(a) Falsa **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira **(e)** Falsa

Capítulo 5 Exercícios suplementares (página 333)

1. **(b)** A transformação gira os vetores pelo ângulo θ; portanto, se $0 < \theta < \pi$, então nenhum vetor não nulo será transformado num vetor de mesma direção.

3. **(c)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **9.** $A^2 = \begin{bmatrix} 15 & 30 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 75 & 150 \\ 25 & 50 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 375 & 750 \\ 125 & 250 \end{bmatrix}$, $A^5 = \begin{bmatrix} 1.875 & 3.750 \\ 625 & 1.250 \end{bmatrix}$

11. 0, tr(A) **13.** Os autovalores são todos nulos. **15.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **17.** Os autovalores são todos 0, 1 ou -1.

Conjunto de exercícios 6.1 (página 343)

1. **(a)** 5 **(b)** -6 **(c)** -3 **(d)** $\sqrt{13}$ **(e)** $\sqrt{5}$ **(f)** $\sqrt{89}$ **3.** **(a)** 2 **(b)** 11 **(c)** -13 **(d)** -8 **(e)** 0

5. **(a)** -5 **(b)** 1 **(c)** -7 **(d)** 1 **(e)** 1 **(f)** 1 **7.** **(a)** 3 **(b)** 56 **9.** **(b)** 29

11. **(a)** $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}$ **13.** **(a)** $\sqrt{74}$ **(b)** 0 **15.** **(a)** $\sqrt{105}$ **(b)** $\sqrt{47}$

17. $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 50$, $\|\mathbf{p}\| = 6\sqrt{3}$ **19.** **(a)** $3\sqrt{2}$ **(b)** $3\sqrt{5}$ **(c)** $3\sqrt{13}$

21. **(a)**

y, x, 4, −4, −2, 2

(b)

y, x, 1, −1, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$

27. Tomando $V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, temos $\langle V, V \rangle = -2 < 0$, de modo que falha o Axioma 4. **29.** **(a)** $-\frac{28}{15}$ **(b)** 0

Verdadeiro/falso 6.1

(a) Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira **(e)** Falsa **(f)** Verdadeira **(g)** Falsa

Conjunto de exercícios 6.2 (página 350)

1. **(a)** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(b)** $-\frac{3}{\sqrt{73}}$ **(c)** 0 **(d)** $-\frac{20}{9\sqrt{10}}$ **(e)** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(f)** $\frac{2}{\sqrt{55}}$ **3.** **(a)** $\frac{19}{10\sqrt{7}}$ **(b)** 0 **7.** Não existem

9. **(a)** $k = -3$ **(b)** $k = -2, -3$ **13.** Não é ortogonal. **15.** **(a)** $x = t, y = -2t, z = -3t$ **(b)** $2x - 5y + 4z = 0$ **(c)** $x - z = 0$

31. **(a)** A reta $y = -x$ **(b)** O plano xz **(c)** O eixo x

Verdadeiro/falso 6.2

(a) Falsa **(b)** Verdadeira **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira **(e)** Falsa **(f)** Falsa

Conjunto de exercícios 6.3 (página 364)

1. (a), (b), (d) **3.** (b), (d) **5.** (a)

7. **(a)** $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ **(b)** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 1, 0)$

(c) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

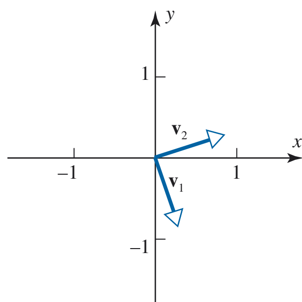
9. **(a)** $-\frac{7}{5}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{5}\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$ **(b)** $-\frac{37}{5}\mathbf{v}_1 - \frac{9}{5}\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3$ **(c)** $-\frac{3}{7}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{7}\mathbf{v}_2 + \frac{5}{7}\mathbf{v}_3$ **11.** **(b)** $\mathbf{u} = -\frac{4}{5}\mathbf{v}_1 - \frac{11}{10}\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_4$

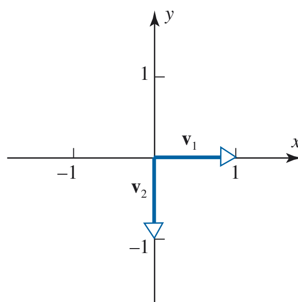
13. **(a)** $\mathbf{w} = \frac{14}{3}\mathbf{u}_1 - \frac{8}{3}\mathbf{u}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{u}_3$ **(b)** $\mathbf{w} = \frac{5}{\sqrt{6}}\mathbf{u}_2 + \frac{11}{\sqrt{66}}\mathbf{u}_3$ **15.** **(a)** $\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right)$ **(b)** $\left(\frac{17}{12}, \frac{7}{4}, -\frac{1}{12}, -\frac{23}{12}\right)$

17. **(a)** $\left(\frac{23}{18}, \frac{11}{6}, -\frac{1}{18}, -\frac{17}{18}\right)$ **(b)** $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

19. **(a)** $\mathbf{w}_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -1, -1\right), \mathbf{w}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, -1\right)$ **(b)** $\mathbf{w}_1 = \left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right), \mathbf{w}_2 = \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$

21. **(a)** $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right), \mathbf{v}_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ **(b)** $\mathbf{v}_1 = (1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, -1)$





23. $\mathbf{v}_1 = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right), \mathbf{v}_2 = \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, 0\right),$

$\mathbf{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right), \mathbf{v}_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}\right)$

25. $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \mathbf{v}_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$ **27.** $\mathbf{w}_1 = \left(\frac{13}{14}, \frac{31}{14}, \frac{40}{14}\right), \mathbf{w}_2 = \left(\frac{1}{14}, -\frac{3}{14}, \frac{2}{14}\right)$

29. **(a)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{8}{\sqrt{234}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{\sqrt{234}} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{\sqrt{234}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{26}}{3} \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$ **(e)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{19}} & -\frac{3}{\sqrt{19}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{19}} & \frac{3}{\sqrt{19}} \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}} & \frac{1}{\sqrt{19}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{2}} & \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{19}} \end{bmatrix}$

(f) As colunas não são linearmente independentes.

33. $\mathbf{v}_1 = 1, \mathbf{v}_2 = \sqrt{3}(2x - 1), \mathbf{v}_3 = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$

Verdadeiro/falso 6.3

(a) Falsa **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira **(e)** Falsa **(f)** Verdadeira

Conjunto de exercícios 6.4 (página 374)

1. **(a)** $\begin{bmatrix} 21 & 25 \\ 25 & 35 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 15 & -1 & 5 \\ -1 & 22 & 30 \\ 5 & 30 & 45 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}$

3. **(a)** $x_1 = 5, \ \ x_2 = \frac{1}{2}$ **(b)** $x_1 = 12, x_2 = -3, x_3 = 9$ **5.** **(a)** $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} \\ -3 \end{bmatrix}$ **(b)** $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

7. **(a)** Solução: $\mathbf{x} = \left(\frac{1}{10}, \frac{6}{5}\right)$; erro de mínimos quadrados: $\frac{4}{5}\sqrt{5}$

(b) Solução: $\mathbf{x} = \left(\frac{2}{7}, \ 0\right) + t(-3, \ 1)$ (t um número real); erro de mínimos quadrados: $\frac{1}{7}\sqrt{42}$

(c) Solução: $\mathbf{x} = \left(-\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \ 0\right) + t(-1, \ -1, \ 1)$ (t um número real); erro de mínimos quadrados: $\frac{1}{2}\sqrt{294}$

9. **(a)** $(7, 2, 9, 5)$ **(b)** $\left(-\frac{12}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$

11. **(a)** $\det(A^T A) = 0$; A não tem vetores coluna linearmente independentes.

(b) $\det(A^T A) = 0$; A não tem vetores coluna linearmente independentes.

13. **(a)** $[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $[P] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

15. **(a)** $(1, 0, -5), (0, 1, 3)$ **(b)** $[P] = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 15 & 26 & 3 \\ -5 & 3 & 34 \end{bmatrix}$ **(c)** $\left(\frac{2x_0+3y_0-z_0}{7}, \frac{15x_0+26y_0+3z_0}{35}, \frac{-5x_0+3y_0+34z_0}{35}\right)$ **(d)** $\frac{3\sqrt{35}}{7}$

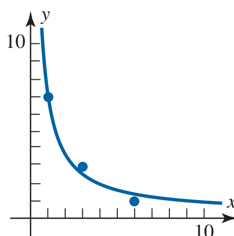
17. $s = t = 1$ **21.** $[P] = A^T(AA^T)^{-1}A$

Verdadeiro/falso 6.4

(a) Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira **(e)** Falsa **(f)** Verdadeira **(g)** Falsa **(h)** Verdadeira

Conjunto de exercícios 6.5 (página 381)

1. $y = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}x$ **3.** $y = 2 + 5x - 3x^2$ **11.** $y = \frac{5}{21} + \frac{48}{7x}$



Verdadeiro/falso 6.5

(a) Falsa **(b)** Verdadeira **(c)** Falsa **(d)** Verdadeira

Conjunto de exercícios 6.6 (página 387)

1. **(a)** $(1 + \pi) - 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x$ **(b)** $(1 + \pi) - 2\left[\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \cdots + \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right]$

3. **(a)** $-\frac{1}{2} + \frac{1}{e-1}e^x$ **(b)** $\frac{13}{12} + \frac{1+e}{2(1-e)}$ **5.** **(a)** $\frac{3}{\pi}x$ **(b)** $1 - \frac{6}{\pi^2}$ **9.** $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi}\left[1 - (-1)^k\right] \operatorname{sen} kx$

Verdadeiro/falso 6.6

(a) Falsa **(b)** Verdadeira **(c)** Verdadeira **(d)** Falsa **(e)** Verdadeira

Capítulo 6 Exercícios suplementares (página 387)

1. **(a)** $(0, a, a, 0)$ com $a \neq 0$ **(b)** $\pm\left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$

3. **(a)** O subespaço de todas as matrizes em M_{22} com zero em cada entrada diagonal.

(b) O subespaço de todas as matrizes antissimétricas em M_{22}.

7. $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **9.** Não existe. **11.** **(b)** θ tende a $\frac{\pi}{2}$. **17.** Não existe.

Conjunto de exercícios 7.1 (página 395)

1. **(b)** $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{bmatrix}$

3. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ **(e)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

7. **(a)** $\left(-1 + 3\sqrt{3},\ 3 + \sqrt{3}\right)$ **(b)** $\left(\frac{5}{2} - \sqrt{3},\ \frac{5}{2}\sqrt{3} + 1\right)$

9. **(a)** $\left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{3},\ 2,\ \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ **(b)** $\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3},\ 6,\ -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

11. **(a)** $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ **13.** $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$

17. As únicas possibilidades são $a = 0, b = -\frac{2}{\sqrt{6}},\ c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $a = 0, b = \frac{2}{\sqrt{6}},\ c = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

21. **(a)** As rotações em torno da origem, as reflexões em qualquer reta pela origem e quaisquer combinações destas.

(b) As rotações em torno da origem, as dilatações, contrações e reflexões em retas pela origem e quaisquer combinações destas.

(c) Não existem; as dilatações e contrações.

Verdadeiro/falso 7.1

(a) Falsa **(b)** Falsa **(c)** Falsa **(d)** Falsa **(e)** Verdadeira **(f)** Verdadeira **(g)** Verdadeira **(h)** Verdadeira

Conjunto de exercícios 7.2 (página 404)

1. **(a)** $\lambda^2 - 5\lambda = 0$; $\lambda = 0$: dimensão 1; $\lambda = 5$: dimensão 1.

(b) $\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0$; $\lambda = 6$: dimensão 1; $\lambda = -3$: dimensão 2.

(c) $\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0$; $\lambda = 3$: dimensão 1; $\lambda = 0$: dimensão 2.

(d) $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda - 32 = 0$; $\lambda = 2$: dimensão 2; $\lambda = 8$: dimensão 1.

(e) $\lambda^4 - 8\lambda^3 = 0$; $\lambda = 0$: dimensão 3; $\lambda = 8$: dimensão 1.

(f) $\lambda^4 - 8\lambda^3 + 22\lambda^2 - 24\lambda + 9 = 0$; $\lambda = 1$: dimensão 2; $\lambda = 3$: dimensão 2.

3. $P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} \end{bmatrix}$; $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ **5.** $P = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$; $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}$

7. $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$; $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

9. $P=\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$; $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} -25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$ **15.** Não é **19.** Sim

Verdadeiro/falso 7.2

(a) Verdadeira **(b)** Verdadeira **(c)** Falsa **(d)** Verdadeira **(e)** Verdadeira **(f)** Verdadeira **(g)** Verdadeira

Conjunto de exercícios 7.3 (página 415)

1. **(a)** $[x_1\ \ x_2]\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ **(b)** $[x_1\ \ x_2]\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ **(c)** $[x_1\ \ x_2\ \ x_3]\begin{bmatrix} 9 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ -4 & \frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

3. $2x^2+5y^2-6xy$ **5.** $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$; $Q=3y_1^2+y_2^2$

7. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$; $Q=y_1^2+4y_2^2+7y_3^2$

9. **(a)** $[x\ \ y]\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+[-1\ \ 6]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+2=0$ **(b)** $[x\ \ y]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+[7\ \ -8]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}-5=0$

11. **(a)** Elipse **(b)** Hipérbole **(c)** Parábola **(d)** Círculo **13.** Hipérbole: $2(y')^2-3(x')^2=8$; $\theta\approx-26{,}6°$

15. Hipérbole: $4(x')^2-(y')^2=3$; $\theta=36{,}9°$

17. **(a)** Positiva **(b)** Negativa **(c)** Indefinida **(d)** Não negativa **(e)** Não positiva

19. Positiva **21.** Não negativa **23.** Indefinida **27.** $k>2$

31. **(a)** $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & -\frac{1}{n(n-1)} & \cdots & -\frac{1}{n(n-1)} \\ -\frac{1}{n(n-1)} & \frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n(n-1)} & -\frac{1}{n(n-1)} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$ **(b)** É positiva. **33.** A deve ter um autovalor positivo de multiplicidade 2.

Verdadeiro/falso 7.3

(a) Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira **(e)** Falsa **(f)** Verdadeira **(g)** Verdadeira **(h)** Verdadeira **(i)** Falsa **(j)** Verdadeira **(k)** Falsa **(l)** Falsa

Conjunto de exercícios 7.4 (página 423)

1. Máximo: 5 em $(1, 0)$ e $(-1, 0)$; mínimo: -1 em $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

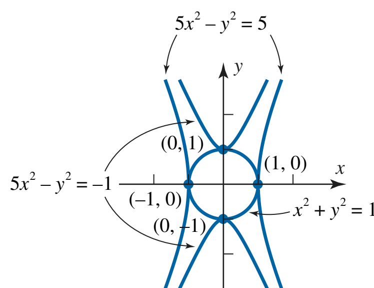
3. Máximo: 7 em $(0, 1)$ e $(0, -1)$; mínimo: 3 em $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.

5. Máximo: 9 em $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$; mínimo: 3 em $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$.

7. Máximo: $z=4\sqrt{2}$ em $(x, y)=\left(2\sqrt{2},\ 2\right)$ e $\left(-2\sqrt{2},\ -2\right)$;

mínimo: $z=-4\sqrt{2}$ em $(x, y)=\left(-2\sqrt{2},\ 2\right)$ e $\left(2\sqrt{2},\ -2\right)$.

9.



13. Pontos críticos: $(-1, 1)$, máximo relativo; $(0, 0)$, ponto de sela.

15. Pontos críticos: $(0, 0)$, mínimo relativo; $(2, 1)$ e $(-2, 1)$, pontos de sela.

17. Vértice: $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **21.** $q(\mathbf{x}) = \lambda$

Verdadeiro/falso 7.4

(a) Falsa **(b)** Verdadeira **(c)** Verdadeira **(d)** Falsa **(e)** Verdadeira

Conjunto de exercícios 7.5 (página 430)

1. $A^* = \begin{bmatrix} -2i & 4 & 5-i \\ 1+i & 3-i & 0 \end{bmatrix}$ **3.** $A = \begin{bmatrix} 1 & i & 2-3i \\ -i & -3 & 1 \\ 2+3i & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **5.** **(a)** $a_{13} \neq \overline{a_{31}}$ **(b)** $a_{22} \neq \overline{a_{22}}$

9. $A^* = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5}i & -\frac{3}{5}i \end{bmatrix}$ **11.** $A^* = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-i+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1-i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{-i-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ **13.** $P = \begin{bmatrix} \frac{-1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

15. $P = \begin{bmatrix} \frac{-1-i}{\sqrt{6}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ **17.** $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1+i}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1+i}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 0 & i & 2-3i \\ i & 0 & 1 \\ -2-3i & -1 & 4i \end{bmatrix}$ **21.** **(a)** $a_{13} \neq -\overline{a_{31}}$ **(b)** $a_{11} \neq -\overline{a_{11}}$ **29.** **(c)** B e C devem comutar.

37. $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

39. A multiplicação de $\mathbf{x}$ por P corresponde a $\|\mathbf{u}\|^2$ vezes a projeção ortogonal de $\mathbf{x}$ sobre $W = \text{ger}\{\mathbf{u}\}$. Se $\|\mathbf{u}\| = 1$, então a multiplicação de $\mathbf{x}$ por $H = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*$ corresponde à reflexão de $\mathbf{x}$ no hiperplano $\mathbf{u}^{\perp}$.

Verdadeiro/falso 7.5

(a) Falsa **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Falsa **(e)** Falsa

Capítulo 7 Exercícios suplementares (página 432)

1. **(a)** $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{9}{25} & \frac{4}{5} & -\frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{3}{5} & \frac{16}{25} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{bmatrix}$

5. $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$; $P^TAP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. Positiva. **9.** **(a)** Parábola. **(b)** Parábola.

Conjunto de exercícios 8.1 (página 442)

1. Não é linear. **3.** É linear. **5.** É linear. **7.** **(a)** É linear. **(b)** Não é linear.

9. $T(x_1, x_2) = (-4x_1 + 5x_2, x_1 - 3x_2)$; $T(5, -3) = (-35, 14)$

11. $T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 4x_2 - x_3, 5x_1 - 5x_2 - x_3, x_1 + 3x_3)$; $T(2, 4, -1) = (15, -9, -1)$

13. $T(2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3) = (-10, -7, 6)$ **15.** **(a)** **17.** **(a)**

19. **(a)** **21.** **(a)** $(1, -4)$ **(b)** $(4, 2, 6), (1, 1, 0), (-3, -4, 9)$ **(c)** x, x^2, x^3

23. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} -14 \\ 19 \\ 11 \end{bmatrix}$ **(c)** $\text{pos}(T) = 2, \text{nul}(T) = 1$ **(d)** $\text{pos}(A) = 2, \text{nul}(A) = 2$

25. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ **(c)** $\text{pos}(T) = \text{nul}(T) = 2$ **(d)** $\text{pos}(A) = \text{nul}(A) = 1$

27. **(a)** Núcleo; eixo y; imagem: plano xz **(b)** Núcleo: eixo x; imagem: plano yz
(c) Núcleo: a reta pela origem perpendicular ao plano $y = x$; imagem: o plano $y = x$.

29. **(a)** $\text{nul}(T) = 2$ **(b)** $\text{nul}(T) = 4$ **(c)** $\text{nul}(T) = 3$ **(d)** $\text{nul}(T) = 1$

31. **(a)** 3 **(b)** Não é consistente. **33.** Uma reta pela origem, um plano pela origem, só a origem, ou todo o R^3.

35. **(b)** Não define. **41.** Nuc(D) consiste em todos os polinômios constantes. **43.** **(a)** $T(f(x)) = f^{(4)}(x)$ **(b)** $(f(x)) = f^{(n+1)}(x)$

Verdadeiro/falso 8.1

(a) Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Falsa **(e)** Verdadeira **(f)** Verdadeira **(g)** Falsa **(h)** Falsa **(i)** Falsa

Conjunto de exercícios 8.2 (página 451)

1. **(a)** $\text{nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}$; T é injetora **(b)** $\text{nuc}(T) = \{k(-\frac{3}{2}, 1)\}$; T não é injetora **(c)** $\text{nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}$; T é injetora
(d) $\text{nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}$; T é injetora **(e)** $\text{nuc}(T) = \{k(1, 1)\}$; T não é injetora
(f) $\text{nuc}(T) = \{k(0, 1, -1)\}$; T não é injetora

3. **(a)** Não é injetora. **(b)** Não é injetora. **(c)** É injetora.

5. **(a)** $\text{Nuc}(T) = \{k(-1, 1)\}$; **(b)** T não é injetora, pois $\text{nuc}(T) \neq \{\mathbf{0}\}$.

7. **(a)** É injetora. **(b)** Não é injetora. **(c)** Não é injetora. **(d)** É injetora.

11. **(a)** $T\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ **(b)** $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{bmatrix}$

13. T não é injetora, pois, por exemplo, $f(x) = x^2(x-1)^2$ está em seu núcleo. **15.** Sim, é injetora.

17. T não é injetora, pois, por exemplo, **a** está em seu núcleo. **19.** Sim, é verdade.

Verdadeiro/falso 8.2

(a) Falsa **(b)** Verdadeira **(c)** Falsa **(d)** Verdadeira **(e)** Falsa **(f)** Falsa

Conjunto de exercícios 8.3 (página 457)

1. **(a)** $(T_2 \circ T_1)(x, y) = (2x - 3y, 2x + 3y)$ **(b)** $(T_2 \circ T_1)(x, y) - (4x - 12y, 3x - 9y)$
(c) $(T_2 \circ T_1)(x, y) = (2x + 3y, x - 2y)$ **(d)** $(T_2 \circ T_1)(x, y) = (0, 2x)$

3. **(a)** $a + d$ **(b)** $(T_2 \circ T_1)(A)$ não existe, pois $T_1(A)$ não é uma matriz 2×2. **5.** $T_2(\mathbf{v}) = \frac{1}{4}\mathbf{v}$

11. **(a)** T não possui inversa. **(b)** $T^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{8}x_2 - \frac{3}{4}x_3 \\ \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{8}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \\ -\frac{3}{8}x_1 + \frac{5}{8}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \end{bmatrix}$ **(c)** $T^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \end{bmatrix}$

(d) $T^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 3x_2 - x_3 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -4x_1 - 5x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$

13. **(a)** $a_i \neq 0$ com $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ **(b)** $T^{-1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{a_1}x_1, \frac{1}{a_2}x_2, \frac{1}{a_3}x_3, \ldots, \frac{1}{a_n}x_n\right)$

15. **(a)** $T_1^{-1}(p(x)) = \frac{p(x)}{x}$; $T_2^{-1}(p(x)) = p(x-1)$; $(T_2 \circ T_1)^{-1}(p(x)) = \frac{1}{x}p(x-1)$ **17.** **(a)** $(1, -1)$ **(d)** $T^{-1}(2, 3) = 2 + x$

21. **(a)** $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ **(b)** $T_1 \circ T_2 \neq T_2 \circ T_1$ **(c)** $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$

Verdadeiro/falso 8.3

(a) Verdadeira **(b)** Falsa **(c)** Falsa **(d)** Verdadeira **(e)** Falsa **(f)** Verdadeira

Conjunto de exercícios 8.4 (página 466)

1. **(a)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **3.** **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **5.** **(a)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ **7.** **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **(b)** $3 + 10x + 16x^2$

9. **(a)** $[T(\mathbf{v}_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $[T(\mathbf{v}_2)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ **(b)** $T(\mathbf{v}_1) = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 29 \end{bmatrix}$

(c) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{18}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{107}{7} & \frac{24}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} \frac{19}{7} \\ -\frac{83}{7} \end{bmatrix}$

11. **(a)** $[T(\mathbf{v}_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$, $[T(\mathbf{v}_2)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $[T(\mathbf{v}_3)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) $T(\mathbf{v}_1) = 16 + 51x + 19x^2$, $T(\mathbf{v}_2) = -6 - 5x + 5x^2$, $T(\mathbf{v}_3) = 7 + 40x + 15x^2$

(c) $T\left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right) = \frac{239a_0 - 161a_1 + 289a_2}{24} + \frac{201a_0 - 111a_1 + 247a_2}{8}x + \frac{61a_0 - 31a_1 + 107a_2}{12}x^2$

(d) $T(1 + x^2) = 22 + 56x + 14x^2$

13. **(a)** $[T_2 \circ T_1]_{B',B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & -9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $[T_2]_{B',B''} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $[T_1]_{B'',B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $[T_2 \circ T_1]_{B',B} = [T_2]_{B',B''}[T_1]_{B'',B}$

19. **(a)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $14e^2x - 8xe^{2x} - 20x^2e^{2x}$ pois $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -8 \\ -20 \end{bmatrix}$

21. **(a)** B', B'' **(b)** B', B'''

Verdadeiro/falso 8.4

(a) Falsa **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Falsa **(e)** Verdadeira

Conjunto de exercícios 8.5 (página 473)

1. $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} & -\frac{56}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$ **3.** $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{13}{11\sqrt{2}} & -\frac{25}{11\sqrt{2}} \\ \frac{5}{11\sqrt{2}} & \frac{9}{11\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

5. $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **7.** $[T]_B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$, $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. **(a)** $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ **(b)** $B' = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{-3-\sqrt{21}}{6} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-3+\sqrt{21}}{6} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

13. **(a)** $\lambda = -4, \lambda = 3$

(b) Base do autoespaço associado a $\lambda = -4 : -2 + \frac{8}{3}x + x^2$; base do autoespaço associado a $\lambda = 3 : 5 - 2x + x^2$

21. A escolha de uma base apropriada pode fornecer um entendimento melhor do operador linear.

Verdadeiro/falso 8.5

(a) Falsa **(b)** Verdadeira **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira **(e)** Verdadeira **(f)** Falsa **(g)** Verdadeira **(h)** Falsa

Capítulo 8 Exercícios suplementares (página 475)

1. Não é. $T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + B \neq (A\mathbf{x}_1 + B) + (A\mathbf{x}_2 + B) = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2)$, e se $c \neq 1$, então $T(c\mathbf{x}) = cA\mathbf{x} + B \neq c(A\mathbf{x} + B) = cT(\mathbf{x})$.

5. **(a)** $T(\mathbf{e}_3)$ e quaisquer dois dentre $T(\mathbf{e}_1)$ e $T(\mathbf{e}_2)$ formam bases da imagem; $(-1, 1, 0, 1)$ é uma base do núcleo.

(b) posto = 3, nulidade = 1

7. **(a)** posto = 2 e nulidade = 2 **(b)** Não é injetor. **11.** posto = 3 e nulidade = 1 **13.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

15. $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **17.** $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **19.** **(b)** $f(x) = x, g(x) = 1$ **(c)** $f(x) = e^x, g(x) = e^{-x}$

21. **(d)** Os pontos estão no gráfico da função. **25.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n+1} \end{bmatrix}$

Conjunto de exercícios 9.1 (página 485)

1. $x_1 = 2, x_2 = 1$ **3.** $x_1 = 3, x_2 = -1$ **5.** $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 0$

7. $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 0$ **9.** $x_1 = -3, x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 1$

11. **(a)** $A = LU = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = L_1DU_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = L_2U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **15.** $x_1 = \frac{21}{17},\ x_2 = -\frac{14}{17},\ x_3 = \frac{12}{17}$

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 3$

19. **(b)** $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{bmatrix}$

Verdadeiro/falso 9.1

(a) Falsa **(b)** Falsa **(c)** Verdadeira **(d)** Verdadeira **(e)** Verdadeira

Conjunto de exercícios 9.2 (página 494)

1. **(a)** λ_3 é dominante **(b)** Não tem autovalor dominante.

3. $\mathbf{x}_1 \approx \begin{bmatrix} 0{,}98058 \\ -0{,}19612 \end{bmatrix};\ \mathbf{x}_2 \approx \begin{bmatrix} 0{,}98837 \\ -0{,}15206 \end{bmatrix};\ \mathbf{x}_3 \approx \begin{bmatrix} 0{,}98679 \\ -0{,}16201 \end{bmatrix};\ \mathbf{x}_4 \approx \begin{bmatrix} 0{,}98715 \\ -0{,}15977 \end{bmatrix};$

autovalor dominante: $\lambda = 2 + \sqrt{10} \approx 5{,}16228$;

autovetor dominante: $\begin{bmatrix} 1 \\ 3-\sqrt{10} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}16228 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \lambda^{(1)} = 6;\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix},\ \lambda^{(2)} = 6{,}6;\ \mathbf{x}_3 \approx \begin{bmatrix} -0{,}53846 \\ 1 \end{bmatrix},\ \lambda^{(3)} \approx 6{,}60550;$

$\mathbf{x}_4 \approx \begin{bmatrix} -0{,}53488 \\ 1 \end{bmatrix},\ \lambda^{(4)} \approx 6{,}60555;$

autovalor dominante: $\lambda = 3 + \sqrt{13} \approx 6{,}60555$;

autovetor dominante: $\begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{26+4\sqrt{13}}} \\ \frac{2+\sqrt{13}}{\sqrt{26+4\sqrt{13}}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0{,}47186 \\ 0{,}88167 \end{bmatrix}$

7. **(a)** $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}5 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}8 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_3 \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}929 \end{bmatrix}$ **(b)** $\lambda^{(1)} = 2{,}8,\ \lambda^{(2)} \approx 2{,}976,\ \lambda^{(3)} \approx 2{,}997$

(c) Autovalor dominante: $\lambda = 3$; autovetor dominante: $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **(d)** 0,1%

9. 2,99993; $\begin{bmatrix} 0{,}99180 \\ 1{,}00000 \end{bmatrix}$

13. **(a)** Começando com $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, leva 8 iterações. **(b)** Começando com $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, leva 8 iterações.

Conjunto de exercícios 9.3 (página 500)

1. $\mathbf{h}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ **3.** $\mathbf{h}_1 \approx \begin{bmatrix} 0{,}39057 \\ 0{,}65094 \\ 0{,}65094 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_1 \approx \begin{bmatrix} 0{,}60971 \\ 0 \\ 0{,}79262 \end{bmatrix}$

5. *Sites* 1 e 2 (empatados); os *sites* 3 e 4 são irrelevantes. **7.** *Site* 2, *site* 3, *site* 4; os *sites* 1 e 5 são irrelevantes.

Conjunto de exercícios 9.4 (página 506)

1. **(a)** $\approx$ 0,067 segundos **(b)** $\approx$ 66,68 segundos **(c)** $\approx$ 66,668 segundos, aproximadamente 18,5 horas.

3. **(a)** $\approx$ 9,52 segundos **(b)** $\approx$ 0,0014 segundos **(c)** $\approx$ 9,52 segundos **(d)** $\approx$ 28,6 segundos

5. **(a)** $6{,}67 \times 10^5$ segundos para a fase direta, 10 segundos para a fase indireta. **(b)** 1.334 **7.** n^2 flops. **9.** $2n^3 - n^2$ flops

Conjunto de exercícios 9.5 (página 513)

1. $0, \sqrt{5}$ **3.** $\sqrt{5}$ **5.** $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **7.** $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ **11.** $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Verdadeiro/falso 9.5

(a) Falsa **(b)** Verdadeira **(c)** Falsa **(d)** Falsa **(e)** Verdadeira **(f)** Falsa **(g)** Verdadeira

Conjunto de exercícios 9.6 (página 517)

1. $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}\left[3\sqrt{2}\right]\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ **3.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **5.** $3\sqrt{2}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

7. $\sqrt{3}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}[1 \quad 0] + \sqrt{2}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}[0 \quad 1]$ **9.** Devem ser armazenados 70.100 números; A tem 100.000 entradas.

Verdadeiro/falso 9.6

(a) Verdadeira **(b)** Verdadeira **(c)** Falsa

Capítulo 9 Exercícios suplementares (página 517)

1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. **(a)** $\lambda = 3$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ **(b)** $\mathbf{x}_5 \approx \begin{bmatrix} 0{,}7100 \\ 0{,}7041 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} \approx \begin{bmatrix} 0{,}7071 \\ 0{,}7071 \end{bmatrix}$ **(c)** $\mathbf{x}_5 \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}9918 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 12 & 0 & 6 \\ 4 & -8 & 10 \\ 4 & -8 & 10 \\ 12 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Conjunto de exercícios 10.1 (página 524)

1. **(a)** $y = 3x - 4$ **(b)** $y = -2x + 1$

2. **(a)** $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ ou $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ **(b)** $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ ou $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$

3. $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + y = 0$ (uma parábola) **4.** **(a)** $x + 2y + z = 0$ **(b)** $-x + y - 2z + 1 = 0$

5. **(a)** $\begin{bmatrix} x & y & z & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$ **(b)** $x + 2y + z = 0; -x + y - 2z = 0$

6. **(a)** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z = -2$ ou $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 4$
(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 3$ ou $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 5$

10. $\begin{vmatrix} y & x^2 & x & 1 \\ y_1 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **11.** A equação da reta pelos três pontos colineares. **12.** $0 = 0$

13. A equação do plano pelos três pontos coplanares.

Conjunto de exercícios 10.2 (página 534)

1. $x_1 = 2, x_2 = \frac{2}{3}$; valor máximo de $z = \frac{22}{3}$. **2.** Nenhuma solução viável. **3.** A solução é ilimitada.

4. Invista \$6.000 no título *A* e \$4.000 no título *B*; o rendimento anual é de \$880.

5. $\frac{7}{9}$ copos de leite, $\frac{25}{18}$ xícaras de flocos de milho; custo mínimo $= \frac{1.460}{18} \approx 81{,}11$ centavos.

6. **(a)** $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ não comprometem; $2x_1 + 3x_2 \leq 24$ compromete.
(b) $x_1 - x_2 \leq v$ com $v < -3$ compromete e com $v < -6$ dá o conjunto vazio.
(c) $x_2 \leq v$ com $v > 8$ não compromete e com $v < 0$ dá o conjunto vazio.

7. 550 contêineres da companhia *A* e 300 contêineres da companhia *B*; frete máximo = \$2.110,00

8. 925 contêineres da companhia *A* e nenhum contêiner da companhia *B*; frete máximo = \$2.312,50

9. 0,4 quilos do ingrediente *A* e 2,4 quilos do ingrediente *B*; custo mínimo = 24,8 centavos.

Conjunto de exercícios 10.3 (página 541)

1. 700 **2.** **(a)** 5 **(b)** 4

4. **(a)** Cada boi vale $\frac{34}{21}$ unidades e cada ovelha, $\frac{20}{21}$ unidades.
(b) Primeira classe, $\frac{9}{25}$ medidas; segunda classe, $\frac{7}{25}$ medidas; terceira classe, $\frac{4}{25}$ medidas.

5. **(a)** $x_1 = \dfrac{(a_2 + a_3 + \cdots + a_n) - a_1}{n-2}$, $x_i = a_i - x_1$, $i = 2, 3, \ldots, n$

(b) Exercício 7(b); ouro, $30\frac{1}{2}$ unidades; bronze, $9\frac{1}{2}$ unidades; latão, $14\frac{1}{2}$ unidades; ferro, $5\frac{1}{2}$ unidades.

6. **(a)**
$$\begin{aligned} 5x + y + z - K &= 0 \\ x + 7y + z - K &= 0 \\ x + y + 8z - K &= 0 \end{aligned}$$
$x = \dfrac{21t}{131}$, $y = \dfrac{14t}{131}$, $z = \dfrac{12t}{131}$, $K = t$, em que t é um número arbitrário.

(b) Tomando $t = 131$, obtemos $x = 21$, $y = 14$, $z = 12$, $K = 131$.

(c) Tomando $t = 262$, obtemos $x = 42$, $y = 28$, $z = 24$, $K = 262$.

7. **(a)** O filho legítimo recebe $577\frac{7}{9}$ moedas e o filho ilegítimo, $422\frac{2}{9}$ moedas.

(b) Ouro, $30\frac{1}{2}$ unidades; bronze, $9\frac{1}{2}$ unidades; latão, $14\frac{1}{2}$ unidades; ferro, $5\frac{1}{2}$ unidades.

(c) A primeira pessoa tem 45, a segunda tem $37\frac{1}{2}$ e a terceira, $22\frac{1}{2}$.

Conjunto de exercícios 10.4 (página 552)

2. **(a)** $S(x) = -0{,}12643(x - 0{,}4)^3 - 0{,}20211(x - 0{,}4)^2 + 0{,}92158(x - 0{,}4) + 0{,}38942$
(b) $S(0{,}5) = 0{,}47943$; erro $= 0$ %

3. **(a)** A spline cúbica emendada **(b)** $S(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 1$

4.
$$S(x) = \begin{cases} -0{,}00000042(x+10)^3 + 0{,}000214(x+10) + 0{,}99815, & -10 \le x \le 0 \\ 0{,}00000024(x)^3 - 0{,}0000126(x)^2 + 0{,}000088(x) + 0{,}99987, & 0 \le x \le 10 \\ -0{,}00000004(x-10)^3 - 0{,}0000054(x-10)^2 - 0{,}000092(x-10) + 0{,}99973, & 10 \le x \le 20 \\ 0{,}00000022(x-20)^3 - 0{,}0000066(x-20)^2 - 0{,}000212(x-20) + 0{,}99823, & 20 \le x \le 30 \end{cases}$$
Máximo em $(x, S(x)) = (3{,}93; 1{,}00004)$

5.
$$S(x) = \begin{cases} 0{,}00000009(x+10)^3 - 0{,}0000121(x+10)^2 + 0{,}000282(x+10) + 0{,}99815, & -10 \le x \le 0 \\ 0{,}00000009(x)^3 - 0{,}0000093(x)^2 + 0{,}000070(x) + 0{,}99987, & 0 \le x \le 10 \\ 0{,}00000004(x-10)^3 - 0{,}0000066(x-10)^2 - 0{,}000087(x-10) + 0{,}99973, & 10 \le x \le 20 \\ 0{,}00000004(x-20)^3 - 0{,}0000053(x-20)^2 - 0{,}000207(x-20) + 0{,}99823, & 20 \le x \le 30 \end{cases}$$
Máximo em $(x, S(x)) = (4{,}00; 1{,}00001)$

6. **(a)** $S(x) = \begin{cases} -4x^3 + 3x & 0 \le x \le 0{,}5 \\ 4x^3 - 12x^2 + 9x - 1 & 0{,}5 \le x \le 1 \end{cases}$

(b) $S(x) = \begin{cases} 2 - 2x & 0{,}5 \le x \le 1 \\ 2 - 2x & 1 \le x \le 1{,}5 \end{cases}$

(c) Os três pontos de dados são colineares.

7. **(b)**
$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_{n-1} - 2y_1 + y_2 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_1 \end{bmatrix}$$

8. **(b)**
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} -hy_1' - y_1 + y_1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \\ y_{n-1} - y_n + hy_n' \end{bmatrix}$$

Conjunto de exercícios 10.5 (página 562)

1. **(a)** $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}46 \\ 0{,}54 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0{,}454 \\ 0{,}546 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0{,}4546 \\ 0{,}5454 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0{,}45454 \\ 0{,}54546 \end{bmatrix}$

(b) P é regular, pois todas as entradas de P são positivas: $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} \\ \frac{6}{11} \end{bmatrix}$

2. **(a)** $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}23 \\ 0{,}52 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0{,}273 \\ 0{,}396 \\ 0{,}331 \end{bmatrix}$ **(b)** P é regular, pois todas as entradas de P são positivas; $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{22}{72} \\ \frac{29}{72} \\ \frac{21}{72} \end{bmatrix}$

3. **(a)** $\begin{bmatrix} \frac{9}{17} \\ \frac{8}{17} \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} \frac{26}{45} \\ \frac{19}{45} \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} \frac{3}{19} \\ \frac{4}{19} \\ \frac{12}{19} \end{bmatrix}$

4. **(a)** $P^n = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 \end{bmatrix}$, $n = 1, 2, \ldots$. Assim, nenhuma potência inteira de P tem todas as entradas positivas.

(b) $P^n \to \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ com n crescente, portanto, $P^n\mathbf{x}^{(0)} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, qualquer que seja $\mathbf{x}^{(0)}$, com n crescente.

(c) As entradas do vetor limite $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ não são todas positivas.

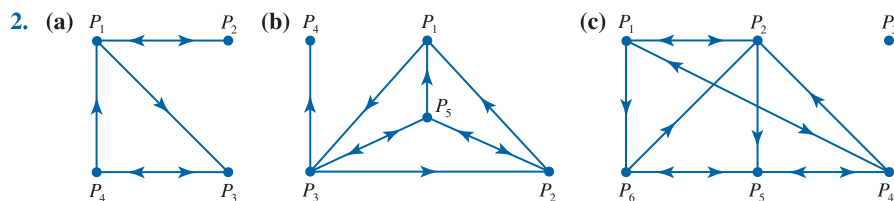
6. $P^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ tem todas as entradas positivas; $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ **7.** $\frac{10}{13}$

8. $54\frac{1}{6}\%$ na região 1, $16\frac{2}{3}\%$ na região 2 e $29\frac{1}{6}\%$ na região 3

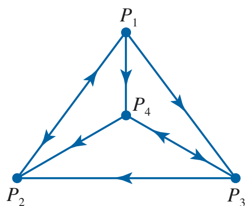
Conjunto de exercícios 10.6 (página 570)

1. **(a)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. **(a)** **(b)** **(c)**



3. **(a)**



(b) De 1 passo: $P_1 \to P_2$

De 2 passos: $P_1 \to P_4 \to P_2$
$P_1 \to P_3 \to P_2$

De 3 passos: $P_1 \to P_2 \to P_1 \to P_2$
$P_1 \to P_3 \to P_4 \to P_2$
$P_1 \to P_4 \to P_3 \to P_2$

(c) De 1 passo: $P_1 \to P_4$

De 2 passos: $P_1 \to P_3 \to P_4$

De 3 passos: $P_1 \to P_2 \to P_1 \to P_4$
$P_1 \to P_4 \to P_3 \to P_4$

4. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) A entrada (i, j)-ésima entrada é o número de membros da família que influenciam tanto o i-ésimo quanto o j-ésimo membro da família.

5. **(a)** $\{P_1, P_2, P_3\}$ **(b)** $\{P_3, P_4, P_5\}$ **(c)** $\{P_2, P_4, P_6, P_8\}$ e $\{P_4, P_5, P_6\}$ **6.** **(a)** Nenhuma **(b)** $\{P_3, P_4, P_6\}$

7. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Potência de $P_1 = 5$; Potência de $P_2 = 3$; Potência de $P_3 = 4$; Potência de $P_4 = 2$

8. Primeiro, A; segundo, B e E (empate); quarto, C; quinto, D.

Conjunto de exercícios 10.7 (página 580)

1. **(a)** $-5/8$ **(b)** $[0 \quad 1 \quad 0]$ **(c)** $[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ **2.** Por exemplo, tome $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. **(a)** $\mathbf{p}^* = [0 \quad 1]$, $\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v = 3$ **(b)** $\mathbf{p}^* = [0 \quad 1 \quad 0]$, $\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v = 2$

(c) $\mathbf{p}^* = [0 \quad 0 \quad 1]$, $\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v = 2$ **(d)** $\mathbf{p}^* = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$, $\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v = -2$

4. **(a)** $\mathbf{p}^* = [\frac{5}{8} \quad \frac{3}{8}]$, $\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{7}{8} \end{bmatrix}$, $v = \frac{27}{8}$ **(b)** $\mathbf{p}^* = [\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}]$, $\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}$, $v = \frac{70}{3}$

(c) $\mathbf{p}^* = [1 \quad 0]$, $\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v = 3$ **(d)** $\mathbf{p}^* = [\frac{3}{5} \quad \frac{2}{5}]$, $\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$, $v = \frac{19}{5}$

(e) $\mathbf{p}^* = [\frac{3}{13} \quad \frac{10}{13}]$, $\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} \\ \frac{12}{13} \end{bmatrix}$, $v = -\frac{29}{13}$

5. $\mathbf{p}^* = [\frac{13}{20} \quad \frac{7}{20}]$, $\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \frac{11}{20} \\ \frac{9}{20} \end{bmatrix}$, $v = -\frac{3}{20}$

Conjunto de exercícios 10.8 (página 588)

1. **(a)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 78 \\ 54 \\ 79 \end{bmatrix}$

2. **(a)** Use o Corolário 10.8.4; todas as somas de linha são menores do que 1.
(b) Use o Corolário 10.8.5; todas as somas de coluna são menores do que 1.

(c) Use o Teorema 10.8.3, com $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} > C\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1{,}9 \\ 0{,}9 \\ 0{,}9 \end{bmatrix}$.

3. E^2 tem todas as entradas positivas. **4.** Preço dos tomates, \$120,00; preço do milho, \$100,00; preço da alface, \$106,67.
5. \$1.256 para o EC, \$1.448 para o EE, \$1.556 para o EM. **6.** **(b)** $\frac{542}{503}$

Conjunto de exercícios 10.9 (página 596)

1. A segunda classe; \$15.000 **2.** \$223 **3.** 1 : 1,90 : 3,02 : 4,24 : 5,00
5. $s/(g_1^{-1} + g_2^{-1} + \cdots + g_{k-1}^{-1})$ **6.** $1 : 2 : 3 : \cdots : n-1$

Conjunto de exercícios 10.10 (página 603)

1. **(a)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 0{,}866 & 1.366 & 0{,}500 \\ 0 & -0{,}500 & 0{,}366 & 0{,}866 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. **(b)** $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1\frac{1}{2}, 1, 0)$ e $\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$
(c) $(0, 0, 0), (1, .6, 0), (1, 1.6, 0), (0, 1, 0)$

3. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

4. **(a)** $M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 20° & -\operatorname{sen} 20° \\ 0 & \operatorname{sen} 20° & \cos 20° \end{bmatrix}$,

$M_4 = \begin{bmatrix} \cos(-45°) & 0 & \operatorname{sen}(-45°) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(-45°) & 0 & \cos(-45°) \end{bmatrix}$, $M_5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $P' = M_5M_4M_3(M_1P + M_2)$

5. **(a)** $M_1 = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45^\circ & -\operatorname{sen} 45^\circ \\ 0 & \operatorname{sen} 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$,

$M_4 = \begin{bmatrix} \cos 35^\circ & 0 & \operatorname{sen} 35^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} 35^\circ & 0 & \cos 35^\circ \end{bmatrix}$, $M_5 = \begin{bmatrix} \cos(-45^\circ) & -\operatorname{sen}(-45^\circ) & 0 \\ \operatorname{sen}(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, $M_7 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $P' = M_7(M_5M_4(M_2M_1P + M_3) + M_6)$

6. $R_1 = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$, $R_2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$R_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$, $R_4 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$R_5 = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$

7. **(a)** $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Conjunto de exercícios 10.11 (página 613)

1. **(a)** $\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **(b)** $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{t}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $\mathbf{t}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}$, $\mathbf{t}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{11}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{11}{16} \end{bmatrix}$, $\mathbf{t}^{(4)} = \begin{bmatrix} \frac{7}{32} \\ \frac{23}{32} \\ \frac{7}{32} \\ \frac{23}{32} \end{bmatrix}$, $\mathbf{t}^{(5)} = \begin{bmatrix} \frac{15}{64} \\ \frac{47}{64} \\ \frac{15}{64} \\ \frac{47}{64} \end{bmatrix}$, $\mathbf{t}^{(5)} - \mathbf{t} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{64} \\ -\frac{1}{64} \\ -\frac{1}{64} \\ -\frac{1}{64} \end{bmatrix}$

(d) Em t e t_3, $-12{,}9\%$;
em t_2 e t_4, $5{,}2\%$

2. $\frac{1}{2}$ **3.** $\mathbf{t}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{2}{4} & \frac{5}{4} & \frac{4}{4} & \frac{2}{4} & \frac{5}{4} & \frac{4}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}^T$

$\mathbf{t}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{13}{16} & \frac{18}{16} & \frac{9}{16} & \frac{22}{16} & \frac{13}{16} & \frac{7}{16} & \frac{21}{16} & \frac{16}{16} & \frac{10}{16} \end{bmatrix}^T$

Conjunto de exercícios 10.12 (página 624)

1. **(c)** $x_3^* = \left(\frac{31}{22}, \frac{27}{22}\right)$

2. **(a)** $\mathbf{x}_3^{(1)} = (1{,}40000, 1{,}20000)$
$\mathbf{x}_3^{(2)} = (1{,}41000, 1{,}23000)$
$\mathbf{x}_3^{(3)} = (1{,}40900, 1{,}22700)$
$\mathbf{x}_3^{(4)} = (1{,}40910, 1{,}22730)$
$\mathbf{x}_3^{(5)} = (1{,}40909, 1{,}22727)$
$\mathbf{x}_3^{(6)} = (1{,}40909, 1{,}22727)$

(b) Os mesmos que na parte (a)

(c) $\mathbf{x}_3^{(1)} = (9{,}55000; 25{,}65000)$
$\mathbf{x}_3^{(2)} = (0{,}59500; -1{,}21500)$
$\mathbf{x}_3^{(3)} = (1{,}49050; 1{,}47150)$
$\mathbf{x}_3^{(4)} = (1.40095; 1{,}20285)$
$\mathbf{x}_3^{(5)} = (1.40991; 1{,}22972)$
$\mathbf{x}_3^{(6)} = (1.40901; 1{,}22703)$

4. $\mathbf{x}_1^* = (1, 1)$, $\mathbf{x}_2^* = (2, 0)$, $\mathbf{x}_3^* = (1, 1)$

7.
$$\begin{aligned}
x_7 + x_8 + x_9 &= 13{,}00\\
x_4 + x_5 + x_6 &= 15{,}00\\
x_1 + x_2 + x_3 &= 8{,}00\\
0{,}82843(x_6 + x_8) + 0{,}58579x_9 &= 14{,}79\\
1{,}41421(x_3 + x_5 + x_7) &= 14{,}31\\
0{,}82843(x_2 + x_4) + 0{,}58579x_1 &= 3{,}81\\
x_3 + x_6 + x_9 &= 18{,}00\\
x_2 + x_5 + x_8 &= 12{,}00\\
x_1 + x_4 + x_7 &= 6{,}00\\
0{,}82843(x_2 + x_6) + 0{,}58579x_3 &= 10{,}51\\
1{,}41421(x_1 + x_5 + x_9) &= 16{,}13\\
0{,}82843(x_4 + x_8) + 0{,}58579x_7 &= 7{,}04
\end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned}
x_7 + x_8 + x_9 &= 13{,}00\\
x_4 + x_5 + x_6 &= 15{,}00\\
x_1 + x_2 + x_3 &= 8{,}00\\
0{,}04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0{,}75000(x_6 + x_8) + 0{,}61396x_9 &= 14{,}79\\
0{,}91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0{,}25000(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14{,}31\\
0{,}04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0{,}75000(x_2 + x_4) + 0{,}61396x_1 &= 3{,}81\\
x_3 + x_6 + x_9 &= 18{,}00\\
x_2 + x_4 + x_8 &= 12{,}00\\
x_1 + x_5 + x_7 &= 6{,}00\\
0{,}04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0{,}75000(x_2 + x_6) + 0{,}61396x_3 &= 10{,}51\\
0{,}91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0{,}25000(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16{,}13\\
0{,}04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0{,}75000(x_4 + x_8) + 0{,}61396x_7 &= 7{,}04
\end{aligned}$$

Conjunto de exercícios 10.13 (página 639)

1. $T_i\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{12}{25}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}$, $i = 1, 2, 3, 4$, onde os quatro valores de

$\begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}$ são $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{13}{25} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{13}{25} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \frac{13}{25} \\ \frac{13}{25} \end{bmatrix}$; $d_H(S) = \ln(4)/\ln\left(\frac{25}{12}\right) = 1{,}888\ldots$

2. $s \approx 0{,}47$; $d_H(S) \approx \ln(4)/\ln(1/0{,}47) = 1{,}8\ldots$ Ângulos de rotação: 0º (esquerdo superior); −90º (direito superior); 180º (esquerdo inferior); 180º (direito inferior).

3. (0, 0, 0), (1, 0, 0), (2, 0, 0), (3, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 2), (1, 2, 0), (2, 1, 3), (2, 0, 1), (2, 0, 2), (2, 2, 0), (0, 3, 3)

4. **(a)** (i) $s = \frac{1}{3}$; (ii) todos os ângulos de rotação são de 0º; (iii) $d_H(S) = \ln(7)/\ln(3) = 1{,}771\ldots$ Esse conjunto é um fractal.

(b) (i) $s = \frac{1}{2}$; (ii) todos os ângulos de rotação são de 180º; (iii) $d_H(S) = \ln(3)/\ln(2) = 1{,}584\ldots$ Esse conjunto é um fractal.

(c) (i) $s = \frac{1}{2}$; (ii) ângulos de rotação: 90º (topo); 180º (esquerdo inferior); 180º (direito inferior); (iii) $d_H(S) = \ln(3)/\ln(2) = 1{,}584\ldots$ Esse conjunto é um fractal.

(d) (i) $s = \frac{1}{2}$; (ii) ângulos de rotação: 90º (esquerdo superior); 180º (direito superior); 180º (direito inferior); (iii) $d_H(S) = \ln(3)/\ln(2) = 1{,}584\ldots$ Esse conjunto é um fractal.

5. $s = 0{,}8509\ldots$, $\theta = -2{,}69°\ldots$ **6.** (0,766; 0,996) arredondado até três casas decimais. **7.** $d_H(S) = \ln(16)/\ln(4) = 2$

8. $\ln(4)/\ln\left(\frac{4}{3}\right) = 4{,}818\ldots$ **9.** $d_H(S) = \ln(8)/\ln(2) = 3$; o cubo não é um fractal.

10. $k = 20$; $s = \frac{1}{3}$; $d_H(S) = \ln(20)/\ln(3) = 2{,}726\ldots$; esse conjunto é um fractal.

11.



Conjunto inicial



Primeira iterada



Segunda iterada



Terceira iterada



Quarta iterada

$d_H\,(S) = \ln(2)/\ln(3) = 0{,}6309\ldots$

12. Área de $S_0 = 1$; área de $S_1 = \frac{8}{9} = 0{,}888\ldots$; área de $S_2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 0{,}790\ldots$; área de $S_3 = \left(\frac{8}{9}\right)^3 = 0{,}702\ldots$; área de $S_4 = \left(\frac{8}{9}\right)^4 = 0{,}624\ldots$

Conjunto de exercícios 10.14 (página 652)

1. $\Pi(250) = 750$, $\Pi(25) = 50$, $\Pi(125) = 250$, $\Pi(30) = 60$, $\Pi(10) = 30$, $\Pi(50) = 150$, $\Pi(3.750) = 7.500$, $\Pi(6) = 12$, $\Pi(5) = 10$

2. Um ponto fixo: $\{(0, 0)\}$; um ciclo de período 3: $\left\{\left(\frac{3}{6}, 0\right), \left(\frac{3}{6}, \frac{3}{6}\right), \left(0, \frac{3}{6}\right)\right\}$;;
dois ciclos de período 4: $\left\{\left(\frac{4}{6}, 0\right), \left(\frac{4}{6}, \frac{4}{6}\right), \left(\frac{2}{6}, 0\right), \left(\frac{2}{6}, \frac{2}{6}\right)\right\}$ e $\left\{\left(0, \frac{2}{6}\right), \left(\frac{2}{6}, \frac{4}{6}\right), \left(0, \frac{4}{6}\right), \left(\frac{4}{6}, \frac{2}{6}\right)\right\}$;
dois ciclos de período 12: $\left\{\left(0, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}\right), \left(\frac{3}{6}, \frac{5}{6}\right), \left(\frac{2}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{3}{6}, \frac{4}{6}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right), \left(0, \frac{5}{6}\right), \left(\frac{5}{6}, \frac{4}{6}\right), \left(\frac{3}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{4}{6}, \frac{5}{6}\right), \left(\frac{3}{6}, \frac{2}{6}\right), \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)\right\}$ e $\left\{\left(\frac{1}{6}, 0\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{2}{6}, \frac{3}{6}\right), \left(\frac{5}{6}, \frac{2}{6}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{3}{6}\right), \left(\frac{4}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{5}{6}, 0\right), \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right), \left(\frac{4}{6}, \frac{3}{6}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{4}{6}\right), \left(\frac{5}{6}, \frac{3}{6}\right), \left(\frac{2}{6}, \frac{5}{6}\right)\right\}$. $\Pi(6) = 12$

3. **(a)** 3, 7, 10, 2, 12, 14, 11, 10, 6, 1, 7, 8, 0, 8, 8, 1, 9, 10, 4, 14, 3, 2, 5, 7, 12, 4, 1, 5, 6, 11, 2, 13, 0, 13, 13, 11, 9, 5, 14, 4, 3, 7, . . .

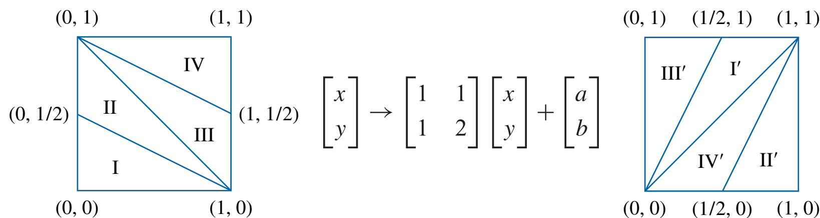
(c) (5, 5), (10, 15), (4, 19), (2, 0), (2, 2), (4, 6), (10, 16), (5, 0), (5, 5), . . .

4. **(c)** As cinco primeiras iteradas de $\left(\frac{1}{101}, 0\right)$ são $\left(\frac{1}{101}, \frac{1}{101}\right)$, $\left(\frac{2}{101}, \frac{3}{101}\right)$, $\left(\frac{5}{101}, \frac{8}{101}\right)$, $\left(\frac{13}{101}, \frac{21}{101}\right)$, e $\left(\frac{34}{101}, \frac{55}{101}\right)$.

6. **(b)** As matrizes de automorfismos de Anosov são $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(c) A transformação produz uma rotação de S pelo ângulo de 90º no sentido horário.

9.



Na região I: $= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; na região II: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$;
na região III: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$; na região IV: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

12. $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$ e $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$, formam um ciclo de período 2 e $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ e $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ também formam um ciclo de período 2.

14. Começamos com uma tabela 101 × 101 de **pixels brancos** e nela colocamos a letra "A". Aplicando a transformação do gato de Arnold nessa imagem, espalhamos os **pixels pretos** pela imagem. Então sobrepomos a letra "B" nessa imagem. Aplicamos novamente a transformação do gato de Arnold nessa imagem e sobrepomos a letra "C" na imagem resultante. Repetimos esse procedimento com as letras "D" e "E". A próxima aplicação da transformação do gato de Arnold nos devolve a letra "A" com os pixels das letras "B" a "E" espalhados ao fundo.

Conjunto de exercícios 10.15 (página 664)

1. **(a)** *GIYUOKEVBH* **(b)** *SFANEFZWJH*

2. **(a)** $A^{-1} = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 23 & 15 \end{bmatrix}$ **(b)** Não é invertível. **(c)** $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 19 \\ 23 & 24 \end{bmatrix}$ **(d)** Não é invertível. **(e)** Não é invertível.

(f) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 15 & 12 \\ 21 & 5 \end{bmatrix}$

3. *WE LOVE MATH* 4. Matriz decodificadora $= \begin{bmatrix} 7 & 15 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$; matriz codificadora $= \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 15 \end{bmatrix}$

5. *THEY SPLIT THE ATOM* **6.** *I HAVE COME TO BURY CAESAR* **7.** **(a)** 010110001 **(b)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. A é invertível módulo 29 se, e só se, $\det(A) \neq 0 \pmod{29}$.

Conjunto de exercícios 10.16 (página 674)

2.
$$\left.\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{4} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}(a_0 - c_0) \\ b_n &= \tfrac{1}{2} \\ c_n &= \tfrac{1}{4} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}(a_0 - c_0) \end{aligned}\right\} \quad n = 1, 2, \ldots \qquad \left.\begin{aligned} a_n &\to \tfrac{1}{4} \\ b_n &= \tfrac{1}{2} \\ c_n &\to \tfrac{1}{4} \end{aligned}\right\} \text{ com } n \to \infty$$

3.
$$\left.\begin{aligned} a_{2n+1} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{6(4)^n}(2a_0 - b_0 - 4c_0) \\ b_{2n+1} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{6(4)^n}(2a_0 - b_0 - 4c_0) \\ c_{2n+1} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\left.\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{5}{12} + \frac{1}{6(4)^n}(2a_0 - b_0 - 4c_0) \\ b_{2n} &= \frac{1}{2} \\ c_{2n} &= \frac{1}{12} - \frac{1}{6(4)^n}(2a_0 - b_0 - 4c_0) \end{aligned}\right\} \quad n = 1, 2, \ldots$$

4. Autovalores: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}$; autovetores: $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

5. 12 gerações; 0,006%

6. $\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n+2}}[(-3-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^{n+1} + (-3+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})^{n+1}] \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n+1}}[(1+\sqrt{5})^{n+1} + (1-\sqrt{5})^{n+1}] \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n+1}}[(1+\sqrt{5})^{n} + (1-\sqrt{5})^{n}] \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n+1}}[(1+\sqrt{5})^{n} + (1-\sqrt{5})^{n}] \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n+1}}[(1+\sqrt{5})^{n+1} + (1-\sqrt{5})^{n+1}] \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n+2}}[(-3-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^{n+1} + (-3+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})^{n+1}] \end{bmatrix}$; $\mathbf{x}^{(n)} \to \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ com $n \to \infty$ **8.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Conjunto de exercícios 10.17 (página 684)

1. **(a)** $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ **(b)** $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 175 \\ 50 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 250 \\ 88 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 382 \\ 125 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} 570 \\ 191 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{x}^{(6)} = L\mathbf{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} 857 \\ 285 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^{(6)} \simeq \lambda_1 \mathbf{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} 855 \\ 287 \end{bmatrix}$

7. 2,375 **8.** 1,49611

Conjunto de exercícios 10.18 (página 692)

1. **(a)** Rendimento = $33\frac{1}{3}$% da população; $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} \end{bmatrix}$

(b) Rendimento = 45,8% da população; $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$; é colhida 57,9 % da faixa etária mais jovem.

2. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1{,}000 \\ 0{,}845 \\ 0{,}824 \\ 0{,}795 \\ 0{,}755 \\ 0{,}699 \\ 0{,}626 \\ 0{,}532 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $L\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2{,}090 \\ 0{,}845 \\ 0{,}824 \\ 0{,}795 \\ 0{,}755 \\ 0{,}699 \\ 0{,}626 \\ 0{,}532 \\ 0{,}418 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\frac{1{,}090 + 0{,}418}{7{,}584} = 0{,}199$ **4.** $h_I = (R-1)/(a_I b_1 b_2 \cdots b_{I-1} + \cdots + a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1})$

5. $h_I = \dfrac{a_1 + a_2 b_1 + \cdots + (a_{J-1} b_1 b_2 \cdots b_{J-2}) - 1}{a_I b_1 b_2 \cdots b_{I-1} + \cdots + a_{J-1} b_1 b_2 \cdots b_{J-2}}$

Conjunto de exercícios 10.19 (página 699)

1. $\dfrac{\pi^2}{3} + 4\cos t + \cos 2t + \dfrac{4}{9}\cos 3t$

2. $\dfrac{T^2}{3} + \dfrac{T^2}{\pi^2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{T}t + \dfrac{1}{2^2}\cos\dfrac{4\pi}{T}t + \dfrac{1}{3^2}\cos\dfrac{6\pi}{T}t + \dfrac{1}{4^2}\cos\dfrac{8\pi}{T}t\right)$
$-\dfrac{T^2}{\pi}\left(\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{T}t + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{T}t + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}\dfrac{6\pi}{T}t + \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}\dfrac{8\pi}{T}t\right)$

3. $\dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} t - \dfrac{2}{3\pi}\cos 2t - \dfrac{2}{15\pi}\cos 4t$ **4.** $\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1\cdot 3}\cos t - \dfrac{1}{3\cdot 5}\cos 2t - \dfrac{1}{5\cdot 7}\cos 3t - \cdots - \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\cos nt\right)$

5. $\dfrac{T}{4} - \dfrac{8T}{\pi^2}\left(\dfrac{1}{2^2}\cos\dfrac{2\pi t}{T} + \dfrac{1}{6^2}\cos\dfrac{6\pi t}{T} + \dfrac{1}{10^2}\cos\dfrac{10\pi t}{T} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2}\cos\dfrac{2n\pi t}{T}\right)$

Conjunto de exercícios 10.20 (página 707)

1. **(a)** É combinação; $\mathbf{v} = \frac{1}{5}\mathbf{v}_1 + \frac{2}{5}\mathbf{v}_2 + \frac{2}{5}\mathbf{v}_3$ **(b)** Não é combinação; $\mathbf{v} = \frac{2}{5}\mathbf{v}_1 + \frac{4}{5}\mathbf{v}_2 - \frac{1}{5}\mathbf{v}_3$ **(c)** É combinação; $\mathbf{v} = \frac{2}{5}\mathbf{v}_1 + \frac{3}{5}\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3$
(d) É combinação; $\mathbf{v} = \frac{4}{15}\mathbf{v}_1 + \frac{6}{15}\mathbf{v}_2 + \frac{5}{15}\mathbf{v}_3$

2. m = número de triângulos = 7, n = número de pontos de vértice = 7,
k = número de pontos de vértice na fronteira = 5; a Equação (7) é $7 = 2(7) - 2 - 5$.

3. $\mathbf{w} = M\mathbf{v} + \mathbf{b} = M(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3) + (c_1 + c_2 + c_3)\mathbf{b}$
$= c_1(M\mathbf{v}_1 + \mathbf{b}) + c_2(M\mathbf{v}_2 + \mathbf{b}) + c_3(M\mathbf{v}_3 + \mathbf{b}) = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + c_3\mathbf{w}_3$

4. **(a)** **(b)**

5. **(a)** $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **(b)** $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
(c) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ **(d)** $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$

7. **(a)** Dois dos coeficientes são nulos.
(b) Pelo menos um dos coeficientes é nulo.
(c) Nenhum dos coeficientes é nulo.

8. **(a)** $\frac{1}{3}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{v}_3$ **(b)** $\begin{bmatrix} 8/3 \\ 2 \end{bmatrix}$

ÍNDICE

D

E

F

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

W

Y